

In allen mathematischen Disziplinen und in der Mehrzahl der naturwissenschaftlichen Fächer und ihrer Grenzgebiete sind in meinem Verlage neben rein wissenschaftlicher, populär-wissenschaftlicher und pädagogischer Literatur größere Handbücher und namentlich auch moderne

## Lehrbücher für Studierende

erschienen. Ich bitte, meinen alljährlich neugedruckten „kleinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Katalog“ zu verlangen, der durch alle Buchhandlungen sowie den Verlag unentgeltlich zu beziehen ist.

Leipzig, Poststr. 3

B. G. TEUBNER

# ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

VON  
GEORGE SALMON

NACH DER FREIEN BEARBEITUNG VON WILHELM FIEDLER

NEU HERAUSGEGEBEN VON

**DR. FRIEDRICH DINGELDEY**

O PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZU DARMSTADT

ACHTE AUFLAGE

ERSTER TEIL



LEIPZIG UND BERLIN  
DRUCK UND VERLAG VON B.G. TEUBNER

1915

PROPERTY OF

UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY



516

18.12.1911

V.1

*Am*

## Vorwort.

Die erste, im Jahre 1860 von Wilhelm Fiedler herausgegebene Auflage des hier vorliegenden Buches ist eine deutsche Bearbeitung eines Werkes des irischen Mathematikers und Theologen George Salmon, das unter dem Titel „A treatise on conic sections, containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods“ in Dublin im Jahre 1848 erschienen ist. Von der fünften, im Jahre 1887 herausgegebenen Auflage an erschien die deutsche Bearbeitung in zwei Teilen, der erste wurde im Jahre 1907 zum siebenten Male aufgelegt.

Für die freien Bearbeitungen aller dieser Ausgaben und der übrigen ausgezeichneten mathematischen Lehrbücher von G. Salmon, die das Gebiet der höheren ebenen Kurven, der Geometrie des Raumes und der Algebra der linearen Transformationen umfassen, ist man W. Fiedler zu großem Danke verpflichtet, haben doch diese Werke in Deutschland wesentlich zur Verbreitung algebraisch-geometrischer Methoden beigetragen. Als vor einigen Jahren die 7. Auflage der analytischen Geometrie der Kegelschnitte nahezu vergriffen war, konnte Fiedler hochbetagt auf ein arbeitsreiches Leben zurückblicken, währenddessen er die mathematische Wissenschaft durch zahlreiche wertvolle Abhandlungen und ausgezeichnete Lehrbücher gefördert hatte. Sein hohes Alter gestattete ihm nicht die Bearbeitung einer neuen Auflage des Buches; am 19. November 1912 entschlief er im 81. Jahre seines Lebens. Die Herren M. Großmann und A. Voß haben ihm Nachrufe gewidmet, jener in der Schweizerischen Bauzeitung, Bd. 60 (1912), S. 301 f. und in den Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft (Frauenfeld 1913), dieser im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 22 (1913), S. 97—113.

Einer Anregung meines verehrten Freundes, des Herrn Geh. Hofrates Prof. Dr. K. Rohn in Leipzig, folgend, habe ich die Bearbeitung einer neuen Ausgabe der Salmon-Fiedlerschen Analytischen Geometrie der Kegelschnitte übernommen. Hierbei bemühte ich mich, die großen Vorzüge des Buches möglichst beizubehalten, immerhin erschienen mir

einige Änderungen wünschenswert; die wichtigsten derselben seien kurz erwähnt.

Während in den früheren Auflagen das erste Kapitel mit der Einführung des Koordinatenbegriffes bei Punkten in der Ebene begann, habe ich diesen Begriff zunächst an Punkten in der Geraden erläutert und einige Bemerkungen über Strecken, die mit Vorzeichen behaftet sind, beigelegt. Ferner schien es mir zweckmäßig, die wichtigsten elementaren Sätze über Determinanten, wenigstens über solche vom dritten Grade, abzuleiten, da von ihnen mehrfach im Buche Gebrauch gemacht wird; Nr. 8 und Nr. 90 sind ihnen gewidmet. Einige Sätze über die Involution von Punktpaaren wurden mehr an den Anfang des Buches gesetzt (Nr. 17 und 18) und etwas ausführlicher behandelt.

Den Inhalt des fünften Kapitels habe ich wesentlich gekürzt, indem mehrere Betrachtungen über lineare Substitutionen, über die Transformation der projektiven Koordinaten und über Kollineationen weggelassen wurden; diese Dinge schienen mir zweckmäßiger in ein Lehrbuch der projektiven Geometrie zu gehören.

In dem Kapitel über Systeme von Kreisen sind die Nummern 121 bis 124, von den Übungsbeispielen abgesehen, einem Manuskripte von Herrn K. Rohn entnommen, dem ich für die Erlaubnis des Abdruckes und die Überlassung der Figuren meinen besten Dank ausspreche. In diesen Nummern werden die wichtigsten Sätze über Schnittwinkel von Kreisen und über das Kreisnetz abgeleitet, ferner enthalten sie eine Lösung der Aufgabe von Apollonius über Berührung dreier Kreise durch einen vierten Kreis und der Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise unter vorgegebenen Winkeln schneidet. Auch für einige Bemerkungen, die sich auf den Krümmungsmittelpunkt der Kegelschnitte beziehen (besonders in Nr. 218 und 221) bin ich meinem Freunde Rohn zu Dank verpflichtet.

Einen neuen Beitrag zu dem Buche habe ich in den Nummern 132 bis 144 geliefert, die die Einführung der Begriffe Pol und Polare, die Transformation der Gleichung des Kegelschnittes auf den Mittelpunkt und auf die Achsen, sowie die Ableitung der Kegelschnitt-Kriterien in anderer Weise behandeln, als es in den früheren Auflagen des Buches und in der englischen Urschrift geschehen war.

Die literarischen Hinweise habe ich an das Ende des Buches gesetzt; viele von ihnen wurden bibliographisch genauer angegeben, einige neu hinzugefügt. Im übrigen seien die Leser, die Näheres über die Geschichte der Geometrie der Kegelschnitte erfahren wollen, auf die Schriften von M. Chasles, H. G. Zeuthen, M. Cantor, E. Kötter, J. Tropfke

und auf meinen Artikel über Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme im dritten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften verwiesen.

Zahlreiche Ungenauigkeiten und mehrere Fehler, die in den letzten Auflagen stehen geblieben waren, habe ich entfernt; auch in stilistischer Hinsicht glaube ich manches verbessert zu haben.

Mit der Übernahme des von W. Fiedler verfaßten Nachrufes „Zum Gedächtnis George Salmons“ auch in die neue Auflage glaube ich im Sinne des früheren Herausgebers gehandelt zu haben.

Dem Verlage von B. G. Teubner bin ich zu besonderem Dank dafür verpflichtet, daß der Druck des Buches auch in schweren Zeiten ohne Verzögerung durchgeführt wurde.

Darmstadt, den 3. März 1915.

**F. Dingeldey.**

## Zum Gedächtnis George Salmons.

Geb. 25. September 1819 in Dublin, gest. ebenda 22. Januar 1904.

Von W. Fiedler (+).

Die 6. Auflage dieses Werkes (1898) war die letzte, die ich meinem ehrwürdigen Freunde unter die Augen legen konnte, diese neue muß ohne sein Geleit erscheinen. Es sei mir deshalb gestattet, an Stelle eines Vorworts, welches das Buch wohl entbehren kann, durch eine kurze Darstellung vom Leben und Wirken seines Urhebers die Erinnerung an ihn zu pflegen.

Er hat mich unter seine Freunde gezählt, mich durch mehr als 44 Jahre mit seinen Briefen erfreut und uns, auch mit Gemahlin und Töchtern, vielmal besucht; leider konnte ich seiner Einladung nach Dublin zu den beiden festlichen Gelegenheiten: Versammlung der „British Association“ von 1878, die er leitete, und Dreihundertjahrfeier (Ter-Centenary) des Trinity College 1892, als er Provost war, nicht Folge leisten. Aber er liebte das Reisen sehr, ich fand schon 1865 seinen Namen im Fremdenbuch von Zermatt; fast alljährlich kam er allein oder in Begleitung seiner Damen bis zu den siebziger Jahren seines Lebens nach dem Kontinent, nach Frankreich und Deutschland, besonders auch in die Alpen, die südlichen Täler des Wallis, das Engadin, das Berner Oberland; und so sah ich ihn wiederholt in Zürich, aber auch vorher schon in Prag und in Chemnitz.

Als ich ihn zum erstenmal sah, erschien er mir recht als das Ideal eines Mannes; hoch und aufrecht, breitschulterig; in Kopf und Hand der Mann geistiger Arbeit, helle freundliche Augen; einfach, bieder, lebenswürdig, von vollendeten Formen ohne jede Pose. Ich sagte mich ihm im stillen zu, für immer. Allem, was ich von seinen Arbeiten entdeckte, bin ich deshalb mit Interesse nachgegangen, und nun ich selbst ein alter Mann bin, schätze ich die lange Dauer unserer Verbindung als eines der größten Güter, die mir auf meinem Weg durchs Leben geschenkt wurden. Ich erzähle darum gern von ihm.

Von Chemnitz aus war ich mit ihm 1859 in wissenschaftliche Verbindung getreten. Ich hatte mir sein Buch von den höheren ebenen

Kurven von 1852 verschafft und war natürlich dadurch zu dessen Vorläufer von den Kegelschnitten geführt worden, von welchem die 3. Auflage von 1855 vorlag. Wie das dem von jeher auf das Selbststudium angewiesenen jungen Lehrer schmeckte, der von Plückers Quartanten von 1828 und 1831 herkam! Ich wendete mich an den Autor mit der Bitte um seine Zustimmung zu einer von mir geplanten freien deutschen Bearbeitung seiner Bücher. Sein erster Brief brachte mir seine Billigung und das Versprechen seiner Mithilfe, zugleich empfahl er mich seinen Freunden Arthur Cayley und J. J. Sylvester, denen er die eben erschienenen Vorlesungen zur Einführung in die neuere höhere Algebra gewidmet hatte, das erste Lehrbuch der Formentheorie; sie erfreuten mich bald durch die Zusendung ihrer wichtigen Arbeiten. Salmon selbst sandte mir im Februar 1860 seine Arbeiten von 1850 über die gewundenen Kurven mit dem ersten Versuch zu ihrer Klassifikation, von 1857 über die ebenen Kurven dritter Ordnung und von 1855 über den Grad der Reziprokalfläche einer gegebenen algebraischen Fläche — die Lösung des Problems, das den Schlußstein im Bau seiner analytischen Geometrie von drei Dimensionen bildet. In der Tat folgte nach der Invariantentheorie der Flächen dritten Grades, welche Salmon mir im April 1861 sendete, diese Raumgeometrie selbst schon 1862. Salmons System der analytischen Geometrie mit der zugehörigen Algebra war vollendet. Mit allem Fleiß habe ich ihm durch die langen Jahre einen guten Teil meiner Arbeit gewidmet; vor allem seinen Kegelschnitten, da sie für den wissenschaftlichen Standpunkt des Ganzen grundlegend und zugleich den weitesten Kreisen direkt zugänglich und vielfach auch genügend sind. Nach den Kegelschnitten folgten zuerst die Vorlesungen (1863) und die Raumgeometrie (1863, 1865), die höheren Kurven aber erst 1873. Denn mein großer Freund entsagte mit dem Jahre 1865 der mathematischen Lehrtätigkeit und Produktion, welcher schon immer nur ein Teil seiner außerordentlichen Kraft gewidmet war, weil er mit gleicher Liebe und Energie arbeitend in der theologischen Wissenschaft und in seiner Kirche stand. Nun gab er seine Stelle als Fellow und Tutor auf und ward zum Regius Professor of Divinity erwählt, zum Haupt der Theologenschule des Trinity College, natürlich um sich ihr ganz zu widmen.

An dieser Stelle mag von seinem Bildungsgange und der Entwicklung seiner Studien das Nötige gesagt sein. In der südlichen Hafen- und Handelsstadt Irlands Cork, dem Wohnsitze seiner Eltern, verlebte er seine Jugend und empfing in der berühmten Schule von Hamblin-Porter eine sehr tüchtige Vorbildung, mit welcher er sehr

jung (1833) in das Trinity College eintrat. Hier standen auch die mathematischen Studien in vorzüglicher Pflege; nicht allein durch den Inhaber des mathematischen Lehrstuhles J. Mac-Cullagh, das Haupt einer irischen geometrischen Schule, in der sich Salmons außerordentliche Begabung rasch bemerkbar machte, sondern auch durch den Astronomen W. R. Hamilton, den Schöpfer der Quaternionentheorie und Entdecker neuer mechanischer Prinzipien, und durch den trefflichen Physiker H. Lloyd. G. Salmon erwarb 1837 und 1838 seine Grade in Klassik und Mathematik und erhielt 1841, nach Ablegung der Prüfung für Fellowship (aus Logik, Mathematik, Physik, Ethik, Geschichte, Chronologie, Griechisch, Lateinisch, Hebräisch — ein Fellow sollte ein „all round man“ sein!) die Stelle, in welcher er zunächst Mathematik lehrte. Schon 1842 veröffentlichte er, Mac Cullaghs Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades ergänzend, die nach ihm benannte neue; aber von 1844 ab lehrte er auch als Assistent des Regius Professors in Theologicis, ward ordiniert, Priester und Diakon, und arbeitete in Wort und Schrift für seine Kirche. Aus seinem analytisch-geometrischen Unterricht entstand um die Jahreswende zu 1848 als ein Textbuch „A Treatise on Conic Sections“; aber er hat auch über den Infinitesimal-Calcul und über theoretische Dynamik mit Beispielen zum Gebrauch ihrer Differentialgleichungen gelesen. Die Wirkung des Kegelschnitt-Buches auf die sonst auch in der Mathematik lokalpatriotischen Studenten in Cambridge zeichnet die dort entstandene Geschichte von einem Mann, der auf eine wüste Insel verbannt nur drei Bücher soll mitnehmen dürfen. Welche wird er wählen? Antwort: die Bibel, Shakespeare und Salmons Conics.

Es geht hier nicht an, Salmons mathematische Entdeckungen allseitig zu besprechen, und ich kann glücklicherweise dafür auf die vortreffliche Würdigung Salmons als Mathematiker verweisen, welche Professor M. Nöther in Band 61 der „Mathem. Annalen“ S. 1—19 gegeben hat. Ich will nur kurz das algebraisch-geometrische Hauptproblem erläutern, das er sich früh stellte und dessen Lösung ihm unter den schöpferischen Vertretern der Mathematik seiner Zeit für immer eine ehrenvolle Stelle sichert. Es ist das Problem der Reziprokalflächen, d. h. die Beantwortung der Frage, wie es — natürlich durch den Einfluß der Singularitäten der Fläche — geschieht, daß die Reziproke von der Reziproken einer algebraischen Fläche mit dieser selbst von gleicher Ordnung wird.

Salmons erste Veröffentlichung darüber ist vom November 1846 datiert, und die völlige Erledigung von 1855. In jener bestimmt er

die Ordnung der Reziprokalfläche als der Anzahl der Tangentialebenen der Originalfläche gleich, die durch eine Gerade gehen; in dieser untersucht er den Tangentialkegel der Originalfläche und bestimmt aus seiner Ordnung und den Anzahlen seiner Doppel- und Rückkehranten seine Klasse, d. h. zugleich die Ordnung des Querschnittes der Reziprokalfläche. Hat die Fläche eine Doppelkurve und eventuell eine Rückkehrkurve, so zählt ihr projizierender Kegel an demselben Punkte zweifach bezüglich dreifach als dem Tangentenkegel zugehörig; hat die Originalfläche solche Kurven nicht, so wird doch die reziproke solche enthalten, weil der Punktreihe einer Doppelkurve in ihr eine bei jeder Originalfläche höheren Grades zu erwartende Reihe von zweimal berührenden Ebenen entspricht und demgemäß eine Kurve der zugehörigen Paare von Berührungspunkten in der Fläche; und einer Rückkehrkurve dort eine Reihe von stationären Berührungsebenen mit dem Ort ihrer Berührungspunkte hier, der in allen Flächen von höherer Ordnung auftretenden Hesseschen oder parabolischen Kurve. Neben den singulären Punkten und Tangentialebenen fordern aber die singulären Tangenten der Fläche genaueste Untersuchung; zu dem Studium der zweipunktigen und dreipunktigen Tangenten hinzu wird das der vierpunktigen, der drei- und zweipunktigen usw. bis zu den viermal zweipunktigen durch die Aufgabe gefordert; kurz die Erledigung solcher neuen Fragen, wie sie in den §§ 467 bis 490 (3. Aufl. der deutschen Bearbeitung der Raumgeometrie) vorgängig der Theorie der Reziprokalflächen (§§ 491 bis 516) diskutiert sind. Die neuen Begriffe führten zu neuen Eliminationsproblemen und zu neuartigen algebraischen Fragen, als deren wichtigste die Bestimmung von Ordnung und Gewicht beschränkter Systeme von Gleichungen oder Bedingungen genannt werden mag (a. a. O. §§ 438 bis 455).

Ein glücklicher Umstand kam dem Abschluß des Unternehmens zu Hilfe; es war die Entdeckung der Haupteigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, die im Briefwechsel zwischen Salmon und Cayley im Sommer 1849 gemacht und allseitig durchgebildet veröffentlicht ward: daß die Fläche 27 Gerade enthält, deren jede durch fünf koplanare Paare der übrigen geschnitten wird; so daß sie zu dreien in 45 Ebenen liegen, welche die dreifachen Berührungsebenen der Fläche sind, während die 27 Ebenenbüschel um die Geraden die Gesamtheit ihrer zweifach berührenden Ebenen bilden. Es ist klar, daß mit diesen charakteristischen Eigenschaften entsprechende einfache Eigenschaften der Reziprokalfläche gegeben sind, welche durch die zweite Reziprokalbildung wieder in die originalen zurückgehen müssen; so entsprechen



den 27 Geraden der Originalfläche ebensoviele Doppelgerade der Reziproken, die ihre Doppelkurve bilden, und in jeder fünf dreifache Punkte den dreifachen Tangentialebenen von jener usw. Es ist auch deutlich, wie Salmon die 27 geraden Reihen als die der Fläche dritter Ordnung angehörige Spezialform der Kurve der Punkte mit vierpunktigen Tangenten in der allgemeinen Fläche sofort erkennen mußte; aber es war eine Meisterprobe seines durchdringenden Scharfsinnes, daß er auch sofort zu dem Beweise des allgemeinen Gesetzes durchdrang, diese Kurve werde von einer Fläche  $(11n-24)^{\text{ter}}$  Ordnung aus der originalen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ausgeschnitten.

Die Fläche dritter Ordnung mit allen ihren Spezialformen war damit in den Schatz elementarer Tatsachen für die Theorie der algebraischen Flächen eingereiht und leistete in Salmons Hand wertvolle Dienste bei der Entscheidung schwieriger Punkte der allgemeinen Theorie; er hat die große Aufgabe so vollständig erledigt, daß Cayley nur noch die Formulierung der Tatsache hinzufügen konnte, daß Fläche und Reziprokalfläche vom nämlichen Geschlecht sind.

Salmon hat im Jahre 1860 noch die Invariantentheorie der Fläche dritter Ordnung aus der Pentaedergleichung entwickelt; diese war 1851 von Sylvester gegeben worden, mit dem er damals in Entdeckungen zur algebraischen Formentheorie vielfach verbunden war.

Natürlich beriefen auf Grund so bahnbrechender Arbeiten nächst London (1863) die großen Wissenschaftsakademien des Festlandes George Salmon wetteifernd zur Mitgliedschaft; er klagte nur, daß es in einer Zeit geschehe, wo er von diesem Arbeitsfelde bald Abschied werde nehmen müssen. Ich will dazu hervorheben, daß die Freundschaft mit Cayley für die fortbildende Herausgabe der Salmonschen Bücher nach 1866 sehr wirksam gewesen ist, insbesondere für das längst vergriffene Buch von den höheren Kurven. Zur Weihnacht 1869 berichtete mir Salmon, weil er wußte, daß es mir auch eine Festfreude sein würde, von dem Anerbieten Cayleys, ihm selbst die Hilfe zu gewähren, die er in den Verpflichtungen seines neuen Amtes zur Herausgabe einer neuen Auflage bedürfe, und so ist es geschehen. Cayley hat eine Reihe von Beiträgen zu allen Teilen des Buches geliefert, aber Salmon hat, um der Darstellung die wünschenswerte Einheitlichkeit zu sichern, sie sorglich eingearbeitet, und Cayley hat das Ganze revidiert; das geschah während der Jahre 1870 bis 1872, und im Mai 1873 konnte das neue Werk erscheinen. Kurz nachher erschien auch die deutsche Ausgabe, weil durch die freundliche Mitteilung der Korrekturbogen ihre fast gleichzeitige Herstellung ermöglicht ward. Ebenso hat Cayley dem

Freunde zahlreiche Beiträge zur 3. Auflage der Geometrie von drei Dimensionen von 1874 geboten und alle Korrekturbogen gelesen. Das war edelste Gelehrtenfreundschaft!

Ich darf wohl auch hinweisen auf den Hochsinn der beiden großen wissenschaftlichen Freunde, der sich in ihrem Verhalten zu Steiners Veröffentlichung über die Fläche dritten Grades von 1856 ausprägte: Sie gaben ihm alle verdiente Ehre und stellten nur die Tatsachen fest; seine Wahl zum auswärtigen Mitgliede der Royal Society stand bevor, als er starb.

Die letzte analytisch-geometrische Arbeit Salmons war für seine Raumgeometrie bestimmt; er sandte mir im Januar 1865 die Korrekturabzüge des Kapitels über die Invariantentheorie der Systeme von Flächen zweiten Grades. Sonst hat er 1866 die Herausgabe der hinterlassenen letzten Arbeit seines juristisch-mathematischen Freundes Hargreave über die „Auflösung der algebraischen Gleichungen“ für die Familie besorgt. Sein erbetener Beitrag zu der kurz vorher gegründeten mathematischen Monatsschrift „Messenger“ „von den Perioden der Primzahlreziproken“ war wohl längst bereit; es wird berichtet, daß Salmon bei langen Synodalverhandlungen scheinbar unaufmerksam beständig Ziffern schrieb, zugleich aber auch, daß aus seinem Munde, wenn er danach selbst sprach, die klarste und vollständigste Zusammenfassung des Gehörten kam.

Aber aus dem Jahre 1865 stammt seine interessante Untersuchung über „Geisterklopfen vor 150 Jahren“, die der dritte Band der „Fortnightly Review“ von G. H. Lewes enthält. Hier läßt er aus den vielseitigen und genauen Berichten der Glieder der Wesley-Familie über das Geisterklopfen von 1716 in ihrem Stammhaus Epworthparsonage in der Grafschaft Lincoln dem Leser die Überzeugung aufgehen, daß ein Scherz der jüngsten Tochter des Hauses, die allein keinen Bericht verfaßt hat, der erste Ursprung jener unerklärlichen Störungen gewesen ist. In diesen Vorgängen hat John Wesley, der Vater der Methodisten, ein entschieden Übernatürliches in seinem eigenen Lebenskreise gesehen — ein Mann, der großen Einfluß auf den Gang des religiösen Denkens in England ausgeübt hat. Damit trat Salmon zugleich dem unter seinen Landsleuten um sich greifenden wüsten Geisteraberglauben entgegen. Es war im Vorjahr seiner Regiuszeit, und der Aufsatz ist wie so viele seiner Predigten ein Zeugnis für seine einsichtige Beobachtung der geistigen Strömungen der Zeit und seine geistvolle und geschickte Bekämpfung der verwerflichen unter ihnen.

Es gibt, soviel mir bekannt ist, fünf Sammlungen von Predigten

Salmons, die erste von 1861, die letzte von 1900. Eine Luther-Gedächtnispredigt zum 10. November 1883 wurde separat gedruckt.

Aus der Regiuszeit selbst sind zwei der Vorlesungen, die er seinen Theologen gehalten hat, zur Veröffentlichung gelangt; nämlich 1885 die historische Einführung in das Studium des Neuen Testaments, der er in der 2. Auflage eine Vorlesung über die nicht kanonischen Bücher hinzufügte; und 1888 die Vorlesungen über die Infallibilität der Kirche. Der Erfolg des ersten Werkes in England war und ist ganz so groß wie seinerzeit der der Kegelschnitte; im Januar 1890 erschien die 4. Auflage, die 5. von 1891 wurde stereotypiert wie 1879 die 6. der Kegelschnitte, und zu den folgenden fügte Salmon Noten hinzu, welche je die neuesten Untersuchungen betreffen. Das Werk wurde das bevorzugte Textbuch der englischen Theologen für seinen Gegenstand. Es wird von den Engländern mit Stolz als die entscheidende kritische Zurückweisung der Übergriffe deutscher und holländischer Bibelkritik angesehen — die Theologen von Cambridge nannten es den „Hammer der Germanen“ (*Malleus Germanorum*). Tatsächlich war es Salmon selbst das liebste unter seinen Büchern und repräsentiert wohl allseitig seine reifste Kraft.

Die Vorlesungen über die Infallibilität der Kirche haben nicht die gleiche glänzende Aufnahme gefunden, trotz der Vollständigkeit und Gründlichkeit der ganzen Untersuchung überhaupt, und obschon z. B. die durchgehende Auseinandersetzung mit Newman vom größten Interesse ist, der zuerst Puseyit war und dann Katholik, zuletzt Kardinal wurde. War doch dieser in der Mitte der fünfziger Jahre als erster Rektor der römisch-katholischen Universität Dublin Salmon so nahe gerückt.

Wenn Salmon selbst gesagt hat, daß er sich um die Zurückweisung der päpstlichen Ansprüche so wenig Sorge mache wie um den Baconischen Ursprung der Dichtungen Shakespeares, so denke ich daran, wie kühl die ganze gebildete Welt die Verkündigung der päpstlichen Unfehlbarkeit aufgenommen hat; die Sache war weniger aktuell, als sie schien. Salmons Untersuchung zeigt aus jener Stimmung heraus allen Glanz seines Humors; reizend zu lesen wie eine Novelle sei sie, hat ein Freund gesagt. Und mit Anspielung auf das Gesamtziel des Werkes sagte einer seiner theologischen Schüler von ihm „Du hast uns gelehrt, keinen Menschen für unfehlbar zu halten, auch dich selbst nicht“.

Es gilt von seiner ganzen theologischen Lehrtätigkeit, daß Salmon Männer bilden wollte, die klar sehen gelernt, nicht solche, die nur sähen, was er sah. Er hat deshalb auch keine Schule gebildet, wenn

schon viele ihn ihren Meister nannten; aus seinem Unterricht sind Theologen sehr verschiedener Parteirichtungen hervorgegangen.

Seine theologischen Vorlesungen beruhten auf gründlicher Kenntnis namentlich auch des Historischen; im Band 1 (von 1874) des Jahrbuches „Hermathena“, das sich das Trinity schuf, erscheint Salmon mit Noten zum Chronikon des Hippolytus. Seine außerordentliche Kenntnis vom ganzen Christentum der ersten Jahrhunderte belegt aber besonders seine umfangreiche Mitarbeit an dem großen „Dictionary of Christian Biography“ von Smith und Wace, das in vier mächtigen Bänden (1877 bis 1887) die Literatur, die Dogmatik und das kirchliche Leben während der ersten acht Jahrhunderte der Christenheit behandelt. Über 20 größere Arbeiten und mehr als 150 kleinere Beiträge rühren von Salmon her — er war der hilfreichste Mitarbeiter des Ganzen. Aber ein Freund hat, wenn auch etwas übertreibend, gesagt, daß seine Gelehrsamkeit in diesen Bänden begraben liege.

Noch 1897 und 1898 brachten die Jahreshefte der Hermathena Arbeiten von Salmon über Neues in der Theologie. Nun hoffte man aus dem Nachlaß eine Schrift über das synoptische Problem zu erhalten als eine Frucht der stillen Arbeit seiner letzten zehn Jahre — „das ausgereifte Urteil des Weisesten der modernen Kritiker über die schwierige Frage“.

Doch ich kehre noch einmal in die Zeit Salmons als Regius zurück, indem ich anführe, wie er dem großen Leserkreise der englischen Zeitschrift „Nature“ im September 1883 das Bild seines Freundes Cayley zeichnete, der der Jahresversammlung der „British Association“ präsiidierte — so liebenswürdig wie geschickt (Nr. 725, Vol. 28). Am Schluß erwähnt er des Freundes Vielsprachigkeit in der Form, daß es nicht viele europäische Sprachen gebe, in denen er nicht zu schweigen verstehe.

Dann trat Salmon mit fast 70 Jahren in die letzte Periode seiner Tätigkeit, er ward im März 1888 von der Regierung zum Provost, d. h. zum obersten Leiter und Repräsentanten des Trinity ernannt, als der Mann des allgemeinen Vertrauens, als den sie ihn kannte; und er hat diesem arbeits- und verantwortungsvollen Amte noch fast 16 Jahre bis zu den letzten Tagen seines Lebens vorgestanden. Nun spricht man von ihm unbeschadet seiner ausgezeichneten Vorgänger als von dem großen Provost, in Würdigung seiner hohen Auffassung von öffentlicher Pflicht, seiner echten Humanität und Herzensfreundlichkeit, seiner freien Anerkennung der Leistungen jüngerer Männer — kurz um seiner charaktervollen großen Persönlichkeit willen.

In das fünfte Jahr seiner Leitung (5. Juli 1892) fiel die Dreihundertjahr-Jubelfeier des Trinity, als der protestantischen Universität von Irland. Sie wurde zum imposanten Ausdruck seiner europäischen Reputation, aber in seinen Briefen war nichts von dem Feste zu lesen, nicht nachher und nicht vorher; er schrieb mir aus den Osterferien, die er mit Freund Cathcart in Bagnères de Luchon am Fuße der Maladetta in den Pyrenäen verbrachte — und wieder Anfang September nach einer wohlthätigen dreiwöchigen Badekur in der Nähe von Clermont Ferrand in der Auvergne aus Villars sur Ollon im westlichen Wallis, wo er die Kühle suchte; die Interessen seines Trinity und der Protestanten in Irland, die durch Gladstone gefährdet werden könnten, beschäftigten ihn sorglich — aber er hat sie glücklich durchgesteuert.

Ohne Zweifel war für sein letztes hohes Amt seine außerordentliche Vielseitigkeit wichtig, aber sie ging weit darüber hinaus. Er war ein Meister im Schachspiel und ist darum einst zum Spiel gegen Murphy erwählt worden, soll auch einen Erfolg erreicht haben. Ich habe schon erwähnt, daß er stets viel und vielseitig las, auch viel Unterhaltungsschriften, aber ich will hier noch einige Beispiele dazu geben. Er kannte die Jugendliteratur so gut, daß er zum 39. Band der „Fortnightly Review“ (Anfang 1886) eine interessante Untersuchung über das Thema „What Boys read“ beitragen konnte; er schätzte das Mädchenbuch „Alice in Wonderland“ hoch. Er erfreute sich vor allem am Humor, an dem feinen, wie an dem derben. Er liebte Mrs. Gaskells Novelle „Cranford“, ein Beispiel vom feinen Humor so, daß er sie uns zweimal sendete: die schöne von Thomson hübsch illustrierte Ausgabe von 1891 mit der biographischen Skizze von A. Thackeray-Ritchie sollten wir auch haben. Und vom derben Humor bescherte er uns von 1878 bis 1885 treffsicher zum brennenden Christbaum jeweilen das neueste Paar der „Picture Books“ von Randolph Caldecott, dem trefflichen humorvollen Zeichner, der leider schon 1886 sterben mußte; er suchte mit uns die Freude zu teilen, die er an diesen Bildern englischer Volksfröhlichkeit hatte, von Cowpers Ballade vom John Gilpin, von der Elegie Goldsmiths vom tollen Hund usw., und ohne alle Klassik in den Texten, von dem Haus das Jack baut, von der Milchmaid, der Fuchsjagd, dem großen Schulmeister Panjandrum usf.

Vielleicht hat solche einfach natürliche Vielseitigkeit ihm seine geistige Arbeitskraft und Gesundheit bis in sein hohes Alter erhalten helfen; gewiß erklärt sie mit, wie es geschah, daß ihm so allseitig nicht nur hoher Respekt, sondern Liebe und Verehrung zuteil wurde.

Aber im Kern seines Wesens war seine kindliche Frömmigkeit;

die Sicherheit, die er hatte, daß die Lehre Jesu Christi die höchste Weisheit sei, und daß alle Wahrheit aus der nämlichen Quelle stamme.

Auch ihm ist Schmerz und Leid nicht erspart geblieben, aber er hat sich beschieden, daß er die Geheimnisse der göttlichen Liebe nur noch nicht verstehe. Bei seinem Tode rühmte man seine Mildtätigkeit, die ebenso geheim als reich war.

In der Gedächtniskapelle der Kathedrale von St. Patrick, deren Kanzler er durch 33 Jahre war, ist vor Jahresfrist zu seinem dauern- den Gedächtnis ein von seinen Freunden gestiftetes schönes Medaillon- porträt mit lateinischer Inschrift feierlich enthüllt worden.

In dankbarer Erinnerung am 22. Januar 1907.

**Wilh. Fiedler.**

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Kapitel. Nr. 1—22. 34 Beisp.

### Der Koordinatenbegriff und der Punkt.

	Seite
1. Abszisse eines Punktes einer Geraden . . . . .	1
2. Mit Vorzeichen behaftete Strecken . . . . .	2
3. Parallelkoordinaten. B. . . . .	3
4. Messung der Winkel . . . . .	5
5. Koordinatenausdruck der Entfernung zweier Punkte. B. 1—6 . . . . .	7
6. Winkel zweier Radienvektoren . . . . .	9
7. Flächeninhalt eines Dreiecks oder Vielecks. B. 1—3 . . . . .	10
8. Determinanten . . . . .	13
9. Projektion eines Linienzuges . . . . .	23
10. Transformation der Parallelkoordinaten. Paralleltransformation. B. . . . .	23
11. Allgemeine Transformation. B. 1—2 . . . . .	25
12. Besondere Fälle. B. 1—3 . . . . .	26
*13. Andere Deutung der Formeln für die Transformation der Koordinaten. Ähnlichkeitstransformation . . . . .	28
14. Teilverhältnis eines Punktes in einer Strecke. B. 1—8. . . . .	29
15. Harmonische Teilung einer Strecke. B. 1—2 . . . . .	32
16. Gleichung des Punktepaars. . . . .	34
17. Involution. B. 1—2 . . . . .	35
18. Arten der Involution (hyperbolisch, elliptisch, parabolisch). . . . .	39
19. Imaginäre Punkte . . . . .	41
*20. Darstellung imaginärer Punkte aus ihren Koordinaten. B. 1—4 . . . . .	42
21. Polarkoordinaten . . . . .	44
22. Zusammenhang zwischen den Parallelkoordinaten eines Punktes und seinen Polarkoordinaten. B. 1—2 . . . . .	45

## II. Kapitel. Nr. 23—47. 54 Beisp.

### Der Gleichungsbegriff und die Gerade.

23. Geometrische Bedeutung der Gleichungen zwischen den Koordinaten . . . . .	47
24. Gleichung einer Kurve. Reelle Punkte und konjugiert imaginäre Punktepaare der Kurve. Felder und Vorzeichen der Funktionswerte. B. 1—3 . . . . .	48

\*13 u. weiter. Ein Stern vor einer Nummer zeigt an, daß man beim ersten Studium ihren Inhalt überschlagen darf.

25. Gleichungen desselben Ortes und Orte derselben Gleichung. B. 1—3 . . . . .	51
26. Begriff der analytischen Geometrie . . . . .	53
27. Ordnung algebraischer Kurven, durch Transformation nicht geändert . . . . .	54
28. Das Theorem von Bézout. B. 1—4 . . . . .	56
29. Gleichungen besonderer Geraden. . . . .	58
30. Sinusteilverhältnis im Strahlenbüschel; harmonische Paare .	59
31. Die Gerade aus Richtung und Achsenschnitt . . . . .	60
32. Die Gerade der allgemeinen Gleichung; parallele Geraden .	61
33. Die Gerade aus den Achsenabschnitten. B. 1—2 . . . . .	62
34. Normalform der Gleichung der Geraden . . . . .	63
35. Reduktion der allgemeinen linearen Gleichung auf die Nor- malform. Winkel des Lotes der Geraden mit den Achsen, ihr Abstand vom Nullpunkt . . . . .	64
36. Winkel zweier Geraden. Parallelismus und Rechtwinkligkeit	65
37. Schnittpunkt zweier Geraden; drei Geraden durch einen Punkt. B. 1—5 . . . . .	67
38. Bestimmung der Geraden durch zwei Bedingungen . . . .	69
39. Gerade durch ihre Richtung und einen ihrer Punkte gegeben .	70
40. Verbindungsgerade zweier Punkte; drei Punkte in einer Geraden. B. 1—9 . . . . .	70
41. Normalen einer Geraden. B. 1—9. Dreieckshöhen, Lote in den Seitenmitten . . . . .	73
42. Abstand eines Punktes von einer Geraden. B. 1—5 . . . .	75
43. Winkelhalbierungslinien. B. 1—2 . . . . .	77
44. Gleichungsform der Geraden durch den Schnittpunkt von zwei andern. B. 1—3. . . . .	79
45. Drei Strahlen eines Büschels (vgl. Nr. 37). Bd. 1—4. Im Dreieck, Mittellinien der Seiten, Höhen, Mittellote der Seiten, Schwerlinien . . . . .	80
46. Imaginäre Geraden und ihre Darstellung . . . . .	82
47. Polargleichung der Geraden. B. 1—5 . . . . .	84

### III. Kapitel. Nr. 48—63. 67 Beisp.

#### Aufgaben über Geraden und Geradenpaare.

48. Lineare geometrische Orte bei besonderer Achsenwahl. B. 1—11 . . . . .	86
49. Hilfsmittel zur Bildung der Ortsgleichung. B. 1—3. Beweg- liche Dreiecke . . . . .	89
50. Ableitung der Ortsgleichung durch Elimination eingeführter Parameter. B. 1—8 . . . . .	92
51. Geometrische Orte höheren Grades. B. 1—18 . . . . .	96



	Seite
52. Probleme über Strahlen durch einen festen Punkt. B. 1—4. Zentrum der mittleren Entfernungen oder Schwerpunkt .	98
53. Gleichungen ersten Grades, deren Konstanten durch eine lineare Beziehung verbunden sind, stellen Strahlen aus einem Punkte dar . . . . .	101
54. Teilverhältnis eines Ortes in einer Geraden. B. 1—2. Die Teilverhältnisse einer Geraden und die der Eckenverbindungsgeraden eines Punktes in den Seiten des Dreiecks .	102
55. Polarkoordinaten. B. 1—8. Die Gerade der harmonischen Mittel für einen Punkt und feste Geraden . . . . .	103
56. Geometrische Bedeutung homogener Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. B. 1—6 . . . . .	107
57. Gleichungen von Geraden; Diskriminante; konjugiert imaginäre Gerade . . . . .	108
58. Winkel des Geradenpaares. B. . . . .	109
59. Das Paar der Winkelhalbierenden ist stets reell; Rechtwinkelpaare als Halbierende eines gewissen imaginären Geradenpaares . . . . .	110
60. Harmonische Geradenpaare. Ihre Schnitte mit einer Geraden sind harmonische Punktepaare . . . . .	111
*61. Strahlen absoluter Richtung und Orthogonalität; Geraden ohne Länge (Minimalgeraden) . . . . .	112
62. Das Zerfallen der quadratischen Gleichungen. B. 1—4. . .	114
63. Zweite Ableitung der Diskriminante. B. 1—2 . . . . .	116

#### IV. Kapitel. Nr. 64—82. 31 Beisp.

##### **Symbolische Gleichungen und duale homogene Koordinaten.**

64. Gleichungssymbolik. Kurven $n^{\text{ter}}$ Ordnung durch die gemeinsamen Punkte von zwei solchen; Parameter . . . . .	119
65. Der Parameter im Strahlenbüschel. B. 1—8. Winkelhalbierende, Höhen, Schwerlinien im Dreieck, Gerade der Diagonalmitten im Viereck, Dreiecke mit Normalenbüscheln aus den Ecken des einen auf die Seiten des andern. Symmetrische zu den Winkelhalbierenden für die Ecktransversalen aus einem Punkte . . . . .	120
66. Das vollständige Viereck. Linealkonstruktion des vierten harmonischen zu drei gegebenen Punkten . . . . .	123
67. Beziehung der Geraden auf drei feste Geraden. B. 1—4. Harmonikale; harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits, perspektive Dreiecke . . . . .	124
*68. Orthogonalität und Parallelismus von Geraden. Entfernung von Punkt und Gerade. B. 1—6 . . . . .	129
*69. Homogene Normalkoordinaten des Punktes . . . . .	131
*70. Lineare Fundamentrelation zwischen denselben . . . . .	132

*71. Homogenität der Gleichungen. Die unendlich ferne Gerade der Ebene. B. 1—4 . . . . .	134
*72. Verbindungsgerade zweier Punkte, Koordinaten des Punktes . . . . .	136
*73. Konstruktion des Punktes aus seinen Koordinaten. Harmonikale; merkwürdige Punkte des Dreiecks. B. 1—3. Verbindungsgeraden der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. . .	136
*74. Entfernung zweier Punkte in Normalkoordinaten. B. . . .	138
*75. Gleichung der unendlich fernen Geraden . . . . .	140
*76. Parallelkoordinaten als Sonderfall . . . . .	141
*77. Erweiterung des Koordinatenbegriffs; Koordinaten der Geraden, Winkel . . . . .	142
78. Plückersche Linienkoordinaten. Gleichung des Punktes. B. 1—2. Transformation . . . . .	143
79. Gleichungen von Hüllkurven oder Enveloppen, Kurven $n^{\text{ter}}$ Klasse. Absolute Richtungen . . . . .	146
80. Der Parameter in der Punktreihe. Trimetrische Linienkoordinaten. B. 1—3. Ihre identische Beziehung zu den Maßen des Fundamentaldreiecks . . . . .	148
*81. Trimetrische Punkt- und Linienkoordinaten in analoger Entwicklung . . . . .	151
82. Das Prinzip der Dualität; projektive und metrische Eigenschaften . . . . .	154

## V. Kapitel. Nr. 83—95. 6 Beisp.

### Von der Projektivität und den kollinearen Gebilden.

83. Das Doppelverhältnis von vier Elementen; seine sechs Werte	156
84. Das Doppelverhältnis der Schnittpunkte einer Geraden mit vier festen Strahlen eines Büschels ist unabhängig von ihrer Lage gleich dem des Büschels . . . . .	160
85. Das Doppelverhältnis aus den Parametern der Elemente . .	162
86. Perspektive und projektive Büschel und Reihen, durch drei entsprechende Paare bestimmt . . . . .	164
87. Projektive Koordinaten des Punktes und der Geraden; Bedingung des Ineinanderliegens; Gleichung der Geraden und des Punktes . . . . .	167
88. Spezialisierungen des Fundamentalsystems. Streifenkoordinaten. B. 1—3. Perspektive Dreiecke und Doppelverhältnis	171
89. Bezeichnungsprinzipien bei homogenen Veränderlichen . .	174
90. Produkt zweier Determinanten und zweier Matrizes. Determinantenform früherer Ergebnisse. B. 1—3. Dreiecksfläche aus den Gleichungen der Seiten; Diskriminante der Gleichung zweiten Grades, Bedingung für vier Tangenten eines Kreises . . . . .	176

91. Lineare Substitutionen; Modul; Begriff der Invariante; inverse Substitutionen und Kontragredienz der $u_i$ und $x_i$ . . . . .	182
92. Kollineare Verwandtschaft: Entsprechende Büschel und Reihen sind projektiv . . . . .	184
93. Parametergleichung der Projektivität in Elementargebilden erster Stufe. Ähnlichkeit in Reihen, entsprechendes Paar rechter Winkel in Büscheln. Kongruente und symmetrisch gleiche Büschel . . . . .	186
94. Involution bei gewissen projektiv vereinigten Reihen oder Büscheln . . . . .	190
95. Achsen der Involution. Rechtwinklige und symmetrische Involution . . . . .	191

## VI. Kapitel. Nr. 96—113. 55. Beisp.

### Der Kreis.

96. Gleichung zweiten Grades in Parallelkoordinaten . . . . .	193
97. Gleichung des Kreises, Bedingungen für die allgemeine Gleichung. B. 1—2. Schwerpunkt als Kreismittelpunkt . .	194
98. Normalform der Kreisgleichung. Reelle, imaginäre und Nullkreise. Zeichen des Ergebnisses der Substitution von Koordinaten eines Punktes . . . . .	196
99. Kreis durch drei Punkte. B. 1—4. Beziehung zwischen den gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten eines Kreises	197
100. Lineare Erzeugung eines Kreises. Konstanz des Peripheriewinkels. B. 1—5 . . . . .	199
101. Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden. Berührung. Der Radius ist Normale. B. 1—7. Sehnen, die gewissen Bedingungen genügen . . . . .	202
102. Kreise aus ihren Achsenabschnitten; jeder reelle Kreis bestimmt mit jeder reellen Geraden ein Punktepaar. B. 1—3 . .	205
*103. Imaginäre Kreispunkte im Unendlichen; Kreisasymptoten	206
104. Gleichung einer Kreistangente. B. 1—3 . . . . .	208
*105. Tangentialgleichung des Kreises . . . . .	209
106. Tangentenpaare des Kreises; Quadrat der Tangentenlänge	210
107. Parameterdarstellung der Punkte des Kreises; Gleichungen von Sehne und Tangente. B. 1—5. Sehnen von konstanter Länge; Kreis als Hüllkurve einer gewissen Geraden . . .	211
108. Polargleichung des Kreises; einer Tangente. B. 1—7. Die Mitten der durch zwei Kreise begrenzten Sehnen durch einen ihrer Schnittpunkte liegen auf einem Kreis; die Kreise über drei Sehnen eines Kreises aus einem Punkt als Durchmesser schneiden sich in drei Punkten einer Geraden; Peaucelliersche Geradführung . . . . .	213

109. Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis für äußere, für innere Punkte. Der Potenzkreis. B. 1—2. Kreise durch zwei Punkte an eine Gerade . . . . .	216
110. Pol, harmonische Pole und Polaren. B. 1—4 . . . . .	218
111. Polare als Verbindungssehne der Berührungspunkte des Tangentenpaares aus dem Pol, insbesondere als Tangente des Pols auf dem Kreise. B. 1—4. Winkel der Tangentenpaare, Ort der Schnitte rechtwinkliger Paare . . . . .	220
112. Polarkonjugierte Reihen und Büschel. B. 1—5. Polaren harmonischer Punkte sind harmonische Strahlen . . . . .	222
113. Polarkonjugierte Dreiecke, insbesondere sich selbst konjugierte oder Polardreiecke für reelle und für imaginäre Kreise. B. 1—4 . . . . .	224

## VII. Kapitel. Nr. 114—128. 35 Beisp.

## Systeme von Kreisen.

114. Potenzlinie zweier Kreise oder Radikalachse . . . . .	227
115. Schnittpunkte zweier Kreise; besonders zweier Nullkreise (assoziiert zwei konjugiert imaginären). B. 1—5. Potenzlinien reeller und imaginärer Kreise, einschließlich Nullkreise. . .	228
116. Potenzmittelpunkt dreier Kreise. B. . . . .	230
117. Gemeinsame Tangenten zweier Kreise. B. 1—3. Ihre Mitten; Kreise durch ihre Berührungspunkte . . . . .	231
118. Ähnlichkeitszentra zweier Kreise. Längen der gemeinsamen Tangenten. B. 1—2 . . . . .	234
119. Gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise in bezug auf ein Ähnlichkeitszentrum . . . . .	235
120. Das Kreisbüschel und seine Potenzlinie . . . . .	238
121. Schnittwinkel zweier Kreise. Orthogonale Kreisbüschel. Grundpunkte und Grenzpunkte. B. 1—6 . . . . .	240
122. Das Kreisnetz und sein Orthogonalkreis; vier Ähnlichkeitsachsen von drei Kreisen. B. 1—8. Das Netz aus drei Kreisen. Bedingung, daß vier Kreise einem Netz angehören . . . .	244
123. Berührungskreise zu drei Kreisen (Problem des Apollonius)	248
124. Kreise, die drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneiden. B. 1—2 . . . . .	251
125. Inversion oder Transformation durch reziproke Radien; Inversor von Peaucellier . . . . .	257
*126. Die Inverse eines Kreises ist ein Kreis oder eine Gerade. Inverse Büschel . . . . .	259
*127. Isogonalität. B. 1—3. Jedes Büschel ohne reelle Grundpunkte ist zu einem Büschel konzentrischer Kreise invers	260

*128. Distanz-, Tangenten- und Winkelbeziehungen. Ptolemäischer Satz als Sonderfall. B. 1—5. Distanzrelation zwischen vier Punkten der Ebene und Beziehung zwischen den Schnittwinkeln von vier Kreisen; zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten von fünf Kreisen . . . . .	262
---	-----

## VIII. Kapitel. Nr. 129—151. 18 Beisp.

### Haupteigenschaften der Kurven zweiten Grades.

129. Zahl der Bedingungen zur Bestimmung eines Kegelschnittes	267
130. Schnittpunkte mit einer Geraden. Polargleichung des Kegelschnittes. Asymptotenrichtungen . . . . .	268
131. Gattungen von Kegelschnitten: Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln	270
132. Schnittpunkt einer Kurve zweiter Ordnung mit der Verbindungslinie zweier Punkte; Realität der Schnittpunkte . .	271
133. Doppelverhältnis zweier Punkte und der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit ihrer Verbindungslinie . . . . .	274
134. Pol und Polare in bezug auf den Kegelschnitt; Tangente als Sonderfall. B. 1—3 . . . . .	275
135. Polare als Berührungssehne eines Tangentenpaares. Konjugierte oder harmonische Pole. Konstruktion der Polare . .	277
136. Polardreiecke des Kegelschnittes; als Diagonaldreiecke eingeschriebener Vierecke bzw. umgeschriebener Vierseite . .	279
137. Linienkoordinaten der Polare; der besondere Fall, daß der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt. B. . . . .	281
138. Bedingung für Geradenpaar bzw. Doppelgerade . . . . .	283
139. Konjugierte Durchmesser und Mittelpunkt. Konstruktion des Mittelpunktes, seine Koordinaten. Verschiedene Fälle, die bei der Lage des Mittelpunktes vorkommen können. B. 1—2 . .	285
140. Kegelschnitte mit einem im Endlichen gelegenen Mittelpunkt. Transformation auf den Mittelpunkt. Besonderer Fall des Parallelenpaares . . . . .	288
141. Gleichung des zu einer Richtung konjugierten Durchmessers. Transformation auf die Achsen . . . . .	290
142. Bedingung für Ellipse, Hyperbel, reelles oder imaginäres Geradenpaar, Parallelenpaar oder Doppelgerade . . . . .	293
143. Bedingung für Parabel, Parallelenpaar oder Doppelgerade . .	295
144. Tabelle für die Kriterien der Kurven zweiter Ordnung. B. 1—7	298
145. Gleichungen der Paare konjugierter Durchmesser. B. . . .	300
146. Gleichung des Achsenpaares. B. . . . .	301
147. Tangentenpaar aus einem Punkt an einen Kegelschnitt; Äußeres und Inneres der Kurve. Gleichung bezogen auf Tangentenpaar und Berührungssehne . . . . .	302

148. Gleichung des Asymptotenpaares. Involution der Asymptoten und der Paare konjugierter Durchmesser. B. 1—2 . . . . .	304
149. Tangentialgleichung der Kurven zweiten Grades. B. . . . .	306
150. Sekanten eines Kegelschnittes . . . . .	308
151. Rechtecke aus Segmenten in Sehnen. . . . .	309

## IX. Kapitel. Nr. 152—175. 53 Beisp.

**Die Mittelpunktseigenschaften von Ellipse und Hyperbel.**

152. Die Konstanten der Transformation bei rechtwinkligen Koordinaten. B. 1—2 . . . . .	311
153. Transformation zur Achsengleichung bei einer auf schiefwinklige Koordinaten bezogenen Mittelpunkts- gleichung. B. 1—2 . . . . .	313
*154. Die Konstanten der allgemeinen Transformation . . . . .	314
155. Normalgleichungen der Kegelschnitte mit Mittelpunkt im Endlichen . . . . .	315
156. Normale Polargleichungen von Ellipse und Hyperbel . . . . .	317
157. Die Gestalt der Ellipse . . . . .	318
158. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen . . . . .	319
159. Die Parametergleichungen der Ellipse . . . . .	320
160. Der Ellipsenzirkel . . . . .	320
161. Die Gestalt der Hyperbel . . . . .	321
162. Konjugierte Hyperbeln. Von der Ellipse zur Hyperbel . . . . .	322
163. Die Asymptoten der Hyperbel; Durchmesserparallelogramme . . . . .	324
164. Die Asymptotengleichung der Hyperbel . . . . .	325
165. Die gleichseitige Hyperbel und ihr Zusammenhang mit dem Kreis. B. 1—4. Gleichseitige Hyperbeln durch drei Punkte; der umgeschriebene Kreis eines Polardreiecks geht durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel . . . . .	326
166. Parametergleichungen und Konstruktion der Hyperbel . . . . .	328
167. Polaren und Tangenten. Entfernung der Polare eines Punktes vom Mittelpunkt. Von der Polare zum Pol, Tangentialgleichung der Ellipse und Hyperbel. B. 1—6. Normalform der Gleichung der Tangente; das Tangentenpaar aus einem Punkte, sein Winkel; Pol und Polare in konjugierten Kegelschnitten; Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten (Hauptkreis) . . . . .	329
168. Gleichungen konjugierter Durchmesser; elliptische und hyperbolische Involution der konjugierten Durchmesser, die Asymptoten als ihre Doppelstrahlen, die Achsen als ihr Rechtwinkelpaar . . . . .	331
169. Konstruktion konjugierter Durchmesser. B. 1—8. Parametermethode, Sehne der Ellipsenpunkte $\alpha$ , $\beta$ , ihr Pol und ihre Länge; die Fläche des eingeschriebenen Dreiecks und sein umgeschriebener Kreis, Fläche des umgeschriebenen Dreiecks . . . . .	333

170. Winkel und Längen konjugierter Durchmesser und ihre Beziehungen. B. 1—4. Konstante Quadratsumme der Reziproken rechtwinkliger Durchmesser, Abstand des Mittelpunktes von der Tangente; die Achsen aus zwei konjugierten Durchmessern, Achsenlängen und Exzentrizität aus der allgemeinen Gleichung . . . . .	335
171. Die Konstruktion der Achsen aus konjugierten Durchmessern. B. 1—5. Zwei parallele Tangenten und eine bewegliche; gleiche Dreiecke aus zwei Halbmessern mit ihren Tangenten	337
172. Supplementarsehnen und konjugierte Durchmesser von vorgeschriebenem Winkel; zwei symmetrische Paare in der Hyperbel; Grenzwert des Winkels in der Ellipse . . . . .	339
173. Die auf gleiche konjugierte Durchmesser bezogene Ellipsengleichung; Ellipse aus dem Kreis. B. 1—2. Die Halbachsen aus den gleichen konjugierten Durchmessern und ihrem Winkel; Gleichung des Paares konjugierter Durchmesser mit gegebenem Winkel . . . . .	340
174. Eigenschaften der Hyperbel bezüglich der Asymptoten: Tangenten zwischen den Asymptoten gleich dem parallelen Halbmesser; ihr Dreieck; die Abschnitte in einer Sekante. B. 1—3. Die Geraden aus zwei festen Punkten der Hyperbel nach einem beweglichen fassen konstante Strecken in den Asymptoten; Schnitt der Tangenten in zwei Punkten . . .	342
175. Beispiele von Orten zweiten Grades. 1—17. Ellipsen; Mittelpunktssorte von Kreisen aus Berührungs- und Schnittbedingungen; bewegliche Dreiecke; Pole der Tangenten eines Kegelschnittes in bezug auf einen andern; Ort des Schnittes der Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser; Teilung eines Kreisbogens in drei gleiche Teile; Ellipse aus einem konzentrischen Kreis . . . . .	344

### X. Kapitel. Nr. 176—196. 63 Beisp.

#### Die Fokaleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

176. Die Normale der Mittelpunktskegelschnitte, das Produkt ihrer Länge in den Abstand der Tangente vom Mittelpunkt. . . .	347
177. Subnormale und Subtangente; Normalenlängen vom Fußpunkt zu den Achsen, ihr Produkt und ihr Verhältnis. B. 1—4. Konstantes Rechteck aus der Normale und dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt; die Normalenlänge ] aus ihrem Neigungswinkel. Neue Konstruktion der Achsen aus zwei konjugierten Durchmessern . . . . .	348
178. Die vier Normalen aus einem gegebenen Punkt und das Ergebnis der Substitution seiner Koordinaten in die Normal-	

gleichung des Kegelschnittes. B. 1—5. Bedingungsgleichung zwischen den Koordinaten einer Normale; Koordinaten des Tangenten- und Normalenschnittes von zwei Punkten; rechtwinklige Normalen; die biquadratische Gleichung zwischen den Abszissen der Fußpunkte der vier Normalen aus einem Punkte . . . . .	350
179. Die reellen und die imaginären Brennpunkte . . . . .	353
180. Die Leitlinie (Direktrix) als Polare des Brennpunktes; harmonische Polaren aus dem Brennpunkt sind rechtwinklig	354
*181. Allgemeine Definition der Brennpunkte als Schnitte der Tangenten von absoluter Richtung. Die Paare der Brennpunkte sind assoziiert . . . . .	355
182. Brennstrahlen. B. Ihr Produkt für die Fußpunkte der vier Normalen aus einem Punkt . . . . .	356
183. Definition des Kegelschnittes aus Brennpunkt und Leitlinie. Exzentrizität. B. 1—2 . . . . .	357
184. Die Fokalgleichung des Kegelschnittes. B. 1—5. Abschnitte einer Fokalsehne, harmonisches Mittel und Produkt; Fokalsehne und Hauptachse; Summe der zu konjugierten Durchmessern parallelen Fokalsehnen, Summe der Reziproken rechtwinkliger Fokalsehnen . . . . .	358
185. Die Summe bez. Differenz der Brennstrahlen eines Punktes; ihr Produkt und sein Verhältnis zum Quadrat der Normale	360
186. Fadenkonstruktion der Ellipse und Hyperbel . . . . .	361
187. Der Winkel der Brennstrahlen eines Punktes. B. 1—3. Winkel der Normale mit Brennstrahl und Hauptachse; Projektion der Normale auf den Brennstrahl; die Tangentenquadrate der halben Winkel der Brennstrahlen für die Endpunkte konjugierter Durchmesser haben konstante Summe .	362
188. Produkt der Brennpunktsabstände einer Tangente; zwei Tangenten eines Kegelschnittes und die Brennstrahlen ihres Schnittpunktes haben dieselben Winkelhalbierenden. B. 1—5. Zur Analogie zwischen Polare und Tangente in Erweiterung der Sätze des Textes . . . . .	364
189. Der Scheitelkreis als Fußpunktcurve des Brennpunktes. B. 1—9. Entfernung der Tangente vom Mittelpunkt in der Richtung eines Brennstrahles; die Abschnitte der Brennweite durch die Normale sind den Brennstrahlen proportional; Polargleichung des Scheitelkreises; Ort der Symmetrischen eines Brennpunktes in bezug auf die Tangenten; die Entfernungen einer Tangente von den Stellvertretern der imaginären Brennpunkte. Leitlinie durch den Schnitt eines Halbmessers mit der Brennpunktsnormale der Tangente im Endpunkt; Ortskreise . . . . .	365



190. Der durch eine Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel. B. 1—3. Konstanter Winkel einer bewegten Tangente zwischen zwei festen am Brennpunkt; der Kreis über der Strecke einer Tangente zwischen den Hauptscheiteltangenten enthält die Brennpunkte. Die Strahlen von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes nach einem beweglichen bestimmen auf der Leitlinie Abschnitte, die vom Brennpunkt unter konstantem Winkel erscheinen . . . . . 367
191. Der Abstand der Brennpunkte von den Asymptoten ist die halbe Nebenachse; der Brennstrahl ist der in der Asymptotenrichtung gemessenen Entfernung von der Leitlinie gleich; Konstruktion der Hyperbel. . . . . 368
192. Die Scheitelgleichung der Kegelschnitte . . . . . 369
193. Die auf die Tangente und die Normale bezogene Gleichung. B. 1—2. Die Hypotenusen der eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke von gegebener Gegenecke gehen durch einen festen Punkt der Normale (Satz von Frégier); besondere Fälle des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel; Erweiterung. Kegelschnittorte aus Tangentenpaaren, die auf einer festen Tangente eine konstante Strecke fassen usw. . . . . 370
194. Beispiele zu den Fokaleigenschaften. B. 1—20. Brennstrahl und Ordinate; Ort der Fußpunkte der Gleichgeneigten vom Brennpunkt zu den Tangenten; die Normale. Fokalpolargleichung einer Sehne, einer Tangente. Für die Sehnen  $P_1P_2$  durch einen Punkt  $O$  ist  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} P_1FO \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_2FO$  konstant. Der Schnitt der Normalen in den Endpunkten einer Fokalsehne und die Sehnenmitte liegen in einer Parallelen zur Hauptachse. Für eine Fokalsehne geht die Gerade vom Schnittpunkt der Tangenten nach dem der Normalen durch den andern Brennpunkt; bei ihrer Drehung durchläuft der Normalenschnitt einen Kegelschnitt. Der Winkel zwischen den Ellipsentangenten aus einem Punkt; ihre Längen, die der parallelen Halbmesser und die Brennstrahlen des Punktes. Die Brennstrahlenabschnitte eines beliebigen Punktes haben gleiche Differenz ihrer Reziproken. Dreiecksfläche aus drei Normalen. Orte des Schnittes von Brennstrahl und Radius des Hauptscheitelberührungskreises und der Normale mit dem Radius desselben. Orthogonale Normalen. Der zu einer von einem Scheitel ausgehenden Ellipsensehne parallele Radius trifft die Tangente in ihrem Ende in der Tangente am andern Scheitel usw. 371
- \*195. Die Kegelschnitte als Mittelpunktsorte von Kreisen, die zwei feste Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden bez. gleich- oder ungleichartig berühren; ihre Paare im allgemeinen und in besonderen Fällen . . . . . 376

- \*196. Die Fokalgleichung in Linienkoordinaten. B. 1—4. Der Kegelschnitt aus Geraden, deren Abstände von zwei festen Punkten konstantes Produkt haben. Die Brennpunkte aus der allgemeinen Gleichung. Der Kegelschnitt aus dem zweiten Schenkel eines rechten Winkels, dessen erster Schenkel durch einen festen Punkt geht, während der Scheitel einen Kreis beschreibt; aus der Sehne eines konstanten sich um seinen Scheitel drehenden Winkels zwischen zwei festen Geraden. . . . . 378

## XI. Kapitel. Nr. 197—213. 22 Beisp.

### Die Parabel.

197. Die Durchmesserleichung der Parabel . . . . . 382
198. Die Scheitelgleichung; Gleichungen der Achse und der Scheiteltangente. Berechnung des Hauptparameters. B. 1—2 383
199. Transformation zur Scheitelgleichung bei ursprünglich schiefwinkligen Koordinaten. Parameterbestimmung. B. . . . . 385
200. Gestalt der Parabel . . . . . 385
201. Kontinuierliche Gestaltsänderung der Kegelschnitte . . . . 386
202. Die Tangente der Parabel . . . . . 387
203. Zusammenhang der Linearparameter . . . . . 388
204. Pol und Polare; Tangentialgleichung. B. 1—4. Schnitt und Winkel zweier Tangenten; das umgeschriebene Dreieck ist die Hälfte des zugehörigen eingeschriebenen Dreiecks. Parameterausdruck der Parabel . . . . . 389
205. Die Normale und die Subnormale. Drei Normalen durch einen Punkt . . . . . 390
206. Der Brennpunkt; die imaginären Brennpunkte liegen in den absoluten Richtungen. . . . . 391
207. Die Fokalgleichung; der Parameter eines Durchmessers ist doppelt so groß wie der Brennstrahl seines Endpunktes . . 392
208. Die Leitlinie (Direktrix); gleiche Abstände eines Kurvenpunktes von Brennpunkt und Leitlinie . . . . . 392
209. Der Winkel von Tangente und Brennstrahl. . . . . 393
210. Der Fokalabstand der Tangente ist die halbe Normale. Die Scheiteltangente als Fußpunktlinie. B. 1—2 . . . . . 393
211. Der Winkel zweier Tangenten; rechtwinklige Tangenten schneiden sich in der Leitlinie. . . . . 394
212. Der Brennstrahl des Schnittes zweier Tangenten halbiert den Winkel der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte; besondere Fälle. Der umgeschriebene Kreis eines Tangentendreiseits geht durch den Brennpunkt. B. . . . . 395
213. Beispiele. 1—12. Der Höhenschnitt eines Tangentendreiseits liegt in der Leitlinie. Eingeschriebenes Viereck und paralleles

umgeschriebenes Vierseit. Der umgeschriebene Kreis eines eingeschriebenen Dreiecks, eines Tangentendreiseits. Ort der Schnittpunkte der Tangentenpaare mit gegebenem Winkel. Die Fußpunkte der Lote vom Brennpunkt auf die Normalen bilden eine Parabel. Drei Normalen durch einen Punkt; Ort der Normalenschnitte in den Enden der Sehnen durch einen Punkt; der Schnitt rechtwinkliger Normalen. Von den Längen und dem Winkel zweier Tangenten zum Parameter. Vier Orte von Tangentenschnitten . . . . .	396
---	-----

## XII. Kapitel. Nr. 214—232. 34 Beisp.

### Besondere Beziehungen zweier Kegelschnitte.

214. Schnittpunkte und Schnittsehnen zweier Kegelschnitte . .	400
215. Berührung zwischen Kegelschnitten; einfache, doppelte; Berührungen zweiter und dritter Ordnung . . . . .	401
217. Der Krümmungskreis; Krümmungsradius und Mittelpunkt. Maß der Krümmung . . . . .	404
218. Die Krümmung in einem Punkte eines Mittelpunktskegelschnittes. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes. B. 1—3. Die Krümmung der Scheitel einer Ellipse. Produkt der Krümmungsradien der Ecken eines eingeschriebenen Dreiecks. . . . .	405
219. Weitere Konstruktionen des Krümmungskreises . . . . .	407
220. Die Krümmungssehne. B. 1—10. Vier Punkte des Kegelschnittes in einem Kreis; Schnittpunkt $L$ eines Krümmungskreises mit dem Kegelschnitt; eine Gerade, die $L$ enthält. Durch einen Punkt des Kegelschnittes gehen drei Krümmungskreise in Punkten, die mit jenem auf einem Kreise liegen. Parameter der Fußpunkte der vier Normalen aus einem Punkt. Krümmungsradius als Quotient vom Kubus der Normale und dem Quadrat des Parameters; in Funktion des Winkels zwischen Normale und Achse. Längen der Sehnen des Krümmungskreises durch Mittelpunkt bez. Brennpunkt. Fokalsehne des Krümmungskreises gleich der zur Tangente parallelen Fokalsehne des Kegelschnittes . . . . .	408
221. Die Krümmung in einem Punkt der Parabel. Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes. B. 1—2. Fokalsehne des Krümmungskreises gleich dem doppelten Parameter des zum Punkt gehörigen Durchmessers. Dreieck der Krümmungsmittelpunkte von drei Parabelpunkten . . . . .	410
222. Die Evolute des Kegelschnittes . . . . .	412
223. Kegelschnitte von gemeinsamen Asymptotenrichtungen . .	413
224. Ähnliche Kegelschnitte in ähnlicher Lage; reeller und imaginärer Proportionalitätsfaktor . . . . .	414

*225. Die Ähnlichkeitszentra. B. 1—3. Entsprechende und nicht entsprechende Sehnen zwischen Vektorenpaaren; vier Ähnlichkeitsachsen von drei homothetischen Kegelschnitten; Ähnlichkeitsverhältnis. . . . .	415
226. Konzentrische homothetische Kegelschnitte. B. 1—3. Normalenfußpunkte konzentrisch homothetischer Kegelschnitte aus einem Achsenpunkt; Abschnitte einer Geraden zwischen ihnen . . . . .	417
227. Ähnliche Kegelschnitte; alle Parabeln sind ähnlich . . . .	418
228. Konfokale Kegelschnitte; reelle od. imag. Ellipsen, Hyperbeln	419
229. Der orthogonale Schnitt konfokaler Ellipsen und Hyperbeln. Symmetrische Involution der Tangentenpaare aus einem Punkte. B. 1—5. Die Pole einer Geraden im System der Konfokalen bilden eine zu ihr normale Gerade. Aus einem Punkte der Hauptachse gehen gleichlange Tangenten an die Konfokalen. Erweiterung des Satzes von Nr. 194,14 auf Konfokale. Länge der eine konfokale Ellipse berührenden Sehnen einer Ellipse . . . . .	419
230. Die elliptischen Koordinaten. B. 1—7. Winkel einer in $P$ gezogenen Ellipsentangente mit den an eine konfokale Ellipse gezogenen Tangenten; Hauptachsenlänge einer Ellipse aus den in zwei Tangenten abgetragenen Brennstrahlen ihres Schnittpunktes; konstantes Sinusverhältnis der Neigungswinkel der Tangenten an feste konfokale Ellipsen gegen die Tangente der konfokalen durch ihren Schnittpunkt, wenn er diese beschreibt; Abstände der Ellipsen- und Hyperbeltangente eines Schnittpunktes zweier Konfokalen mit Anwendung; die entsprechenden konfokalen Kegelschnittssysteme in kollinearen Ebenen — die elliptischen Koordinaten entsprechender Punkte haben konstantes Produkt. Exzentrizitäten entsprechender Kegelschnitte . . . . .	422
231. Konfokale Parabeln. B. . . . .	425
232. Konfokale Kurven zweiter Klasse; zwei Paare gemeinsamer Tangenten der absoluten Richtungen . . . . .	426

## XIII. Kapitel. Nr. 233—248. 14 Beisp.

## Die Methode des Unendlichkleinen.

233. Methode der Grenzübergänge . . . . .	428
234. B. 1—3. Kreistangente, Kreisumfang, Kreisfläche . . . .	429
235. B. 1—3. Tangenten der Kegelschnitte . . . . .	430
236. B. 1—2. Flächen der Kegelschnitte; parabolische Sektoren und Segmente . . . . .	431
237. B. 1—3. Ellipsenfläche; jeder Durchmesser halbiert die Ellipse; Flächenverhältnis ähnlicher Figuren . . . . .	432

	Seite
238. B. 1—2. Sektor und Segment bei der Hyperbel; Gleichheit zweier Segmente . . . . .	433
239. Segmente konstanter Größe bei homothetischen konzentrischen Kegelschnitten . . . . .	434
240. Bogen von konstanter Länge, zwei Sätze von Mac Cullagh	435
241. Normalen von Fußpunktkurven . . . . .	436
242. Krümmungsradius der Ellipse und Fokalsehne der Krümmung	436
243. Fokalsehne der Krümmung und zur Tangente parallele Fokalsehne . . . . .	437
244. Weitere Ausdrücke für den Krümmungsradius bei Mittelpunktskegelschnitten; Krümmungsmittelpunkte des Schnitts zweier Konfokalen . . . . .	438
245. Bogen der Evolute; Parallelkurven . . . . .	439
246. Tangenten eines Kegelschnittes aus Punkten eines konfokalen; Satz von Graves. . . . .	440
247. Satz von Mac Cullagh, Satz von G. C. di Fagnano. B. Kollineare Bogen mit rektifizierbarer Differenz . . . . .	440
248. Tangentenvieleck mit Ecken auf konfokalen Kegelschnitten	441

## Der Koordinatenbegriff und der Punkt.

1. **Abszisse eines Punktes einer Geraden.** Die Grundlage der analytischen Geometrie der Ebene bildet eine Methode, mit Hilfe deren man die Lage von Punkten in der Ebene durch Zahlen bestimmen kann. Diese Methode ist die Erweiterung eines Verfahrens, vermöge dessen Punkte einer Geraden durch Zahlen festgelegt werden. Wir wollen zunächst *dieses* Verfahren näher betrachten.

Um den Punkt  $P$  der Geraden  $g$  festzulegen, nimmt man auf  $g$  einen Punkt  $O$  als fest gegeben an; alsdann ist die Lage von  $P$  durch die Anzahl der Längeneinheiten bestimmt, um die der Punkt  $P$  von  $O$  entfernt ist, falls noch angegeben wird, in welchem der beiden Teile, in die die Gerade  $g$  durch  $O$  geteilt wird, der Punkt  $P$  gelegen ist. So ist z. B.  $P$  in Fig. 1 durch die Angabe festgelegt, daß die Entfernung von  $O$  bis  $P$  2,4 cm betragen und sich  $P$  rechts von  $O$  be-

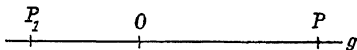


Fig. 1.

finden soll. Um nun möglichst kurz angeben zu können, auf welchem Teil der Geraden  $g$  der Punkt  $P$  gelegen ist, weist man den beiden entgegengesetzten Richtungen, in denen sich  $g$  von  $O$  aus erstreckt, entgegengesetzte *Vorzeichen* zu und versieht die Anzahl Längeneinheiten, die den Abstand von  $O$  bis  $P$  mißt, mit dem Vorzeichen  $+$  oder  $-$ , je nachdem  $P$  in positiver oder negativer Richtung von  $O$  aus gelegen ist. Welcher der beiden Richtungen man das eine oder andere Vorzeichen zuweist, ist gleichgültig; doch muß die Verabredung hierüber — wenn einmal getroffen — im Verlauf einer und derselben Untersuchung festgehalten werden.

Die mit ihrem Vorzeichen versehene Zahl der Längeneinheiten, die den Abstand des Punktes  $P$  von  $O$  mißt, heißt

die *Abszisse* von  $P$ ; sie wird im folgenden gewöhnlich durch  $x$  bezeichnet. Der Punkt  $O$  heißt *Anfangspunkt* oder, da ihm die Abszisse  $x = 0$  zugehört, *Nullpunkt*. So hat z. B. der Punkt  $P$  in Fig. 1 die Abszisse  $x = + 2,4$  cm, wenn der Richtung von  $O$  nach  $P$  das Vorzeichen  $+$  zugewiesen wurde; für den Punkt  $P_1$  ist  $x = - 1,5$  cm.

**2. Mit Vorzeichen behaftete Strecken.** Die auf einer Geraden  $g$  gelegene Strecke mit den Endpunkten  $P$  und  $Q$  pflegt in der elementaren Geometrie durch  $PQ$  oder auch durch  $QP$  bezeichnet zu werden, und diese Bezeichnungen bedeuten dort meistens den absoluten Wert der Länge dieser Strecke. Man kann aber auch durch die verschiedene Stellung der Buchstaben  $P$  und  $Q$  ausdrücken, in welchem Sinn die Strecke gezogen ist, wenn man festsetzt, daß unter  $PQ$  die von  $P$  nach  $Q$  gezogene oder durchlaufene Strecke verstanden werden soll, während  $QP$  die von  $Q$  nach  $P$  gezogene Strecke bedeutet.

Betrachtet man noch einen dritten auf der Geraden  $g$  gelegenen Punkt  $O$  und definiert man  $PO + OQ$  als die Strecke, um die man sich von  $P$  entfernt, wenn man erst von  $P$  nach  $O$  und dann von  $O$  nach  $Q$  geht, so zeigt die geometrische Anschauung (Fig. 2), daß in allen Fällen, mag  $O$  zwischen  $P$  und  $Q$  liegen oder auf einer der Verlängerungen der Verbindungslinie dieser Punkte (über  $Q$  oder über  $P$  hinaus), die Gleichung stattfindet

$$(1) \quad PQ = PO + OQ.$$

Liegt  $O$  auf  $g$  außerhalb der Strecke  $PQ$  (wie z. B. in den drei unteren Geraden von Fig. 2) und läßt man nun  $Q$  mit  $P$  zusammenfallen, so folgt aus (1):

$$(2) \quad 0 = PO + OP, \text{ also } PO = - OP.$$

Bei der oben getroffenen Verabredung sind somit Strecken, die gleiche absolute Länge haben, aber nach entgegengesetzten Richtungen gezogen sind; mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. Daher ist in (1)  $PQ = - QP$ ,  $OQ = - QO$ ,

und wenn man dies beachtet, folgt aus (1) die für alle Lagen von  $P$ ,  $Q$  und  $O$  auf  $g$  gültige Gleichung<sup>1)</sup>

$$(3) \quad PQ + QO + OP = 0.$$

Sind allgemein  $x_1$  und  $x_2$  die Abszissen zweier auf  $g$  gelegenen Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , so gilt nach (1) für alle Lagen von  $P_1$  und  $P_2$  die Gleichung

$$(4) \quad P_1P_2 = x_2 - x_1,$$

und je nachdem die Differenz  $x_2 - x_1$  positiv oder negativ ist, erstreckt sich die von  $P_1$  nach  $P_2$  gezogene Strecke in der positiven oder in der negativen Richtung der Geraden  $g$ .

**3. Parallelkoordinaten.** Um einen Punkt  $P$  der Ebene festzulegen, wurde von *Fermat* und *Descartes* (*Cartesius*) im 17. Jahrhundert folgende Methode eingeführt<sup>2)</sup> und später durch die Geometer allgemein gebraucht:

Man nimmt zwei gerade Linien oder Achsen  $X'X$ ,  $Y'Y$ , die sich im Punkte  $O$  schneiden (Fig. 3), als fest gegeben an und unterscheidet bei jeder Achse, wie bei der Geraden  $g$  in Nr. 1, die beiden Richtungen, in denen sie sich von  $O$  aus ins Unendliche erstreckt, durch Vorzeichen. Will man nun die Lage des Punktes  $P$  durch Zahlen bestimmen, so zieht man durch  $P$  Parallelen zu den Achsen und mißt die Abschnitte  $OP'$

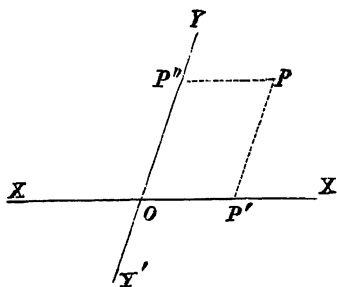


Fig. 3.

und  $OP''$ , die diese Parallelen auf den Achsen abschneiden. Versieht man die Maßzahlen von  $OP'$  und  $OP''$  mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem sich die Strecken  $OP'$  und  $OP''$  von  $O$  aus in der positiven oder negativen Richtung der betreffenden Achse erstrecken, so ist durch diese mit dem richtigen Vorzeichen versehene Zahlen, die die Koordinaten (Parallelkoordinaten) von  $P$  heißen, der Punkt  $P$  eindeutig festgelegt. Die Koordinate  $OP' = P''P$  wird die *Abszisse* genannt und durch  $x$  bezeichnet, die Koordinate  $OP'' = P'P$  heißt die *Ordinate* und wird durch  $y$  be-



zeichnet. Die festen Achsen heißen *Koordinatenachsen*, und zwar  $X'X$  die Abszissenachse oder  $x$ -Achse,  $Y'Y$  die Ordinatenachse oder  $y$ -Achse; ihr Schnittpunkt  $O$  heißt der *Anfangspunkt* (Ursprung) oder *Nullpunkt* der Koordinaten, da für ihn Abszisse und Ordinate Null sind. Man unterscheidet das so durch Angabe der Achsen und des Maßstabes definierte *Koordinatensystem* von anderen Systemen als das *Cartesische* oder das der *Parallelkoordinaten*.

Die entgegengesetzten Richtungen, in denen sich jede Koordinatenachse von  $O$  aus erstreckt, sollen im folgenden stets so festgelegt werden, daß die nach *rechts* gemessenen Abszissen  $OP'$  und die nach *oben* gemessenen Ordinaten  $OP''$

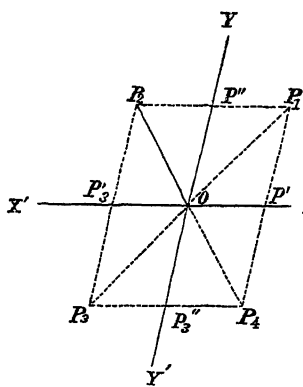


Fig. 4.

als *positiv*, die im entgegengesetzten Sinn gemessenen Strecken  $OP_3'$  und  $OP_3''$  als *negativ* betrachtet werden (Fig. 4). Man könnte die positiven und negativen Richtungen auch in anderer Weise durch Vorzeichen unterscheiden, doch muß die diesbezügliche Verabredung — wenn einmal getroffen — im Verlaufe einer und derselben Untersuchung festgehalten werden. Hat der Punkt  $P_1$  in Fig. 4 die Koordinaten  $OP' = x = +a$ ,

$OP'' = y = +b$ , so sind die vier Ecken des Parallelogramms  $P_1P_2P_3P_4$  leicht zu unterscheiden als die Punkte mit den Koordinaten

$$x = +a, y = +b; \quad x = -a, y = +b; \quad x = -a, y = -b; \\ x = +a, y = -b. *)$$

Je nachdem der Achsenwinkel  $\angle XOY = \omega$  ein rechter oder schiefer Winkel ist, nennt man  $x, y$  *rechtwinklige* (*orthogonale*) oder *schiefwinklige Koordinaten*.

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in *vier Felder* oder *Gebiete*, bei rechtwinkligen Achsen *Quadranten* genannt.

\*) Diese Unterscheidung muß dem Anfänger aus der Trigonometrie geläufig sein.

Wie man sieht, sind alle Punkte eines und desselben Feldes durch die gleiche Kombination der Vorzeichen ihrer Koordinaten  $x, y$  charakterisiert. Dasjenige Feld, für dessen Punkte  $x$  und  $y$  positiv sind, heißt das erste Feld, und man läßt nun die übrigen Felder in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne als zweites, drittes, viertes Feld folgen. Die zugehörigen Vorzeichenkombinationen sind aus nachstehender Tabelle ersichtlich, die bei der vorhin getroffenen Verabredung über die positive und negative Richtung der Achsen gilt:

	I	II	III	IV
$x$	+	-	-	+
$y$	+	+	-	-

Man sieht, daß durch die getroffene Verabredung über die Vorzeichen von  $x$  und  $y$  Eindeutigkeit erreicht ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Punkte gleicher Abszissen  $x = a$  (Fig. 4) auf der durch  $P'$  parallel zur  $y$ -Achse gezogenen Geraden liegen, die Punkte gleicher Ordinaten  $y = b$  auf der Parallelen durch  $P''$  zur  $x$ -Achse. Alle Punkte, die in der Abszissenachse liegen, haben die Ordinate Null, alle Punkte der Ordinatenachse dagegen die Abszisse Null.

Abkürzend soll ein Punkt von den Koordinaten  $x = a$ ,  $y = b$  als der Punkt  $a|b$  bezeichnet werden, so daß dann z. B.  $P', P'', O$  die Punkte  $+a|0, 0|b, 0|0$  sind.

Beispiel. Punkte  $+a|+b, -a|-b$  liegen symmetrisch in bezug auf  $O$ , Punkte  $a|b, b|a$  symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels zwischen  $+x, +y$ , usw.

**4. Messung der Winkel.** Für die Messung der Winkel kann ein für die ganze Ebene gültiger, positiver Sinn festgesetzt werden. *Man pflegt den Drehungssinn des Uhrzeigers als negativ, den entgegengesetzten als positiv zu bezeichnen.\*)*

\*) Bewegt sich ein Punkt auf einem Kreise derart, daß sein zugehöriger Zentriwinkel im positiven Sinn wächst, so befindet sich das Kreisinere zur Linken jenes Punktes. Daher gilt überhaupt derjenige *Umfahrungssinn* einer nicht überschlagenen geschlossenen Figur als positiv, bei dem das *Innere derselben* dem bewegten Punkte stets zur *Linken* bleibt.

Bei unserer Wahl der Achsen gelangt also  $OX$  durch eine Drehung im positiven Sinne nacheinander mit  $OY$ ,  $OX'$ ,  $OY'$  zur Deckung. Ist auf zwei Geraden der positive Sinn jeweiligen fixiert, so wird als ihr Winkel derjenige genommen, den die gleichsinnigen Halbstrahlen einschließen; so ist  $\sphericalangle XOY = \sphericalangle X'OY' = \omega$  der Achsenwinkel (während  $\sphericalangle XOY' = \sphericalangle X'OY = \omega + \pi$ ). Umgekehrt überträgt die Angabe des nach Größe und Zeichen bestimmten Winkels den Sinn des einen Schenkels auf den anderen, und eine Änderung des Winkels um  $\pi$  bedeutet die Umkehrung des Sinnes auf dem zweiten Schenkel. Alle Winkel  $\sphericalangle POQ$  lassen sich als die algebraischen Differenzen  $\sphericalangle XOQ - \sphericalangle XOP$  der Winkel ausdrücken, die ihre Schenkel  $OQ$ ,  $OP$  mit einem positiven Anfangsstrahl, nämlich der Halbachse  $OX$ , bilden.

Unter dem Winkel  $\alpha$ , den die vom Koordinatenanfang  $O$  nach einem Punkte  $P$  gezogene Gerade, der Vektor  $OP$ , mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet, ist der Winkel zu verstehen, um den man die positive  $x$ -Achse in positivem Sinne drehen muß, bis sie in die Richtung  $OP$  gelangt.

Wird der absolute Wert der Länge der Geraden oder des Vektors  $OP$  durch  $|r|$  bezeichnet und hat  $P$  die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$ , so ist (vgl. Fig. 5):

$$(5) \quad |r| = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{|r|}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{|r|}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y : x,$$

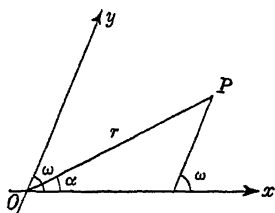


Fig. 5.

und zwar gelten diese Formeln gemäß den elementaren Regeln der Trigonometrie, welchem der vier Quadranten der Punkt  $P$  auch angehören mag.

Liegt ein schiefwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Achsenwinkel gleich  $\omega$  ist, so wird (vgl. Fig. 6):

$$(6) \quad |r| = +\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega},$$

ferner nach dem Sinussatze der Trigonometrie:

$$(7) \quad x = |r| \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}, \quad y = |r| \frac{\sin \alpha}{\sin \omega},$$

wobei die Vorzeichen der Zahlenwerte von  $\sin(\omega - \alpha)$  und  $\sin \alpha$  stets mit den Vorzeichen der Zahlen  $x$  bzw.  $y$  übereinstimmen. Aus (7) folgt überdies:

$$(8) \quad \cos \alpha = \frac{x + y \cos \omega}{|r|}, \quad \sin \alpha = \frac{y \sin \omega}{|r|}.$$

### 5. Koordinatenausdruck der Entfernung $d$ zweier Punkte $P_1, P_2$ oder $x_1 | y_1, x_2 | y_2$ .

Für den Fall, daß die Verbindungslinie der Punkte  $P_1, P_2$  einer Achse parallel ist, z.B. der  $x$ -Achse, ist  $P_1 P_2 = M_1 M_2$  die algebraische Koordinatendifferenz  $x_2 - x_1$ . Im allgemeinen Fall folgt aber unter Voraussetzung rechtwinkliger Achsen offenbar  $\overline{P_1 P_2}^2 = d^2 = \overline{P_1 S}^2 + \overline{S P_2}^2$  (vgl. Fig. 7), also wegen

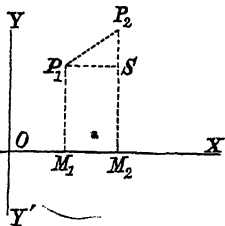


Fig. 7.

$$(9) \quad \begin{aligned} P_1 S &= x_2 - x_1, \quad S P_2 = y_2 - y_1, \\ d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Wählen wir in der Fig. 7 allgemeiner den Achsenwinkel  $XOY = \omega$  schief, so ist  $\sphericalangle P_2 S P_1 = \pi - \omega$  und es gilt

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{P_1 S}^2 + \overline{S P_2}^2 - 2 \overline{P_1 S} \cdot \overline{S P_2} \cdot \cos P_2 S P_1,$$

wobei die Seitenlängen des Dreiecks immer absolut (positiv) zu nehmen sind. Man bestätigt dann für verschiedene relative Lagen von  $P_1$  und  $P_2$  gegen die Achsen leicht, daß statt der Längen die Strecken so einzuführen sind, daß

$$(10) \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \omega.$$

Der Winkel, den die in der Richtung von  $P_1$  nach  $P_2$  gezogene Gerade mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet, werde durch  $\sphericalangle (P_1 P_2, x)$  bezeichnet; für ihn erhält man bei rechtwinkligen Koordinaten

$$(11) \quad \begin{aligned} \cos(P_1 P_2, x) &= \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1 P_2}}, \quad \sin(P_1 P_2, x) = \frac{y_2 - y_1}{\overline{P_1 P_2}}, \\ \operatorname{tg}(P_1 P_2, x) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Für den Winkel  $(P_2P_1, x)$ , den die in der Richtung von  $P_2$  nach  $P_1$  gezogene Gerade mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet, ergibt sich

$$(12) \quad \begin{aligned} \cos(P_2P_1, x) &= \frac{x_1 - x_2}{|P_1P_2|}, & \sin(P_2P_1, x) &= \frac{y_1 - y_2}{|P_1P_2|}, \\ \operatorname{tg}(P_2P_1, x) &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Man merke sich, daß bei den Differenzen, die im Zähler der Ausdrücke für den Kosinus und Sinus des betreffenden Winkels auftreten, im Minuenden immer die Koordinate desjenigen Punktes steht, zu dem hin die Gerade gezogen ist.

Bei schiefwinkligen Koordinaten erhält man

$$(13) \quad \cos(P_1P_2, x) = \frac{x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) \cos \omega}{|P_1P_2|}, \quad \sin(P_1P_2, x) = \frac{(y_2 - y_1) \sin \omega}{|P_1P_2|}.$$

Wie schon hier, so zeichnen sich im allgemeinen die Formeln bei der Anwendung rechtwinkliger Koordinaten durch größere Einfachheit aus. Wir werden aber im folgenden die hauptsächlichsten Formeln in ihrer allgemeinsten Gestalt geben, da die schiefwinkligen Parallelkoordinaten zuweilen mit Vorteil anzuwenden sind und die Spezialisierung nur in der Einführung von  $\omega = \frac{1}{2}\pi$  besteht.

B. 1) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind

$$x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 4, y_2 = -5; x_3 = -3, y_3 = -6;$$

unter Voraussetzung rechtwinkliger Achsen sind die Längen seiner Seiten  $\sqrt{68}, \sqrt{50}, \sqrt{106}$ .

2) Die Längen der Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken dieselben Koordinaten haben wie vorher, sind unter der Voraussetzung eines Achsenwinkels von  $60^\circ$   $\sqrt{52}, \sqrt{57}, \sqrt{151}$ .

3) Der Ausdruck dafür, daß die Entfernung des Punktes  $x|y$  vom Punkte 2|3 gleich 4 ist, lautet:  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ .

4) Der Punkt  $x|y$  ist von den Punkten 2|3 und 4|5 gleich weit entfernt, wenn

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 4)^2 + (y - 5)^2 \text{ oder } x + y = 7.$$

5) Der Punkt, der von den Punkten 2|3, 4|5, 6|1 gleich weit entfernt ist, hat die Koordinaten

$$x = \frac{13}{3}, y = \frac{8}{3} \text{ und die Entfernung } \frac{\sqrt{50}}{3}.$$

6) Die Bedingung, unter der die Verbindungslinien des Punktes  $x|y$  mit zwei festen Punkten  $x_1|y_1$  und  $x_2|y_2$  zueinander rechtwinklig sind, lautet  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ .

Diese Gleichung ergibt sich nämlich aus  $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 = \overline{P_1P_2}^2$ ; sie drückt offenbar auch die Bedingung dafür aus, daß  $P$  auf einem Kreis liegt, der die Strecke  $P_1P_2$  zum Durchmesser hat.

6. **Winkel der Geraden  $OP_1$  und  $OP_2$ .** Wenn die vom Koordinatenanfang  $O$  nach zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  gezogenen Geraden  $OP_1$  und  $OP_2$  sich nicht in einer und derselben Richtung und auch nicht in den entgegengesetzten Richtungen einer und derselben Geraden erstrecken, bilden sie zwei Winkel miteinander, von denen der eine kleiner als zwei Rechte (konkav), der andere größer als zwei Rechte (konvex) ist (Fig. 8). Dieser letztgenannte Winkel soll im folgenden nicht berücksichtigt und nur der Winkel der Geraden  $OP_1$ ,  $OP_2$  betrachtet werden,

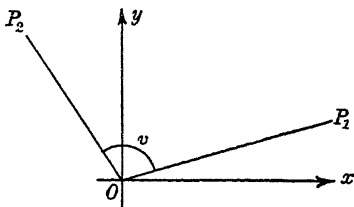


Fig. 8.

der kleiner als zwei Rechte ist, er werde mit  $v$  bezeichnet. Als dann sind hinsichtlich der Lage von  $OP_1$  und  $OP_2$  zwei Fälle möglich:  $OP_1$  liegt zu  $OP_2$  entweder so wie die positive Richtung der  $x$ -Achse zur positiven Richtung der  $y$ -Achse oder umgekehrt, d. h. um  $OP_1$  auf dem kürzesten Wege in die Lage  $OP_2$  überzuführen, muß man  $OP_1$  entweder in positivem oder in negativem Sinn (vgl. S. 5) drehen. Auch kann man sagen: Im ersten Fall liegen  $OP_1$  und  $OP_2$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  *gleichstimmig*, im zweiten *ungleichstimmig*.

Es möge zunächst angenommen werden, daß der *erste* dieser beiden Fälle vorliege; ferner seien  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel von  $OP_1$  und  $OP_2$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse, also die Winkel, um die man die positive  $x$ -Achse in positivem Sinn drehen muß, bis sie in die Lage  $OP_1$  bzw.  $OP_2$  gelangt. Wenn  $\alpha_2 > \alpha_1$  ist, folgt alsdann selbstverständlich  $v = \alpha_2 - \alpha_1$  (vgl. Fig. 8); ist jedoch  $\alpha_1 > \alpha_2$

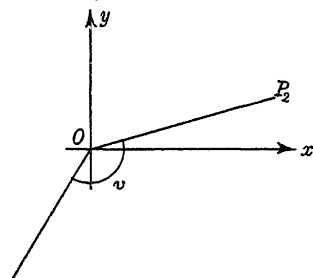


Fig. 9

ist jedoch  $\alpha_1 > \alpha_2$  und daher infolge der soeben erwähnten Annahme  $\alpha_1 - \alpha_2 > \pi$ , so wird  $v = 2\pi - (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\pi + \alpha_2 - \alpha_1$  (vgl. Fig. 9).

Der *zweite* Fall, bei dem  $OP_1$  zu  $OP_2$  nicht so gelegen ist wie die positive Richtung der  $x$ -Achse zur positiven Richtung der  $y$ -Achse, sondern umgekehrt, ist hiermit auch erledigt, er bedeutet ja nur eine Vertauschung der Buchstaben  $P_1$  und  $P_2$  sowie der Buchstaben  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Hier wird

$$v = \alpha_1 - \alpha_2 \text{ oder } v = 2\pi - (\alpha_2 - \alpha_1) = 2\pi + \alpha_1 - \alpha_2.$$

Wie man sieht, ist stets

$$\cos v = \cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \cos (\alpha_1 - \alpha_2), \text{ dagegen}$$

$$\sin v = \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \text{ oder } \sin v = \sin (\alpha_1 - \alpha_2),$$

je nachdem  $OP_1$  und  $OP_2$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  gleichstimmig oder ungleichstimmig liegen. Mit Benutzung der Formeln (5) und der Formeln

$$\cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_1$$

$$\sin (\alpha_2 - \alpha_1) = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1$$

ergibt sich der Satz:

*Der konkave Winkel  $v$ , den die vom Koordinatenanfang  $O$  nach zwei Punkten  $x_1|y_1$  und  $x_2|y_2$  gezogenen Geraden miteinander bilden, ist im Falle  $\omega = \frac{1}{2}\pi$  bestimmt durch die Formeln:*

$$(14) \quad \cos v = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

$$\sin v = \pm \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad \operatorname{tg} v = \pm \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2},$$

wo in den Ausdrücken für  $\sin v$  und  $\operatorname{tg} v$  das obere oder untere Vorzeichen zu stehen hat, je nachdem  $OP_1$  so zu  $OP_2$  gelegen ist wie die positive Richtung der  $x$ -Achse zur positiven Richtung der  $y$ -Achse oder umgekehrt.

**7. Flächeninhalt eines Dreiecks oder Vielecks.** Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich sofort die Aufgabe lösen, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen, dessen eine Ecke im Koordinatenanfang  $O$  liegt, während die anderen Ecken  $P_1, P_2$  die Koordinaten  $x_1|y_1$  bzw.  $x_2|y_2$  haben.

Sind  $r_1$  und  $r_2$  die absoluten Längen der Strecken  $OP_1$  und  $OP_2$ , so ist der Flächeninhalt  $F$  des Dreiecks bekannt-

lich gleich  $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin v$ , wo  $v$  den zur Ecke  $O$  gehörigen Dreieckswinkel bezeichnet. Man erhält daher nach (14):

$$(15) \quad F = \pm \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu stehen hat, je nachdem  $OP_1$  und  $OP_2$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  gleichstimmig oder ungleichstimmig liegen.

Bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel  $\omega$  erhält man mit Hilfe von (8):

$$\begin{aligned} \sin v &= \pm \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \pm \frac{y_2 \sin \omega (x_1 + y_1 \cos \omega) - (x_2 + y_2 \cos \omega) y_1 \sin \omega}{r_1 r_2} \\ &= \pm \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{r_1 r_2} \sin \omega, \end{aligned}$$

folglich

$$(16) \quad F = \pm \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \sin \omega$$

mit der gleichen Vorzeichenregel wie bei rechtwinkligen Koordinaten.

Bei der früher getroffenen Verabredung (vgl. S. 4) über die positiven Richtungen der Achsen (bei der  $x$ -Achse nach rechts, bei der  $y$ -Achse nach oben) kann man auch sagen: In (15) und (16) ist das obere oder untere Vorzeichen zu setzen, je nachdem man beim Umlauf des Dreiecks im Sinne  $OP_1P_2$  dessen Fläche zur linken oder rechten Seite hat.

Der Fall, daß keine Ecke des Dreiecks im Koordinatenanfang liegt, läßt sich auf den soeben betrachteten zurückführen. Man gelangt hier zu folgendem Ergebnis:

*Der Flächeninhalt  $F$  eines Dreiecks, dessen Ecken  $P_1, P_2, P_3$  die schief- oder rechtwinkligen Koordinaten  $x_1 | y_1$  bzw.  $x_2 | y_2$  bzw.  $x_3 | y_3$  haben, ist gegeben durch:*

$$(17) \quad F = \pm \frac{1}{2} \{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\} \sin \omega,$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu setzen ist, je nachdem die Geraden  $\overrightarrow{P_3P_1}$  und  $\overrightarrow{P_3P_2}$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  gleichstimmig oder ungleichstimmig liegen. Bei der früher getroffenen Verabredung über die positiven Richtungen der Achsen kann man auch sagen: In (17) ist das obere oder untere Vorzeichen zu setzen, je nachdem man beim



Umlaufen des Dreiecks im Sinne  $P_1 P_2 P_3$  dessen Fläche auf der linken oder rechten Seite hat.

Zum Beweis der Formel (17) nehmen wir ein neues Koordinatensystem  $x', y'$  zu Hilfe, dessen Anfangspunkt in einer der drei Ecken des Dreiecks, z. B. in  $P_3$ , gelegen ist, während seine Achsen mit den Achsen des ursprünglichen Systems parallel und bezüglich der Vorzeichen gleich gerichtet sind (Fig. 10). Haben die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , auf dieses neue System bezogen, die Koordinaten  $x'_1 | y'_1$  bzw.  $x'_2 | y'_2$ , so ist nach (16)

$$(18) \quad F = \pm \frac{1}{2} (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) \sin \omega.$$

Die Größen  $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2$ , die nicht gegeben sind, lassen sich leicht durch die auf das ursprüngliche System  $x, y$  bezogenen Koordinaten  $x_1 | y_1$  und  $x_2 | y_2$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  ausdrücken. Wie aus Fig. 10 hervorgeht, ist

$$(19) \quad \begin{cases} x'_1 = P_3 L = M_3 M_1 = O M_1 - O M_3 = x_1 - x_3 \\ y'_1 = L P_1 = M_1 P_1 - M_1 L = M_1 P_1 - M_3 P_3 = y_1 - y_3 \end{cases}$$

und analog  $x'_2 = x_2 - x_3, y'_2 = y_2 - y_3$ .

Man erhält daher nach (18):

$$(20) \quad F = \pm \frac{1}{2} \{ (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \} \sin \omega \quad \text{oder} \\ F = \pm \frac{1}{2} \{ x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 \} \sin \omega$$

und mit Benutzung einer Determinante (näheres über Determinanten in Nr. 8):

$$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \omega.$$

Die Bemerkung über das doppelte Vorzeichen in (17) ergibt sich leicht aus der entsprechenden Bemerkung zu den Gleichungen (15) und (16).

Wir finden allgemein den Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten seiner Eckpunkte folgendermaßen.

Wenn wir *innerhalb* des Vielecks einen Punkt  $x | y$  wählen und ihn mit allen Eckpunkten desselben  $x_1 | y_1, x_2 | y_2, \dots, x_n | y_n$  durch Geraden verbinden, so ist der Inhalt des Vielecks die Summe der Inhalte aller der Dreiecke, in

die dasselbe dadurch geteilt worden ist. Die doppelten Inhalte dieser Dreiecke sind *bei rechtwinkligen Koordinaten*

$$\begin{aligned} & \pm \{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1\}, \\ & \pm \{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2\}, \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & \pm \{x(y_{n-1} - y_n) - y(x_{n-1} - x_n) + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}\}, \\ & \pm \{x(y_n - y_1) - y(x_n - x_1) + x_n y_1 - x_1 y_n\}, \end{aligned}$$

und zwar hat hier jedesmal das obere oder jedesmal das untere Vorzeichen zu stehen in Übereinstimmung mit der früher gegebenen Vorzeichenregel. Bei Addition dieser Ausdrücke zerstören sich die Glieder, die  $x$  und  $y$  als Faktoren enthalten, wie auch notwendig ist, weil der Betrag  $2F$  des doppelten Inhaltes von der Art der Zerlegung des Vielecks unabhängig sein muß. Wir erhalten für den doppelten Inhalt

$$(21) \quad 2F = \pm \{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_n y_1 - x_1 y_n)\}.$$

Der Klammerausdruck kann auch geschrieben werden in einer der beiden Formen

$$x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \cdots + x_n(y_1 - y_{n-1}),$$

oder

$$y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \cdots + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

Der doppelte Inhalt des Vielecks ergibt sich aus den Koordinaten der Ecken, indem man die Ordinate jeder Ecke mit der Differenz der Abszissen der vorangehenden und der nachfolgenden Ecke multipliziert und die Produkte summiert. *Bei schiefwinkligen Koordinaten* ist in (21) der Faktor  $\sin \omega$  beizufügen.<sup>3)</sup>

- B. 1) Der Inhalt des Dreiecks  $2 \mid 1, 3 \mid -2, -4 \mid -1$  ist  $= 10$ .  
 2) Der Inhalt des Dreiecks  $2 \mid 3, 4 \mid -5, -3 \mid -6$  ist  $= 29$ .  
 3) Der Inhalt des Vielecks  $1 \mid 1, 2 \mid 3, 3 \mid 3, 4 \mid 1$  ist  $= 4$ .

8. **Determinanten.** Der in der Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (20) stehende Ausdruck kann in äußerst übersichtlicher Weise in Gestalt einer sogenannten *Determinante dritten Grades* geschrieben werden. Da die Determinanten in der analytischen Geometrie eine sehr zweckmäßige Verwendung finden, sollen hier in aller Kürze ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet werden.

Der Ausdruck  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  wird als eine „*Determinante zweiten Grades*“ geschrieben, wenn man die in ihm enthaltenen  $2^2 = 4$  Größen (Elemente)  $a_1, b_1, a_2, b_2$  in Gestalt des quadratischen Schemas

$$(22) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

anordnet. Die Determinante (22) enthält zwei Horizontalreihen oder Zeilen und zwei Vertikalreihen oder Spalten. Die von links oben nach rechts unten gezogene *Hauptdiagonale* liefert das Produkt  $a_1 b_2$ , die andere Diagonale das Produkt  $a_2 b_1$ , dem jedoch ein Minuszeichen vorzusetzen ist. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-3 \cdot 7) = 41.$$

Wie man sieht, würde sich der Ausdruck  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  auch in Gestalt der Determinante

$$(23) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

schreiben lassen, woraus der Satz hervorgeht:

*Eine Determinante zweiten Grades ändert ihren Wert nicht, wenn man die Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.*

Man bemerkt ferner, daß die Determinante (22) ihr Vorzeichen ändert, wenn man in ihr zwei parallele Reihen miteinander vertauscht; es ist

$$(24) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \text{ ebenso } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Eine *Determinante dritten Grades* ist ein aus  $3^2 = 9$  Größen oder *Elementen* gebildetes quadratisches Schema von der Form

$$(25) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

das eine abkürzende Schreibweise für den Ausdruck

(26)  $\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$  darstellt. Das Schema (25) enthält drei Horizontalreihen oder Zeilen und drei Vertikalreihen oder Spalten, und zwar haben

alle in einer und derselben Zeile stehenden Elemente denselben Index, für alle in derselben Spalte stehenden Elemente ist derselbe Buchstabe benutzt worden.

Offenbar besteht der durch (25) dargestellte Ausdruck (26) aus sechs durch das Plus- oder Minuszeichen verbundenen Produkten oder *Gliedern* von je drei Faktoren derart, daß jedes dieser Produkte aus jeder Zeile und jeder Spalte nur *ein* Element als Faktor enthält.

Um diese Produkte und die ihnen zugehörigen Vorzeichen zu erhalten, kann man auf verschiedene Weise verfahren.

1) Man denkt sich die zwei ersten Spalten rechts neben das Schema (25) gesetzt:

$$(27) \quad \begin{array}{ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

(Note: The diagram in the original image shows diagonal lines connecting elements across the columns, with 'X' marks indicating the products to be formed. Specifically, it shows connections from the first column to the third, and from the second column to the fourth, with 'X' marks at the intersections of these paths.)

Alsdann erhält man die in (26) mit dem Pluszeichen behafteten Produkte, indem man je drei Elemente durch die von links oben nach rechts unten verlaufenden „Diagonalen“ oder Querlinien zu Produkten verbindet; die von rechts oben nach links unten gezogenen Querlinien ergeben die Produkte  $c_1 b_2 a_3$ ,  $a_1 c_2 b_3$ ,  $b_1 a_2 c_3$ , die nach (26) mit einem Minuszeichen zu versehen sind.

Offenbar läßt sich die Formel (20) für den Inhalt eines durch die Koordinaten seiner Ecken gegebenen Dreiecks in der Gestalt

$$(28) \quad F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \omega$$

schreiben.

2) Eine zweite Art der Berechnung der Determinante (25) besteht in der Zerlegung in sogenannte *Unterdeterminanten*.

Da jedes der sechs Produkte, aus denen  $\Delta$  nach (26) zusammengesetzt ist, aus jeder Zeile und jeder Spalte nur *ein* Element als Faktor enthält, muß man im Hinblick auf (27) diese sechs Glieder — vom Vorzeichen abgesehen — auch dadurch erhalten können, daß man die Elemente irgendeiner

Reihe je mit derjenigen Determinante zweiten Grades multipliziert, die übrigbleibt, wenn man die Zeile und Spalte, in der das betreffende Element steht, ausstreicht. Will man  $\Delta$  erhalten, so sind diese Produkte nach einer noch abzuleitenden Regel mit dem Plus- oder Minuszeichen zu versehen und alsdann additiv zu verbinden. Geht man z. B. von den Elementen der ersten Spalte aus, so ergeben sich aus (25) die Produkte

$$(29) \quad a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

daher ist  $\Delta$  jedenfalls von der Form

$$(30) \quad \Delta = \pm a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

und es fragt sich nun noch, welche Vorzeichen man setzen muß. Wird die *mit dem richtigen Vorzeichen* versehene Determinante zweiten Grades, die in (30) den Faktor von  $a_i$  bildet, die sogenannte *Unterdeterminante* von  $a_i$ , durch  $A_i$  bezeichnet, so ist jedenfalls  $\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ , und hier ist noch zu entscheiden, ob z. B.  $A_2 = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  oder  $A_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  ist. Die Entscheidung ließe sich durch Vergleichung von (30) mit (26) geben, aber wir wollen es vermeiden, die Frage durch Vergleichung zu beantworten. Nur die Tatsache werde festgestellt, daß man dem ersten Glied  $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  der rechten Seite von (30) das Pluszeichen geben muß. Im übrigen möge folgender Weg zur Beantwortung der gestellten Frage eingeschlagen werden.

Nehmen wir an, die fragliche Vorzeichenregel sei uns bekannt und betrachten wir die Determinante  $\Delta_1$ , die man aus  $\Delta$  durch Vertauschung der zweiten und dritten Spalte erhält:

$$(31) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Durch Zerlegung von  $\Delta_1$  nach Unterdeterminanten der ersten Spalte folgt

$$(32) \quad \Delta_1 = \pm a_1 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} \pm a_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} \pm a_3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

und hier haben das erste, zweite, dritte Glied der rechten Seite der Reihe nach ihre Vorzeichen nach derselben Regel zu erhalten wie in (30). Die Determinanten zweiten Grades, die in (32) die Faktoren von  $a_1, a_2, a_3$  bilden, sind nach einem auf S. 14 abgeleiteten Satze den Determinanten zweiten Grades, die in (30) die Faktoren von  $a_1, a_2, a_3$  bilden, entgegengesetzt gleich, daher ist auch

$$\Delta_1 = -\Delta.$$

Hätten wir aus  $\Delta$  durch Vertauschung irgend zweier anderen parallelen Reihen eine andere Determinante  $\Delta'$  gebildet, so würde sich in analoger Weise zeigen lassen, daß auch  $\Delta' = -\Delta$  ist, d. h. es gilt der Satz:

*Eine Determinante dritten Grades ändert ihr Vorzeichen, wenn man in ihr zwei parallele Reihen miteinander vertauscht.*

Zur Ableitung der in (30) zu benutzenden Vorzeichenregel wollen wir zunächst eine andere Bezeichnungsweise einführen, nämlich alle Elemente der Determinante mit demselben Buchstaben bezeichnen, diesen aber mit zwei Indizes versehen, von denen der eine, etwa der erste, die Zeile anzeigt, in der das betreffende Element steht, der andere die Spalte. Wir gehen also aus von

$$(33) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Mit  $A_{ik}$  werde die Unterdeterminante von  $a_{ik}$  bezeichnet, also die mit dem richtigen Vorzeichen versehene Determinante zweiten Grades, die bei Berechnung von  $\Delta$  den Faktor von  $a_{ik}$  bildet. Alsdann ist bei Zerlègung nach Unterdeterminanten der  $i^{\text{ten}}$  Zeile

$$(34) \quad \Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3)$$

und bei Zerlegung nach Unterdeterminanten der  $k^{\text{ten}}$  Spalte erhält man

$$(35) \quad \Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} \quad (k = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3),$$

und jedenfalls ist hier  $A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ; aber es fragt sich, welches Vorzeichen man allgemein bei  $A_{ik}$  dem betreffenden Determinantenschema geben muß. Zur Beantwortung dieser Frage rücken wir die  $i^{\text{te}}$  Zeile, in der das Element  $a_{ik}$  steht, an die Stelle der ersten Zeile, indem wir sie der Reihe nach über die vor ihr stehenden  $i - 1$  Zeilen verschieben, womit nach dem vorhin abgeleiteten Satze ein  $(i - 1)$ maliger Vorzeichenwechsel verbunden ist. Alsdann verschieben wir die  $k^{\text{te}}$  Spalte über die vor ihr stehenden  $k - 1$  Spalten, so daß die  $k^{\text{te}}$  Spalte zur ersten wird, und hiermit ist ein  $(k - 1)$ maliger Vorzeichenwechsel verbunden. Nach diesen Verschiebungen befindet sich das Element  $a_{ik}$  an der Stelle, die früher von  $a_{11}$  eingenommen wurde, die  $i^{\text{te}}$  Zeile und  $k^{\text{te}}$  Spalte sind ja an die Stelle der ersten gerückt, und die so erhaltene Determinante  $\Delta'$  ist alsdann von der ursprünglichen (33) nur um den Faktor  $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}$  verschieden, es ist

$$\Delta = (-1)^{i+k} \cdot \Delta'.$$

In  $\Delta'$  wird der Faktor von  $a_{ik}$  durch eine Determinante zweiten Grades gebildet, deren Schema sich ergibt, wenn man in dem Schema von  $\Delta'$  oder von  $\Delta$  Zeile und Spalte, in der  $a_{ik}$  steht, wegstreicht. Daraus geht hervor, daß die Unterdeterminante  $A_{ik}$ , die in dem Ausdruck für  $\Delta$  den Faktor von  $a_{ik}$  bildet, das eben angegebene Schema hat, man muß ihm aber noch den Faktor  $(-1)^{i+k}$  beifügen, um  $A_{ik}$  selbst zu erhalten.

$$\text{Hiernach ist z. B. } A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung nach Unterdeterminanten wird auch bei der Berechnung von Determinanten vierten Grades:

$$(36) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

angewandt. In ähnlicher Weise wie bei Determinanten dritten Grades ist

(37)  $\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} + a_{i4} A_{i4}$  ( $i = 1, 2, 3$  oder  $4$ ),  
ebenso

(38)  $\Delta = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k} + a_{4k} A_{4k}$  ( $k = 1, 2, 3$  oder  $4$ ).

Hier bedeutet  $A_{ik}$  die Unterdeterminante von  $a_{ik}$ , und man erhält  $A_{ik}$ , indem man in  $\Delta$  die Zeile und Spalte, in der  $a_{ik}$  steht, wegstreicht und die so entstehende Determinante dritten Grades mit  $(-1)^{i+k}$  multipliziert.

Eine Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades

$$(39) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

enthält  $n^2$  Elemente in  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten.  $\Delta$  ist die Summe aller Produkte, die aus jeder Zeile und jeder Spalte ein und nur ein Element als Faktor enthalten, das Hauptglied  $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$  hat das Pluszeichen. Auch hier ist

(40)  $\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$ , ebenso

(41)  $\Delta = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$ ,

wobei  $A_{ik}$  die geradeso wie bei Determinanten dritten und vierten Grades zu bildende Unterdeterminante von  $a_{ik}$  bedeutet.

Im folgenden erwähnen wir noch einige der wichtigsten Sätze der Determinantentheorie. Sie gelten sämtlich für Determinanten beliebigen ( $n^{\text{ten}}$ ) Grades, doch beschränken wir uns beim Beweis auf solche vom Grade  $n = 3$ , da der Beweis im Falle eines beliebigen  $n$  ganz analog ist.

Um diese Sätze hier beisammen zu haben, sei zunächst noch einmal der schon früher für  $n = 3$  bewiesene Satz erwähnt:

1. Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man in ihr zwei parallele Reihen miteinander vertauscht.

2. Eine Determinante, die zwei einander gleiche parallele Reihen enthält, hat den Wert Null.

Dies folgt daraus, daß bei Vertauschung der beiden gleichen parallelen Reihen der Wert  $\Delta$  der Determinante nach S. 17 sein Vorzeichen wechselt; andererseits aber bleibt das



Determinantenschema bei dieser Reihenvertauschung unverändert, denn die beiden Reihen sind einander gleich. Somit ist  $\Delta = -\Delta$ , d. h.  $\Delta = 0$ .

3. Haben alle Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor  $m$ , so läßt sich dieser ausscheiden und vor die Determinante setzen, es ist also z. B.

$$(42) \quad \begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dies folgt sofort daraus, daß die Determinante eine Summe von Produkten ist, die aus jeder Zeile und jeder Spalte ein und nur ein Element als Faktor enthalten.

Offenbar gilt auch die Umkehrung:

4. Eine Determinante wird mit einem Faktor  $m$  multipliziert, indem man alle Elemente einer beliebigen Reihe mit  $m$  multipliziert.

5. Werden die Elemente einer Reihe mit den entsprechenden Unterdeterminanten einer parallelen Reihe multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte gleich Null; es ist also z. B.

$$(43) \quad a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \text{ und}$$

$$(44) \quad a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + a_{3i}A_{3k} = 0,$$

falls  $i \neq k$  ist.

Zum Beweis dieses Satzes werde daran erinnert, daß man bei Berechnung von  $\Delta$  durch Zerlegen nach Unterdeterminanten der  $k^{\text{ten}}$  Zeile die Gleichung erhält:

$$(45) \quad \Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3}.$$

Hier sind nun die Unterdeterminanten  $A_{k1}$ ,  $A_{k2}$ ,  $A_{k3}$  unabhängig von  $a_{k1}$ ,  $a_{k2}$ ,  $a_{k3}$ ; ersetzt man also in (45) die Faktoren  $a_{k1}$ ,  $a_{k2}$ ,  $a_{k3}$  durch  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$ ,  $a_{i3}$ , so entsteht der Ausdruck  $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3}$ , während  $\Delta$  in eine Determinante übergeht, bei der die Elemente der  $i^{\text{ten}}$  Zeile mit denen der  $k^{\text{ten}}$  Zeile übereinstimmen. Eine solche Determinante hat aber, wie wir vorhin sahen, den Wert Null.

6. Werden in der Determinante  $\Delta$  die Elemente einer Reihe durch Summen von je zwei Summanden gebildet, so

läßt sich  $\Delta$  als Summe von zwei Determinanten schreiben. Es ist z. B.

$$(46) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

wie sofort bei Berechnung von  $\Delta$  durch Zerlegen nach Unterdeterminanten der ersten Spalte folgt.

7. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen (positiven oder negativen) Faktor  $\lambda$  multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe hinzufügt. Es ist z. B.

$$(47) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \lambda b_3 \end{vmatrix}.$$

Zum Beweis beachte man, daß sich die letzte Determinante in (47) nach dem vorhergehenden Satze als Summe von zwei anderen Determinanten  $\Delta_1 + \Delta_2$  schreiben läßt, wobei  $\Delta_1$  mit  $\Delta$  übereinstimmt, während

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

nach Ausschneiden des Faktors  $\lambda$  in eine Determinante mit zwei gleichen parallelen Reihen übergeht, also den Wert Null hat.

Dieser Satz läßt sich häufig sehr vorteilhaft verwenden, um eine Determinante in eine andere zu verwandeln, die an mehreren Stellen, wenn möglich in derselben Reihe, Nullen enthält und alsdann bei Berechnung durch Zerlegung nach Unterdeterminanten dieser Reihe mehrere verschwindende Glieder ergibt, also beim Ausrechnen nicht viel Mühe macht.

So geht z. B. die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 12 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

über, wenn man die mit 2 multiplizierten Elemente der zweiten Spalte zur dritten addiert; werden nun die Elemente der dritten

Zeile mit 4 multipliziert und von der zweiten Zeile subtrahiert, so folgt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -25 & -17 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -25 & -17 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}$$

oder  $\Delta = -15(17 + 10) = -405$ .

8. Der Wert einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man bei ihr die Zeilen und Spalten miteinander vertauscht, also die Elemente der  $i^{\text{ten}}$  Zeile in die  $i^{\text{te}}$  Kolonne setzt ( $i = 1, 2 \dots n$ ). Es ist hiernach für  $n = 3$ :

$$(48) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Für Determinanten zweiten Grades ergibt sich die Richtigkeit des Satzes ganz von selbst, wie schon S. 14 bemerkt wurde.

Bei Determinanten dritten Grades ist offenbar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{c_2}{a_2} \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \frac{c_3}{a_3} \end{vmatrix},$$

und nach Anwendung von Satz 7 folgt

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} 0 & \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_3}{a_3} & \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_3}{a_3} \\ 0 & \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} & \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_3}{a_3} \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \frac{c_3}{a_3} \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante reduziert sich sofort auf eine vom zweiten Grad; da für diese die Gültigkeit des Satzes schon bewiesen ist, kann man in ihr die Zeilen und Kolonnen vertauschen und erhält alsdann

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_3}{a_3} & \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} \\ \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_3}{a_3} & \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_3}{a_3} \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_3}{a_3} & \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} & \frac{b_3}{a_3} \\ \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_3}{a_3} & \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_3}{a_3} & \frac{c_3}{a_3} \end{vmatrix}.$$

Bei Addition der Elemente der dritten Spalte zu denen der ersten und zweiten bleibt der Wert  $\Delta$  nach Satz 7 ungeändert, daher wird

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} \\ \frac{c_1}{a_1} & \frac{c_2}{a_2} & \frac{c_3}{a_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ganz entsprechend ist die Beweisführung bei Determinanten vierten Grades; im Falle eines beliebigen  $n$  setzt der Beweis die Erledigung des Falles  $n - 1$  voraus.<sup>4)</sup>

**9. Projektion eines Linienzuges.** In Nr. 2 wurde gezeigt, daß zwischen den Strecken, die durch drei Punkte  $P, Q, R$  einer und derselben Geraden  $g$  bestimmt sind, die Beziehung

$$(49) \quad PQ + QR + RP = 0$$

stattfindet, gleichgültig wie die Punkte  $P, Q, R$  auf  $g$  einander folgen.

Sind nun  $P'$  und  $Q'$  die Projektionen der Punkte  $P$  und  $Q$  auf eine andere Gerade (Fig. 11), so heißt  $P'Q'$  die Projektion der Strecke  $PQ$ . Wird auch  $R$  auf dieselbe Gerade projiziert, etwa nach  $R'$ , so besteht die Beziehung

$$(50) \quad P'Q' + Q'R' + R'P' = 0.$$

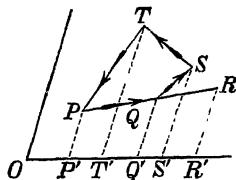


Fig. 11.

Bilden die Punkte  $P, Q, S$  ein Dreieck  $PQS$  oder  $n$  Punkte  $P, Q, S, \dots T$  ein Vieleck  $PQS \dots T$  und denkt man sich die Begrenzung in einem bestimmten *Umfahrungssinn* vollständig durchlaufen, also nacheinander die Strecken  $PQ, QS, \dots TP$ , so ist notwendig die algebraische Summe der Projektionen  $P'Q' + Q'S' + \dots T'P'$  gleich Null. Einen anderen Ausdruck hierfür gibt der Satz: *die Projektion jedes die Punkte  $P$  und  $Q$  verbindenden Linienzuges auf eine beliebige Gerade ist gleich der Projektion der geraden Strecke  $PQ$  auf dieselbe.*

**10. Transformation der Parallelkoordinaten. Paralleltransformation.** Es wird oft notwendig, aus den bekannten, auf gegebene Achsen bezogenen Parallelkoordinaten  $x, y$  eines

Punktes seine Koordinaten  $x', y'$  in bezug auf ein anderes gegebenes Achsenpaar abzuleiten. Diese Operation wird die *Transformation der Koordinaten* genannt. Sie ist bestimmt, sobald man die Lage der neuen Achsen im alten System kennt. Ihr Nutzen liegt darin, daß man *zwei ganz beliebige Geraden der Ebene als neue Achsen nehmen kann*.

Den allgemeinen Fall, wo sowohl der Anfangspunkt als die Achsen im neuen System andere Lage haben als im alten, können wir offenbar stets erreichen, wenn wir nacheinander folgende Transformationen ausführen: erstens ändern wir den Anfangspunkt, setzen aber die neuen Achsen den alten bez. parallel voraus; alsdann halten wir den Anfangspunkt fest, ändern aber die Richtungen der Achsen.

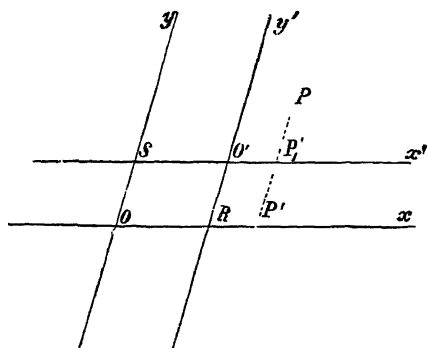


Fig. 12

Der erste Fall kann als *Parallel- oder Verschiebungstransformation* gekennzeichnet werden, da das neue Achsen-system  $x'O'y'$  aufgefaßt werden kann als das Ergebnis der Parallelverschiebung des alten Systems  $xOy$  um die

Strecke  $OO'$  (Fig. 12). Sind die Koordinaten des neuen Anfangspunktes  $O'$  im alten System  $OR = x_0$ ,  $OS = y_0$ , so ist

$$OP' = OR + O'P'_1, \quad P'P = OS + P'_1P.$$

Hat also  $P$  im alten System die Koordinaten  $x|y$ , im neuen aber die (akzentuierten) Koordinaten  $x'|y'$ , so sind die Transformationsformeln

$$(51) \quad x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0; \quad x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0.$$

Also werden die gleichnamigen Koordinaten aller Punkte der Ebene um je eine (additive) Konstante geändert.

Schon früher (S. 12) wurde von solchen Beziehungen zwischen den auf zwei verschiedene Systeme bezogenen Koordinaten eines und desselben Punktes Gebrauch gemacht.

\* Man bemerke, daß die Formeln noch eine zweite Deutung gestatten, wenn wir  $x' | y'$  als Koordinaten eines von  $P$  verschiedenen Punktes  $Q$  im alten System betrachten. In der Tat, wenn man das ursprüngliche Koordinatensystem festhält, jedoch alle Punkte  $P$  um Strecken verschiebt, die parallel und gleich  $O'O$  sind, also im umgekehrten Sinne wie vorhin die Achsen, so sind die Koordinaten  $x'y'$  ihrer neuen Lagen  $Q$  aus jenen Formeln erhältlich.

**B.** Genügen die Koordinaten eines Punktes der Gleichung  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$ , so verwandelt sich diese, wenn der Anfangspunkt nach  $2 | 3$  verlegt wird, in  $x'^2 + y'^2 = 31$ .

**11. Allgemeine Transformation.** In dem zweiten, umfassenderen Fall sind die Achsenrichtungen beliebig verändert, während der Nullpunkt fest bleibt. Sind  $x, y$  die positiven alten Achsen mit dem Winkel  $\omega$  und bilden die positiven Richtungen der neuen Achsen  $x', y'$  mit  $x$  bez. die Winkel  $\angle x, x' = \alpha$ ,  $\angle x, y' = \beta$ , so ist der neue Achsenwinkel  $\angle x', y' = \omega' = \beta - \alpha$ , und die Winkel  $\angle x', y = \omega - \alpha$ ,  $\angle y', y = \omega - \beta$ .

Man erhält nun die Transformationsformeln am einfachsten dadurch, daß man die gebrochenen Züge  $OP'P$  und  $OP'_1P$  auf die Normalen von  $P$  zu den alten Achsen orthogonal projiziert und den Satz von Nr. 9 anwendet. Un-

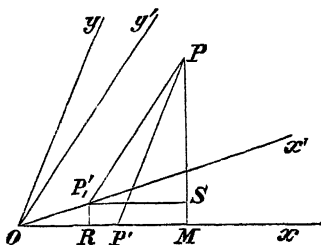


Fig. 13.

mittelbar hat man  $MP$  durch die alten und durch die neuen Koordinaten ausgedrückt (Fig. 13) als

$$MP = RP'_1 + SP = OP'_1 \sin ROP'_1 + P'_1P \sin SP'_1P \quad (52)$$

oder  $y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$ .

Die Normale von  $P$  auf die  $y$ -Achse erhält man offenbar, indem man  $y, \alpha, \beta$  bez. ersetzt durch  $x, \omega - \alpha, \omega - \beta$ , also

$$x \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta). \quad (53)$$

Diese Formeln gelten allgemein, nicht nur bei der Annahme der Figur, wo  $\alpha, \beta, \omega$  positiv und  $\omega > \beta > \alpha$  ist.

Der analytische Ausdruck der Koordinatentransformation bei festem Nullpunkt ist also der, daß die  $x|y$  ersetzt werden durch homogene lineare Funktionen der  $x'|y'$ , deren Koeffizienten von drei Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  abhängen. Man erhält auch die umgekehrte Transformation direkt in analoger Form.

Endlich entspringen aus der Aufeinanderfolge der beiden bisherigen Schritte (Nr. 10) für die allgemeinste Koordinatentransformation die Formeln

$$(54) \begin{cases} (x - x_0) \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta) \\ (y - y_0) \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{cases}$$

B. 1) Man bilde die umgekehrte Transformation durch Auflösung der direkten.

2) Haben die Systeme  $x$ ,  $y$  und  $x'$ ,  $y'$  denselben Anfangspunkt, so ist bei jeder Transformation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \omega'.$$

Denn setzen wir  $x' \sin \alpha + y' \sin \beta = L$ ,  $x' \cos \alpha + y' \cos \beta = M$ , so können die allgemeinen Transformationsformeln (52) und (53) geschrieben werden  $y \sin \omega = L$ ,  $x \sin \omega = M \sin \omega - L \cos \omega$ . Hieraus folgt:  $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = L^2 + M^2$ , anderseits aber durch Auflösung der Ansätze

$$L^2 + M^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos (\beta - \alpha).$$

Siehe auch die Beispiele zu Nr. 25.

**12. Besondere Fälle.** Der zweite Transformationsfall umfaßt einige wichtige Unterfälle.

Haben beide Systeme denselben Anfangspunkt und ist  $x$ ,  $y$  schiefwinklig,  $x'$ ,  $y'$  rechtwinklig, so ist  $\beta - \alpha = \frac{1}{2}\pi$  und man erhält

$$(55) \quad x \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) - y' \cos (\omega - \alpha), \quad y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

woraus durch Umkehrung

$$(56) \quad x' = x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha), \quad y' = -x \sin \alpha + y \sin (\omega - \alpha)$$

hervorgeht. Diese beiden Formeln kann man auch in der Gestalt

$$(57) \quad x' = x \cos (x, x') + y \cos (y, x'), \quad y' = x \cos (x, y') + y \cos (y, y')$$

schreiben; sie sind so dem Gedächtnis leicht einzuprägen.

Schließen das alte und das neue Achsenpaar gleich große Winkel ein ( $\omega = \omega'$ ), so kann man das neue als die um den Winkel  $\alpha = \vartheta$  gedrehte Lage des alten betrachten. Hierin ist insbesondere für  $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta = \frac{1}{2}\pi + \vartheta$  inbegriffen: die Transformation von rechtwinkligen Koordinaten durch Drehung des Achsensystems um einen Winkel  $\vartheta$ . Man erhält direkt aus der Figur 14

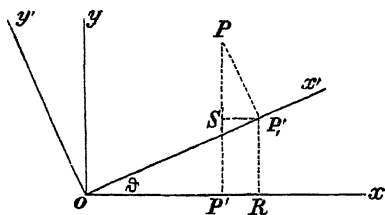


Fig. 14.

$$(58) \quad x = OR - SP'_1, \quad y = RP'_1 + SP, \quad \text{oder also} \\ x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \quad y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta.$$

Umgekehrt folgt

$$(59) \quad x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

Selbstverständlich erhält man die Formeln (58) und (59) auch aus (55) und (56) mit Hilfe von  $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\alpha = \vartheta$ ; sie lassen sich übersichtlich in der folgenden kleinen Tabelle zusammenfassen:

$$(60) \quad \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x' & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \hline y' & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{array},$$

die wohl keiner näheren Erläuterung bedarf.

Man nennt diese den Drehungen eines rechtwinkligen Achsensystems entsprechenden Koordinatenbeziehungen *orthogonale Transformationen*. Sie haben die in

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

enthaltene Eigenschaft, die Summe der Koordinatenquadrate nicht zu ändern, was geometrisch daraus folgt, daß beide Ausdrücke das Vektorquadrat desselben Punktes darstellen (Nr. 4).

Zu beachten ist, daß, wenn der Drehungssinn der gleichen Achsenwinkel  $x'$ ,  $y'$  und  $x$ ,  $y$  nicht übereinstimmt, in den allgemeinen Formeln zu setzen ist  $\omega' = -\omega$  oder  $\beta = \vartheta - \omega$ ,



bei rechtwinkligen Koordinaten  $\beta = \vartheta - \frac{1}{2}\pi$ . Die zu diesen gehörigen Formeln erhält man offenbar nicht durch eine bloße Drehung, sondern indem man nach Ausführung einer Drehung des rechtwinkligen Achsensystems die positive und die negative Halbachse der  $y'$  miteinander vertauscht, also mit einer orthogonalen Transformation die einfache Ersetzung von  $y'$  durch  $-y'$  verbindet. Man nennt diese Transformationen  $x = x' \cos \vartheta + y' \sin \vartheta$ ,  $y = x' \sin \vartheta - y' \cos \vartheta$  *uneigentlich orthogonal*.

**B. Aufg. 1)** Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung  $y^2 - x^2 = 6$ ; wenn die Halbierungslinien der Achsenwinkel das neue Achsensystem bilden, geht diese über in  $x'y' = 3$ .

2) Die Formeln für die Transformation von gegebenen schiefen Achsen zu den Halbierungslinien der Achsenwinkel als neuen Achsen sind allgemein ( $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(\omega + \pi)$ ):

$$x \sin \omega = x' \sin \frac{1}{2}\omega - y' \cos \frac{1}{2}\omega, \quad y \sin \omega = x' \sin \frac{1}{2}\omega + y' \cos \frac{1}{2}\omega.$$

3) Transformiert man die Gleichung  $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$  von einem Achsensystem  $\omega = \frac{1}{3}\pi$  zu rechtwinkligen Achsen unter Beibehaltung der  $x$ -Achse, so wird sie  $3x'^2 - 7x'y'\sqrt{3} + 10y'^2 = 6$ .

✱ 13. **Andere Deutung der Formeln für die Transformation der Koordinaten. Ähnlichkeitstransformation.** Die Formeln für die Transformation von einem rechtwinkligen Achsensystem zu einem anderen gestatten offenbar wiederum eine zweite Auffassung (vgl. Nr. 10). Denken wir das Achsensystem  $x, y$  fest und  $x|y, x'|y'$  als Koordinaten verschiedener Punkte  $P, Q$  in bezug auf dasselbe. Ist dann  $Q_1 Q_2 \dots$  eine beliebige Figur der Ebene, die durch eine Drehung um den Winkel  $\vartheta$  um den Fixpunkt  $O$  mit einer kongruenten Figur  $P_1 P_2 \dots$  zur Deckung gebracht werden kann, so sind die Koordinaten  $x_1|y_1, x_2|y_2, \dots$  aus den auf dieselben Achsen bezogenen Koordinaten  $x'_1|y'_1, x'_2|y'_2, \dots$  vermöge der Gleichungen zu berechnen  $x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta$ ,  $y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta$ . Demgemäß verwandelt die *orthogonale Transformation eine gegebene Figur in eine (gleichstimmig) kongruente Figur*.

Da ferner die Punkte  $x'|y'$  und  $x'|-y'$  symmetrisch zur  $x'$ -Achse liegen, so verwandelt der Zeichenwechsel der Ordinate jedes Punktes einer Figur dieselbe in eine ihr symmetrische. Auf ein festes Koordinatensystem bezogen, *entspricht vermöge einer uneigentlich orthogonalen Transformation einer gegebenen Figur eine symmetrisch gleiche (ungleichstimmig kongruente)*.

Da aber bekanntlich eine ebene Figur durch eine Drehung  $\vartheta$  um den Fixpunkt  $x_0|y_0$  mit jeder ihr kongruenten Figur der Ebene zur Deckung zu bringen ist und auch die allgemeinste Lagenveränderung des rechtwinkligen Koordinatensystems von diesen drei Konstanten  $x_0|y_0, \vartheta$  abhängt, so kann auch *jede ebene Figur in eine beliebige ihr kongruente oder symmetrisch gleiche verwandelt werden, indem man die Koordinaten ihrer Punkte, unter passender Wahl der Konstanten, durch transformierte Koordinaten ersetzt*.

Endlich bleibt noch der Fall zu betrachten, daß auf den fest gewählten Achsen der *Maßstab* geändert wird. Steht die neue Längeneinheit zu der alten im Verhältnis  $k:1$ , so sind die Koordinaten  $x|y$  eines Punktes in der neuen Einheit  $x=kx', y=ky'$ , d. h. die Koordinaten ändern sich proportional. Tragen wir stattdessen zu gegebenen Koordinaten  $x'|y'$  die proportionalen  $x|y$  in der unveränderten Einheit auf, so ist der Vektor von  $P$  das  $k$ -fache des Vektors von  $Q$  und  $O, P, Q$  liegen in gerader Linie (Nr. 4). *Die Figuren der Punkte  $x'|y'$  und  $kx'|ky'$  heißen dann ähnlich und ähnlich gelegen oder homothetisch und die zugehörige Koordinatenbeziehung heißt die Ähnlichkeitstransformation*.

**14. Teilverhältnis eines Punktes in einer Strecke.** *Eine Strecke  $AB$  wird durch einen Punkt  $C$  ihrer Geraden im Verhältnis  $n_1:n_2$  geteilt, wenn die Teilstrecken  $AC:CB$  in diesem Verhältnis stehen. Nach dieser Definition hat man die Teilstrecken so zu messen, daß ihre Summe gleich der geteilten Strecke,  $AC + CB = AB$ , ist. Somit bestimmt jeder innerhalb der Strecke  $AB$  gewählte oder *innere Teilpunkt*  $C$  ein *positives Teilverhältnis*  $AC:CB$ , jeder in eine Verlängerung von  $AB$  fallende oder *äußere Teilpunkt* ein *negatives Teil-**

verhältnis, denn die Teilstrecken haben im ersten Fall gleiche, im zweiten verschiedene Vorzeichen.\*)

Werden nun  $A, B, C$  durch parallele Strahlen auf irgendeine Gerade nach  $A', B', C'$  projiziert, so ist nach elementaren Sätzen  $A'C' : C'B' = AC : CB$ , d. h. das Teilverhältnis wird durch Parallelprojektion nicht geändert. Haben  $A, B$  die

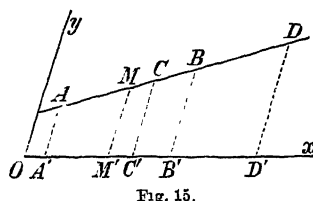


Fig. 15.

Koordinaten  $x_1 | y_1$  bez.  $x_2 | y_2$ , so können die Koordinaten  $x' | y'$  des Teilpunktes  $C$  zu jedem Teilverhältnis  $n_1 : n_2$  bestimmt werden. Denn die Projektionen auf die Achsen geben (Fig. 15)

$$(61) \quad \begin{cases} n_1 : n_2 = A'C' : C'B' = (x' - x_1) : (x_2 - x'), \text{ ebenso} \\ n_1 : n_2 = (y' - y_1) : (y_2 - y'); \text{ also} \end{cases}$$

$$(62) \quad x' = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}, \quad y' = \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2},$$

oder bei Einführung von  $v = n_1 : n_2$ :

$$(63) \quad x' = \frac{x_1 + v x_2}{1 + v}, \quad y' = \frac{y_1 + v y_2}{1 + v}.$$

Die Formeln (61) liefern zu jedem Punkt  $C$  der Geraden  $AB$  das Teilverhältnis, die Formeln (62) und (63) zu jedem beliebigen Verhältnis  $n_1 : n_2$  die Koordinaten des zugehörigen Teilpunktes. Somit ist jeder Punkt der Geraden  $AB$  eindeutig bestimmbar durch die Verhältniszahl  $v = n_1 : n_2$ , nach der er die Strecke  $AB$  teilt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Formeln (61) bis (63) vom Koordinatenwinkel  $\omega$  unabhängig sind. Verfolgen wir die Ortsveränderung des Teilpunktes  $C$ , wenn wir das Teilverhältnis  $v$  von Null an alle positiven und negativen

---

\*) In der Elementargeometrie pflegt man nur den inneren Teilpunkt einer Strecke zu betrachten und sein Teilverhältnis als eine positive Zahl anzugeben. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie findet man öfters die im Text gegebene Definition abgeändert in  $n_1 : n_2 = AC : BC$ , d. h. man hätte die Teilstrecken von den Endpunkten der Strecke nach dem Teilpunkt hin zu messen. Man hat alsdann nur die Teilverhältnisse des Textes mit entgegengesetztem Vorzeichen bei  $n_1 : n_2$  zu lesen.

Zahlwerte annehmen lassen. Für  $\nu = 0$  ( $n_1 = 0$ ) fällt  $C$  mit  $A$  zusammen; nimmt  $\nu$  positive wachsende Werte an, so entfernt sich  $C$  von  $A$  und nähert sich  $B$ , so daß zu  $\nu = +1$  ( $n_1 = n_2$ ) der Mittelpunkt  $M$  von  $AB$  gehört; aber erst für  $\nu = +\infty$  ( $n_2 = 0$ ) erreicht  $C$  den Punkt  $B$ . Da dies auch für  $\nu = -\infty$  geschieht, so müssen diese Verhältniswerte  $\pm\infty$  ebensowohl als identisch betrachtet werden wie die Werte  $\pm 0$ . Durchläuft nun  $\nu$  die Werte von  $-\infty$  bis  $-1$ , so entfernt sich  $C$  in der ursprünglichen Richtung immer mehr von  $B$  und befindet sich für  $\nu = -1$  im Unendlichen; nähert man sich dem Werte  $\nu = -1$ , indem man  $\nu$  die Werte von Null bis  $-1$  durchlaufen läßt, so rückt der Punkt  $C$  von  $A$  ausgehend in der zu  $\overrightarrow{AB}$  entgegengesetzten Richtung ins Unendliche.

Zu jedem Wert des Teilverhältnisses  $\nu$  können wir also den zugehörigen Teilpunkt in endlicher Entfernung angeben, nur nicht zu  $\nu = -1$  ( $n_1 = -n_2$ ), für den  $x' = \infty$ ,  $y' = \infty$  wird. Nennen wir nun Punkte mit unendlich großen ( $\infty$ ) Koordinaten unendlich ferne Punkte, so werden wir zu der Annahme geführt: *in jeder Geraden der Ebene liegt nur ein einziger unendlich ferner Punkt*. Denn, gehört so bei jeder endlichen Strecke der Geraden zu jedem Teilverhältnis  $\nu \geq -1$  ein einziger Punkt in endlicher Entfernung und umgekehrt, so werden wir auch für das Teilverhältnis  $\nu = -1$ , das einem unendlich fernen Punkte entspricht, den Satz von der Eindeutigkeit der Zuordnung noch gültig voraussetzen, sofern sich hieraus keine Widersprüche ergeben. Wir haben gesehen, wie ein beweglicher Punkt den Punkt  $\infty$  in beiderlei Sinn erreichen kann, und wollen daher die Gerade als eine im Unendlichen geschlossene Linie ansehen.

**B.** 1) Die Koordinaten des Mittelpunktes der Verbindungslinie der Punkte  $x' | y'$ ,  $x'' | y''$  sind  $x = \frac{x' + x''}{2}$ ,  $y = \frac{y' + y''}{2}$ .

2) Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks, das die Punkte  $2 | 3$ ,  $4 | -5$ ,  $-3 | -6$  zu Ecken hat, sind  $\frac{1}{2} | -\frac{11}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} | -\frac{3}{2}$ ,  $3 | -1$ .

3) Die Verbindungslinie der Punkte  $2 | 3$ ,  $4 | -5$  ist in drei gleiche Teile geteilt; der dem ersten Punkte zunächst liegende Teilpunkt ist  $\frac{8}{3} | \frac{1}{3}$ .

4) Die Ecken eines Dreiecks sind  $x_1|y_1, x_2|y_2, x_3|y_3$ ; die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der Gegenseite wird durch zwei Teilpunkte  $R, S$  in drei gleiche Teile geteilt, und man soll nun die Koordinaten des von der Ecke am weitesten entfernten Teilpunktes  $S$  angeben, der bekanntlich der *Schwerpunkt* der Fläche des Dreiecks ist. Man findet

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

5) Für das in 2) gegebene Dreieck ist der Punkt, in dem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten (Mittellinien des Dreiecks) begegnen (wieder der Schwerpunkt der Fläche des Dreiecks),  $1 \mid -\frac{2}{3}$ .

6) Bestimmen  $C, D$  in  $AB$  die Teilverhältnisse  $\nu, \nu'$ , so ist  $(\nu + 1)(\nu' + 1) \cdot CD = (\nu' - \nu)AB$ . Also folgt für einen Punkt  $E$ , für den  $AE:EB = \nu''$  ist,  $\frac{CE}{ED} = \frac{\nu - \nu''}{\nu'' - \nu'} : \frac{\nu + 1}{\nu' + 1}$ .

7) Aus dem Ergebnis von 6) folgt, daß  $CD$  durch die Punkte  $A, B$  in den Verhältnissen  $-\nu(\nu' + 1) : \nu'(\nu + 1)$  bzw.  $-(\nu' + 1) : (\nu + 1)$  geteilt wird.

8) In einem Dreieck  $P_1P_2P_3$  wird die Seite  $P_1P_2$  durch einen Punkt  $Q$  im Verhältnis  $P_1Q:QP_2 = n_2:n_1$  geteilt; ferner teilt man die Verbindungslinie  $QP_3$  des Punktes  $Q$  mit der Gegenecke  $P_3$  durch einen Punkt  $P$  in dem Verhältnis  $QP:PP_3 = n_3:(n_1 + n_2)$ . Die Koordinaten dieses letzten Teilpunktes  $P$  sind alsdann

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3}, \quad y = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3}{n_1 + n_2 + n_3}.$$

**15. Harmonische Teilung einer Strecke.** Zu einem nur dem absoluten Wert  $\nu$  nach gegebenen Teilverhältnis einer Strecke  $AB$  gibt es einen inneren Teilpunkt  $C$  mit  $AC:CB = n_1:n_2$  und einen äußeren Teilpunkt  $D$  mit  $AD:DB = -n_1:n_2$ .

Aus den Koordinaten von  $C$  in Nr. 14 folgen also die von  $D$  durch Einführung von  $-\nu$  statt  $\nu$  und ebenso umgekehrt. Aus dem ersten Punkt folgt der zweite in derselben Weise, wie aus dem zweiten wieder der erste; eine solche Eigenschaft einander zugeordneter Punkte heißt *Vertauschbarkeit*.

Zwei Punkte  $C, D$ , die eine Strecke  $AB$  nach entgegengesetzt gleichen Verhältnissen teilen, heißen ein Paar konjugiert harmonischer Punkte in bezug auf das Punktepaar  $AB$ .<sup>5)</sup> Von den Punktepaaren  $AB$  und  $CD$  teilt jedes das andere harmonisch, denn aus der Proportion  $AC:CB = -AD:DB$  folgt auch  $CA:AD = -CB:BD$  oder die in bezug auf

beide völlig symmetrische *Bedingung der harmonischen Lage von  $AB$  und  $CD$* :

$$(64) \quad AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0.$$

Harmonische Paare  $AB$ ,  $CD$  trennen sich, d. h. zwischen den Punkten eines Paares liegt stets ein Punkt des anderen. Bleibt  $AB$  fest und durchläuft  $C$  die ganze Gerade, so nimmt auch der konjugierte Punkt  $D$  jede Lage einmal an, und zwar nähern sich beide jeweiligen demselben Endpunkt der gegebenen Strecke von entgegengesetzten Seiten her, da sie ja durch ihn getrennt bleiben, und fallen für  $n_1 = 0$  in  $A$ , für  $n_2 = 0$  in  $B$  zusammen. *Zu der Mitte  $M$  einer Strecke  $AB$  ( $n_1 = n_2$ ) ist harmonisch konjugiert der unendlich ferne Punkt ( $n_1 = -n_2$ ) ihrer Geraden.* Somit erscheint die Halbierung einer Strecke als ein besonderer Fall ihrer harmonischen Teilung.

*Die harmonische Lage zweier Punktepaare überträgt sich auf alle ihre Parallelprojektionen*, da diese kein Teilverhältnis ändern. Auf der  $x$ -Achse gemessen hat daher die Bedingung (64) harmonischer Lage der Paare  $x_1|y_1$ ,  $x_2|y_2$  und  $x'|y'$ ,  $x''|y''$  den Ausdruck

$$(65) \quad \begin{aligned} (x' - x_1)(x'' - x_2) + (x'' - x_1)(x' - x_2) &= 0 \quad \text{oder} \\ x'x'' + x_1x_2 - \frac{1}{2}(x' + x'')(x_1 + x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Statt erst durch Koordinatentransformation  $AB$  als neue Abszissenachse einzuführen, können wir uns weiterhin einfacher nur auf die Achsenprojektionen der Punktepaare  $AB$ ,  $CD$  beziehen. Die symmetrische Beziehung (65) drückt jede der vier Abszissen durch die drei anderen linear aus, z. B. wenn  $u = \frac{x_1 + x_2}{2}$  die Abszisse des Mittelpunktes  $M$  von  $AB$  ist,

$$x'' = \frac{ux' - x_1x_2}{x' - u}.$$

Die Einführung von  $u$  formt die allgemeine Beziehung um in

$$(66) \quad (x' - u)(x'' - u) + (x_1 - u)(x_2 - u) = 0$$

mit der Bedeutung

$$(67) \quad \begin{aligned} MC \cdot MD + MA \cdot MB &= 0 \quad \text{oder}^6) \\ MC \cdot MD &= \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2. \end{aligned}$$

*Sind  $AB$ ,  $CD$  harmonische Paare, so ist das Produkt der Entfernungen der Punkte  $C$ ,  $D$  vom Mittelpunkt  $M$  des Paares  $AB$*

gleich dem Quadrat der halben Entfernung von  $A$  und  $B$ . Umgekehrt liegen also alle Paare von Punkten, deren Entfernungen von einem Punkte  $M$  ihrer Geraden ein positives konstantes Produkt  $p^2$  ergeben, harmonisch zu einem Paare mit der Mitte  $M$  und den Abständen  $+p$ ,  $-p$  von dieser Mitte.

B. 1) Im Falle der harmonischen Lage wird  $CD$  durch die Punkte  $A, B$  nach Nr 14, 7) im Verhältnis  $(-\nu + 1) : (\nu + 1)$  bzw.  $(\nu - 1) : (\nu + 1)$  geteilt, denn alsdann ist  $\nu' = -\nu$ .

2) Die Bedingung harmonischer Teilung von  $AB$  läßt sich umformen in

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Man nennt  $AB$  das *harmonische Mittel* von  $AC$  und  $AD$ .

16. **Gleichung des Punktepaares.** Die Vertauschbarkeit konjugiert harmonischer Punkte tritt in den Abszissenrelationen der vorhergehenden Nummer hervor, denn diese enthalten die Abszissen der konjugierten Punkte  $x'$ ,  $x''$  und  $x_1$ ,  $x_2$  nicht einzeln (vgl. z. B. Gl. (65)), sondern nur ihre Summe und ihr Produkt. In der Tat sind aus

$$(68) \quad x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

die Zahlenwerte  $x_1$ ,  $x_2$  bestimmbar als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(69) \quad ax^2 + 2bx + c = 0,$$

nämlich in den beiden äquivalenten Formen

$$(70) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{c}{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}},$$

in denen  $b^2 - ac = D$  die *Diskriminante der Gleichung* heißt.

Demnach können die Abszissen der Punkte eines Paares als Wurzeln einer quadratischen Gleichung definiert werden, wie die Abszisse eines einzelnen Punktes durch eine lineare Gleichung  $x = m$  gegeben ist. Einer besonderen Erläuterung bedürfen offenbar nur die Fälle, wo eine der Wurzeln 0 oder  $\infty$  sein soll. Wenn in der Gleichung (69) der Koeffizient  $c = 0$  ist, so betrachten wir sie immer noch als eine quadratische Gleichung, deren eine Wurzel  $x = 0$  ist, während die andere aus  $ax + 2b = 0$

folgt. Nun kann aber dieselbe quadratische Gleichung auch in der Form

$$c\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2b\left(\frac{1}{x}\right) + a = 0$$

geschrieben werden, und wir haben sie also auch beim Verschwinden von  $a$  noch immer als eine quadratische Gleichung zu betrachten (nicht als eine lineare), von deren Wurzeln die eine den Wert  $1 : x = 0$  oder  $x = \infty$ , die andere aber den Wert  $1 : x = -2b : c$  oder  $x = -c : 2b$  hat. Dies folgt auch aus der Betrachtung der beiden aufgelösten Formen (70), da sich in diesen die Diskriminante  $D$ , je kleiner  $c$  oder  $a$  werden, dem Werte  $b^2$  nähert. Somit wird ein Punktpaar, das den Punkt  $\infty$  enthält, durch eine quadratische Gleichung

$$0 \cdot x^2 + 2bx + c = 0$$

dargestellt, die scheinbar linear ist.

Setzen wir nun auch  $x' + x'' = -2b' : a'$ ,  $x'x'' = c' : a'$ , so daß

$$a'x^2 + 2b'x + c' = 0$$

$x'$ ,  $x''$  als Wurzeln liefert, so ergibt sich nach (65) die *Bedingung der harmonischen Lage von  $x'$ ,  $x''$  und  $x_1, x_2$ , ausgedrückt durch die Koeffizienten der die Paare definierenden Gleichungen* in der Gestalt

$$(71) \quad \frac{c}{a} + \frac{c'}{a'} - 2\frac{bb'}{aa'} = 0 \quad \text{oder} \quad ac' + ca' - 2bb' = 0.$$

**17. Involution.** Zu zwei Punktpaaren einer Geraden  $g$  kann unter Umständen ein drittes gefunden werden, das beide gleichzeitig harmonisch teilt; haben die Paare z. B. einen gemeinsamen Mittelpunkt  $M$ , so ist  $M, \infty$  das gemeinsame harmonische Paar. Es seien nun allgemein die Abszissen der beiden Punktpaare als die Wurzeln der quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten:

$$(72) \quad a'x^2 + 2b'x + c' = 0 \quad \text{und} \quad a''x^2 + 2b''x + c'' = 0$$

gegeben, und zwar seien die Diskriminanten dieser Gleichungen positiv, damit die Wurzeln reell werden. Alsdann ist nach (71) der algebraische Ausdruck des Problems die Bestimmung der



Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  der Gleichung  $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$  des dritten Paares aus den Bedingungen

$$(73) \quad \alpha c' + \gamma a' - 2\beta b' = 0, \quad \alpha c'' + \gamma a'' - 2\beta b'' = 0.$$

Diese Bedingungen sind in  $\beta : \alpha$  und  $\gamma : \alpha$  linear, liefern also ein einziges reelles Paar von Lösungen. Durch die Einsetzung derselben in die Gleichung des dritten Punktpaares erhalten wir als den eindeutig bestimmten Ausdruck des Problems:

$$(74) \quad (a'b'' - b'a'')x^2 + (a'c'' - c'a'')x + (b'c'' - c'b'') = 0.$$

Hat diese Gleichung zwei reelle Wurzeln  $x = \xi_1$  und  $x = \xi_2$ , so ist das zugehörige Punktpaar  $D_1, D_2$  wirklich vorhanden, es ist reell; im Falle imaginärer Wurzeln sagt man — einen Sprachgebrauch der Algebra auf die Geometrie übertragend — das zugehörige Punktpaar sei imaginär.

Übrigens liegen  $D_1$  und  $D_2$  nicht nur zu den beiden durch (72) dargestellten Punktpaaren harmonisch, sondern zu jedem durch

$$(75) \quad a'x^2 + 2b'x + c' + \lambda(a''x^2 + 2b''x + c'') = 0$$

dargestellten Punktpaar der Geraden  $g$ , wobei  $\lambda$  einen beliebigen Zahlenfaktor (Parameter) bedeutet, denn die Bedingung der harmonischen Lage

$$(76) \quad \alpha(c' + \lambda c'') + \gamma(a' + \lambda a'') - 2\beta(b' + \lambda b'') = 0$$

ist nun mit Rücksicht auf (73) erfüllt, welchen Wert auch  $\lambda$  haben mag.

Man sagt von diesen unendlich vielen Punktpaaren (75), daß sie eine *Involution* bilden und nennt die beiden der Gleichung (74) entsprechenden Punkte  $D_1, D_2$  die *Doppelpunkte* oder *Doppelemente der Involution*, die Gerade  $g$  den *Träger der Involution*<sup>8</sup>). Offenbar ist die Involution bestimmt, sobald man zwei Punktpaare kennt, die ihr angehören. Sind  $A, A'; B, B'; C, C' \dots$  Punktpaare der Involution und ist  $M$  die Mitte der Strecke  $D_1 D_2$ , so bestehen nach (67) in Nr. 15 die Gleichungen

$$(77) \quad \overline{MD_1}^2 = \overline{MD_2}^2 = MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \\ = MC \cdot MC' = \dots,$$

aus denen hervorgeht, daß die Doppelemente  $D_1, D_2$ , wenn sie reell sind, auf entgegengesetzten Seiten und in gleichem Ab-

stande von  $M$ , dem sogenannten *Mittelpunkte der Involution*, liegen. Der konstante Wert der Produkte  $MA \cdot MA'$ ,  $MB \cdot MB'$  ... heißt die *Potenz* der Involution. Je nachdem diese Potenz positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Strecken  $MA$  und  $MA'$ , ebenso  $MB$  und  $MB'$  usw. gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, ist  $MD_1^2$  und  $MD_2^2$  positiv oder negativ, also  $D_1$  und  $D_2$  reell oder imaginär.

Auch  $M$  gehört einem Punktepaare an, das zu  $D_1$ ,  $D_2$  harmonisch liegt; der zugehörige vierte harmonische Punkt liegt auf  $g$  im Unendlichen. Nach Nr. 16 erhält man daher die Gleichung für die Abszisse von  $M$ , indem man den Parameter  $\lambda$  in (75) aus  $a' + \lambda a'' =$  bestimmt; alsdann folgt

$$2x(a'b'' - b'a'') = c'a'' - a'c'',$$

und  $M$  hat somit die Abszisse

$$(78) \quad x = \frac{c'a'' - a'c''}{2(a'b'' - b'a'')}.$$

Offenbar ist  $M$  immer reell, selbst wenn die Gleichung (74) imaginäre Wurzeln haben sollte.

Die Bedingung dafür, daß drei durch

$$\begin{aligned} a'x^2 + 2b'x + c' &= 0, & a''x^2 + 2b''x + c'' &= 0, \\ a'''x^2 + 2b'''x + c''' &= 0 \end{aligned}$$

gegebene Punktepaare einer Involution angehören, ergibt sich nach (73) durch Elimination von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha c' + \gamma a' - 2\beta b' &= 0, & \alpha c'' + \gamma a'' - 2\beta b'' &= 0, \\ \alpha c''' + \gamma a''' - 2\beta b''' &= 0 \end{aligned}$$

in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} c' & a' & -2b' \\ c'' & a'' & -2b'' \\ c''' & a''' & -2b''' \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Wegheben des Faktors  $-2$  und Umstellung der Spalten in der Gestalt

$$(79) \quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

Sind  $x$  und  $x'$ ,  $y$  und  $y'$ ,  $z$  und  $z'$  die Abszissen der drei Punktepaare, so läßt sich die gewünschte Bedingung auch in der Form

$$(80) \quad \begin{vmatrix} 1 & x + x' & xx' \\ 1 & y + y' & yy' \\ 1 & z + z' & zz' \end{vmatrix} = 0$$

schreiben oder auch in der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & x & xx' \\ 1 & y & yy' \\ 1 & z & zz' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x' & xx' \\ 1 & y' & yy' \\ 1 & z' & zz' \end{vmatrix} = 0.$$

Hier kann man die positiven Glieder der ersten Determinante mit den negativen der zweiten in einer Gruppe zusammenfassen, alle übrigen Glieder in einer zweiten Gruppe. Addiert man alsdann  $x'y'z' - xyz$  zur ersten,  $xyz - x'y'z'$  zur zweiten Gruppe, so folgt

$$(81) \quad (z' - x)(x' - y)(y' - z) + (z' - y)(z - x')(y' - x) = 0$$

oder

$$(82) \quad AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB',$$

denn  $z' - x$  ist nichts anderes als  $AC'$ ,  $x' - y = BA'$ , usw

Die Gleichung (81) oder (80) geht in die mit  $z$  statt mit  $x$  als Veränderlicher geschriebene Gleichung (74) über, wenn man  $z' = z$  setzt, an Stelle von  $x + x'$ ,  $xx'$  wieder  $-2b':a'$ ,  $c':a'$  einführt und bei  $y + y'$ ,  $yy'$  analog verfährt. Da (80) von der Form

$$(83) \quad kzz' + l(z + z') + m = 0$$

ist, sind die Abszissen  $z, z'$  der Punktepaare einer Involution irgendwelche Zahlenpaare, die die Gleichung (83) erfüllen; die Abszissen der Doppelpunkte dieser Involution sind alsdann durch die quadratische Gleichung

$$(84) \quad kz^2 + 2lz + m = 0$$

bestimmt.

B. 1) Zu den Paaren von den Abszissen  $1 \mid 3$ ;  $6 \mid 8$  liegt das Paar  $x^2 - 9x + 15 = 0$  gleichzeitig harmonisch.

2) In bezug auf  $0 \mid -2$ ;  $1 \mid -5$  sind gleichzeitig konjugiert harmonisch  $\frac{1}{2} (5 \pm 3\sqrt{5})$ .

18. **Arten der Involution.** Man kann bei den Involutionen drei Fälle unterscheiden:

1. Sind die in (77) auftretenden Produkte positiv, so muß  $A$  in bezug auf  $M$  auf derselben Seite liegen wie  $A'$ , ebenso  $B$  auf derselben Seite wie  $B'$  usw. Ferner liegt nun jedes Punktepaar der Involution ganz innerhalb oder ganz außerhalb von jedem anderen Paare der Involution. Denn wenn z. B.  $B$  auf  $g$  außerhalb der Strecke  $AA'$  gelegen ist, so daß etwa  $MA > MB$  ist (Fig. 16), so muß wegen  $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$  notwendig  $MA' < MB'$  sein, also das Punktepaar  $A, A'$  innerhalb des Paares  $B, B'$  liegen.

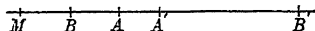


Fig. 16.

In diesem Fall, den *Steiner* als den Fall der *hyperbolischen* Involution bezeichnete, kann man zu  $A, A'$  und  $B, B'$  beliebige weitere Punktepaare der Involution erhalten,

indem man außerhalb der Geraden  $g$  einen beliebigen Punkt  $K$  annimmt und nun durch die Punkte  $K, A, A'$  und  $K, B, B'$  je einen Kreis beschreibt (Fig. 17); diese beiden Kreise schneiden sich noch in einem zweiten Punkte  $L$ , und wenn die Verbindungslinie  $KL$  die Gerade  $g$  in  $M$  trifft, so ist nach einem Satze der Elementargeometrie

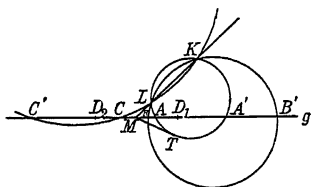


Fig. 17.

$$MK \cdot ML = MA \cdot MA' = MB \cdot MB'.$$

Jeder beliebige durch  $K$  und  $L$  gehende Kreis schneidet nun aus  $g$  ein Punktepaar der Involution aus, denn ist  $C, C'$  ein solches Paar, so wird  $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC'$ . Legt man von  $M$  eine Tangente an einen dieser Kreise und ist  $T$  ihr Berührungspunkt, so wird  $MT^2 = MK \cdot ML$ , und wenn man also auf die Gerade  $g$  von  $M$  aus nach beiden Seiten eine Strecke von der Länge  $MT$  abträgt, so sind die Endpunkte  $D_1, D_2$  die Doppelpunkte der Involution.

Ein besonderer Fall ist der, wo der eine Doppelpunkt  $D_2$  der hyperbolischen Involution im Unendlichen, der andere  $D_1$  im Endlichen liegt; nach Nr. 17 halbiert alsdann  $D_1$  die Strecke

zwischen zwei zusammengehörigen Punkten wie  $A$  und  $A'$  oder  $B$  und  $B'$  usw., die Punktepaare sind in bezug auf  $D_1$  symmetrisch angeordnet; der Mittelpunkt  $M$  der Involution liegt nun im Unendlichen. In diesem Falle nannte Steiner die Involution *gleichseitig-hyperbolisch*.

2. Wenn die in (77) auftretenden Produkte negativ sind, müssen  $A$  und  $A'$ , ebenso  $B$  und  $B'$  usw. auf verschiedenen Seiten von  $M$  liegen, und es müssen sich nun die einzelnen Punktepaare  $A, A'$ ;  $B, B'$ ;  $C, C'$ ; ... trennen, denn mit Rücksicht auf  $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$  muß, wenn z. B.  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $M$  liegen und  $MB > MA$  ist, für die auf der anderen Seite von  $M$  gelegenen Punkte  $A', B'$  die Beziehung  $MB' < MA'$  gelten, d. h. wenn  $B$  auf  $g$  außerhalb der Strecke  $A'A$  gelegen ist, muß  $B'$  zwischen  $A'$  und  $A$  liegen. Nach Steiner bezeichnet man diese Involution als *elliptisch*. Zur Konstruktion beliebiger weiterer Punktepaare der Involution beschreibt man über der Strecke  $AA'$  als

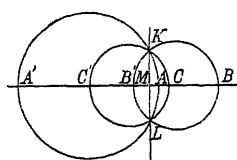


Fig. 18.

Durchmesser einen Kreis, ebenso über  $BB'$ .

Diese beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten  $K$  und  $L$  (Fig. 18), und alle Kreise, die die Strecke  $KL$  zur gemeinsamen Schnittsehne haben, treffen nun die Gerade  $g$  in Punktepaaren, die der Involution angehören. So ist z. B.  $C, C'$  ein solches Punktepaar, denn man hat  $MK \cdot ML = MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC'$ . Da die Winkel  $AKA'$ ,  $BKB'$ ,  $CKC'$ , ... rechte Winkel sind, kann man auch sagen: Die Involution wird auf der gegebenen Geraden  $g$  durch die Schenkel eines rechten Winkels ausgeschnitten, der sich um seinen Scheitel dreht, und es gibt zwei Punkte ( $K$  und  $L$ ), von denen die Punktepaare der Involution unter rechtem Winkel gesehen werden.

3. Hat die Gleichung (74) eine Doppelwurzel, so ist diese durch (78) gegeben; die Punkte  $D_1$ ,  $D_2$  und  $M$  fallen nun zusammen, und nach (77) liegt in  $M$  auch ein Punkt eines jeden Punktepaares der Involution. Diese heißt dann nach Steiner *parabolisch*.

**19. Imaginäre Punkte.** Wenn wir auch jedes Punktepaar einer gegebenen Geraden durch eine quadratische Gleichung zwischen den Abszissen darstellen können, so wissen wir doch noch nicht umgekehrt *jede* solche Gleichung als Ausdruck einer geometrischen Beziehung zwischen Punkten zu deuten, sondern vorläufig nur Gleichungen mit reellen Wurzeln. Nun hat die Algebra, um ihren Sätzen Allgemeinheit und Einfachheit des Ausdrucks, ihren Aufgaben die Lösbarkeit zu sichern, das Gebiet der reellen Zahlen zu dem *Gebiet der komplexen Zahlen* erweitert, indem sie neben den reellen die *imaginären Einheiten*  $\pm i$  durch die Definition  $i^2 = -1$  einführt. Alle komplexen Zahlen werden in der Form  $p + iq$  erhalten, wenn  $p, q$  alle reellen Zahlwerte durchlaufen. In diesem Gebiet hat jede algebraische Gleichung zweiten Grades  $ax^2 + 2bx + c = 0$  zwei Wurzeln, die, unter Voraussetzung reeller Koeffizienten, reell, zusammenfallend oder komplex sind, je nachdem die Diskriminante  $D = b^2 - ac$  positiv, Null oder negativ ist; dabei heißen die Wurzeln im letzten Fall insbesondere konjugiert imaginär, als komplexe Zahlen  $x = p + iq$ ,  $\bar{x} = p - iq$ , deren Summe und Produkt reell ist:  $x + \bar{x} = 2p$ ,  $x\bar{x} = p^2 + q^2$ .

Wir werden weiterhin vielfach erkennen, daß wir diesen Sprachgebrauch der Algebra auch auf die Geometrie übertragen müssen, um in sehr vielen Fällen ihre Sätze allgemein, einfach und streng ausdrücken zu können. Auf diesem Standpunkt der Entwicklungen ist klar, daß in der Koordinatengeometrie der geometrische Punkt völlig durch zwei reelle Zahlen ersetzt wird und daß es durchaus folgerichtig ist zu sagen: *wir führen auch für ein Koordinatenpaar, das aus komplexen Zahlen besteht, eine geometrische Bezeichnung als imaginärer (idealer) Punkt ein. Konjugiert heißen insbesondere solche imaginäre Punkte, deren Koordinaten beide konjugiert imaginär sind.*

*Wir haben gemäß dieser Definition die für die geometrischen Beziehungen reeller Punkte gefundenen algebraischen Ausdrücke als auch für die imaginären Punkte gültig anzunehmen und für diese die geometrischen Begriffsbildungen entsprechend zu erweitern.*

Sind

$$(85) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + ib_1 & x_2 = a_2 + ib_2 \\ y_1 = c_1 + id_1 & y_2 = c_2 + id_2 \end{cases}$$

die Koordinaten zweier komplexen Punkte  $P_1, P_2$ , so fassen wir auch jetzt wieder die Differenzen  $x_2 - x_1, y_2 - y_1$  als die Projektionen der Strecke  $P_1P_2$  auf die Koordinatenachsen auf und definieren die Entfernung  $d$  der beiden Punkte durch dieselbe Formel (9) in Nr. 5 wie früher. Reelle Entfernung besitzen also nicht nur reelle Punkte, sondern auch solche imaginäre, deren gleichnamige Koordinaten in dem rein imaginären Teil ( $ib_2 = ib_1, id_2 = id_1$  in (85)) übereinstimmen: Die Entfernung konjugiert imaginärer Punkte ( $a_2 = a_1, ib_2 = -ib_1, c_2 = c_1, id_2 = -id_1$  in (85)) ist rein imaginär. Wenn ein dritter Punkt  $x_3|y_3$  mit  $x_1|y_1, x_2|y_2$  allgemein das Teilverhältnis  $(x_3 - x_1) : (x_2 - x_3) = (y_3 - y_1) : (y_2 - y_3)$  bestimmt, so wollen wir, auch wenn dieses einen komplexen Wert hat, sagen, der Punkt  $x_3|y_3$  sei ein Teilpunkt der Strecke  $x_1|y_1, x_2|y_2$  in der durch diese beiden bestimmten Geraden. Wir erkennen also: *in jeder reellen Geraden liegen imaginäre Punkte*, und zwar zweifach unendlich viele, die erhalten werden, wenn das Teilverhältnis auch jeden komplexen Zahlwert annimmt (vgl. Nr. 14). Der zu zwei konjugiert imaginären Punkten gehörige Mittelpunkt  $u$  ist offenbar stets reell.

Ein Paar konjugiert imaginärer Punkte kann durch eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellt werden. Da das Problem von Nr. 17 zu zwei reellen Gleichungen eindeutig eine dritte reelle Gleichung liefert, so ist das *zu zwei willkürlich gegebenen Punktpaaren gleichzeitig harmonische Paar völlig eindeutig durch diese bestimmt*, selbst wenn es aus konjugiert imaginären Punkten besteht.

✱ 20. **Darstellung imaginärer Punkte aus ihren Koordinaten.** Der imaginäre Punkt kann in keiner Weise direkt geometrisch veranschaulicht werden, solange die reellen Koordinatenpaare die reellen Punkte der Ebene bedeuten.)\* *Unter*

\*) So ist die bekannte zuerst von C. Wessel gegebene, später von Gauß und Argand benutzte Darstellung der komplexen Zahlen  $z = p + iq$  durch die reellen Punkte von den rechtwinkligen Koordinaten

einer geometrischen Darstellung eines imaginären Punktes kann man nur die Angabe solcher reeller Punkte verstehen, die zu seiner für geometrische Konstruktionen verwendbaren Definition ausreichen. Die Möglichkeit, ein Paar konjugiert imaginärer Punkte durch reelle zu definieren, ist durch eine *elliptische Involution* gegeben, also durch eine Involution, deren Punktepaare  $AA', BB', \dots$  einander trennen (vgl. S. 40). Die zwei konjugiert imaginären Punkte, die reell definiert werden sollen, faßt man als die imaginären Doppelpunkte der Involution auf, ihre reelle Verbindungslinie ist der Träger der Punktepaare der Involution. Diese Paare sind die reellen *Stellvertreter* eines imaginären Punktes, und zwar wird dessen Darstellung von der des konjugierten Punktes dadurch unterschieden, daß man der Involution einen bestimmten, durch die Ordnung der Punkte festgelegten Sinn zuweist; der Sinn  $ABA'B'$  entspricht z. B. dem einen der beiden gegebenen konjugiert imaginären Punkte, der Sinn  $AB'A'B$  dem anderen (vgl. Fig. 18, S. 40).<sup>9)</sup>

Haben die beiden zur reellen Darstellung vorgelegten Punkte auf ihrer reellen Verbindungslinie konjugiert imaginäre Abszissen, die die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$(86) \quad kx^2 + 2lx + m = 0 \quad (l^2 - km < 0)$$

sind, so sind nach S. 38 die Abszissen der Punktepaare der zugehörigen elliptischen Involution Werte  $x, x'$ , die die Gleichung

$$(87) \quad kxx' + l(x + x') + m = 0$$

erfüllen (vgl. S. 38). Ändert man hier  $x$  in bestimmtem Sinn, so ändert sich der zugehörige Wert  $x'$  in demselben Sinn; diese Tatsache erläutert analytisch die Möglichkeit, in der vorhin angegebenen Weise die Darstellung des einen der beiden konjugiert imaginären Punkte von der des anderen unterscheiden zu können.

---

$p, q$  nicht im Sinn der Euklidschen Geometrie geometrisch zu nennen, denn sie interpretiert nur *eine* Variable im algebraischen Sinn. Diese Interpretation hat mehrfach zu der irrigen Anschauung geführt, der Punkt von den Koordinaten  $p+iq|0$  liege nicht in der  $x$ -Achse, während er doch die Strecke  $p|0, q|0$  teilt.



B. 1) In bezug auf das imaginäre Paar  $a \pm bi$  (vom Mittelpunkt  $a$ ) findet man den zu dem reellen Punkt  $x'$  konjugiert harmonischen  $x''$  aus der Gleichung (Nr. 15, Gl. (66))

$$(x' - a)(x'' - a) = (bi)^2 = -b^2.$$

Dieser ist also bezüglich  $a$  der symmetrische zu dem konjugiert harmonischen von  $x'$  in bezug auf das Stellvertreterpaar  $a \pm b$ .

2) Dieselbe Gleichung liefert die reelle Definition eines zu einem reellen Paare  $x', x''$  harmonischen Paares, dessen Mittelpunkt zwischen  $x'$  und  $x''$  liegt.

3) Man bestätige nach Nr. 14, daß  $a \pm bi$  die Strecke  $a \pm b$  harmonisch teilt.

4) Das Punktepaar, das zu dem durch  $ax^2 + 2bx + c = 0$  gegebenen Paare und zu dem imaginären Paare  $x^2 + 1 = 0$  harmonisch liegt, ist durch  $bx^2 - (a - c)x - b = 0$  bestimmt und immer reell, wenn  $a, b, c$  reelle Zahlen sind.

**21. Polarkoordinaten.** Außer der Methode der Parallelkoordinaten wird zum Ausdruck der Lage eines Punktes noch eine andere häufig angewendet, die aus den Betrachtungen von Nr. 4 und 5 folgt.

Ist ein fester Punkt  $O$  als *Nullpunkt* oder *Pol* und ein durch  $O$  gelegter Halbstrahl  $OX$  als *Nullstrahl* oder *Polarachse* gegeben, so läßt sich ein

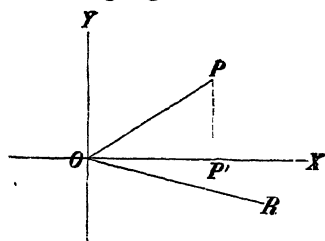


Fig. 19.

Punkt  $P$  der Ebene festlegen, wenn man den Winkel  $\vartheta$  des Strahls  $OP$  mit dem Nullstrahl und die Entfernung  $r = OP$  kennt (Fig. 19). Der Winkel  $\vartheta$ , der von  $OX$  aus in dem der Bewegung eines Uhrzeigers ent-

gegengesetzten Sinn (in positivem Sinn) gemessen werden möge, heißt die *Amplitude* oder *Anomalie* (auch *Argument*), die Strecke  $r$  der *Radiusvektor* des Punktes  $P$ ;  $\vartheta$  und  $r$  heißen die *Polarkoordinaten* von  $P$ .

Die Größe  $r$  kann auch negative Werte annehmen; wir wollen verabreden, daß alsdann die absolute Länge dieses Radiusvektors nicht auf dem freien Schenkel des zugehörigen Winkels  $\vartheta$  abzutragen ist, sondern auf der rückwärtigen Verlängerung dieses Schenkels über  $O$  hinaus. Ferner kann man

den Winkel des Radiusvektors  $OP$  mit der Polarachse  $OX$  auch dadurch messen, daß man die Polarachse in negativem Sinn (im Sinn der Bewegung eines Uhrzeigers) um  $O$  dreht, bis sie in die Lage  $OP$  gelangt. So hat z. B. der Punkt  $P$  in Fig. 19 die Polarkoordinaten  $\vartheta = 32^\circ$ ,  $r = 2 \text{ cm}$ , oder auch  $\vartheta = -(360^\circ - 32^\circ) = -328^\circ$ ,  $r = 2$ , oder endlich  $\vartheta = 180^\circ + 32^\circ = 212^\circ$ ,  $r = -2$ . Offenbar erhält man einen durch  $\vartheta$  und  $r$  gegebenen Punkt  $P$  auch dann, wenn man  $\vartheta$  um beliebige ganzzahlige Vielfache von  $360^\circ$  vermehrt oder vermindert. Statt  $\vartheta$  als Winkel, also in Graden, Minuten und Sekunden anzugeben, kann man natürlich unter  $\vartheta$  auch das zugehörige Bogenmaß bei einem Kreis vom Radius 1 verstehen.

Man sieht daher, daß ein Punkt mit den Polarkoordinaten  $\vartheta, r$  auch die Wertepaare  $\vartheta \pm 2n\pi, r$  oder  $\vartheta \pm (2n + 1)\pi, -r$  zu Polarkoordinaten hat, wenn  $n$  eine ganze positive Zahl oder die Null bedeutet. Umgekehrt aber ist der Punkt selbst durch seine Polarkoordinaten eindeutig bestimmt.

Für den Pol  $O$  ist  $r = 0$ ,  $\vartheta$  beliebig.

Offenbar könnte nach Einführung eines zweiten Poles  $O'$  auf  $OX$  der Punkt  $P$  auch durch die bloße Angabe der Anomalien  $XOP, XO'P$  eindeutig und, wie man sagt, *bipolar* bestimmt werden. So gibt es noch viele Koordinatensysteme, die notwendig durcheinander ersetzbar sind.

**22. Zusammenhang zwischen den Parallelkoordinaten  $x|y$  eines Punktes  $P$  und seinen Polarkoordinaten  $\vartheta, r$ .** Für den gebräuchlichsten Fall, wo rechtwinklige Koordinaten in Polarkoordinaten mit demselben Nullpunkt und der positiven  $x$ -Achse als Nullachse umzusetzen sind, ist, wie im wesentlichen schon in Nr. 4 gezeigt wurde:

$$(88) \quad x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

denn  $x, y$  sind die senkrechten Projektionen des Vektors  $r$  auf die Achsen. Zum umgekehrten Übergang gilt

$$(89) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos \vartheta},$$

so daß in der Tat zu jedem Vorzeichen von  $r$  ein bestimmter Winkel  $\vartheta$  gehört und beide um  $\pi$  verschieden sind. Andererseits hat man der Quadratwurzel  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  das Plus- oder

Minuszeichen zu geben, je nachdem man aus  $\operatorname{tg} \vartheta = y : x$  einen Winkel  $\vartheta$  entnimmt, für den  $x$  und  $\cos \vartheta$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Beides kann eintreten, denn  $\operatorname{tg} \vartheta = y : x$  ergibt nicht nur *einen* Winkel  $\vartheta$ , sondern als geradeso berechtigt den Winkel  $\vartheta_1 = \vartheta + \pi$ , und es haben nun  $\cos \vartheta$  und  $\cos \vartheta_1$  Zahlenwerte von entgegengesetzten Vorzeichen.

Bei schiefen Achsen mit dem Winkel  $\angle XOY = \omega$  ist  $OP : P'P = \sin OP'P : \sin P'OP$ , also

$$(90) \quad P'P = y = r \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega}, \quad \text{ebenso} \quad OP' = x = r \frac{\sin (\omega - \vartheta)}{\sin \omega}$$

ähnlich wie vorhin. Umgekehrt ist auszugehen von

$$(91) \quad y : x = \sin \vartheta : \sin (\omega - \vartheta).$$

Da dieses Verhältnis  $y : x$  nur von der Anomalie  $\vartheta$  abhängt, ist für die Koordinaten aller Punkte des Halbstrahles  $OP$   $y : x = \text{const.}$  Alle Punkte mit gleichem Vektor liegen wiederum auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt in  $O$ .

Wenn endlich der Nullstrahl  $OR$  mit der Achse  $OX$  nicht zusammenfällt, sondern diese den Winkel  $\angle ROX = \alpha$  mit ihm bildet (Fig. 19) und  $\angle ROP = \vartheta'$  ist, so ist in den vorigen Formeln einfach  $\vartheta$  durch  $\vartheta' - \alpha$  zu ersetzen; also für rechtwinklige Koordinaten

$$(92) \quad x = r \cos (\vartheta' - \alpha), \quad y = r \sin (\vartheta' - \alpha).$$

B. 1) Die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten sind in solche für Polarkoordinaten zu übertragen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5mx & \text{Auf. } r &= 5m \cos \vartheta \\ x^2 - y^2 &= a^2 & r^2 \cos 2\vartheta &= a^2. \end{aligned}$$

2) Die folgenden Gleichungen in Polarkoordinaten sind in solche zwischen rechtwinkligen Koordinaten umzusetzen:

$$\begin{aligned} r^2 \sin 2\vartheta &= 2a^2 & \text{Auf. } xy &= a^2 \\ r^2 &= a^2 \cos 2\vartheta & (x^2 + y^2)^2 &= a^2 (x^2 - y^2) \\ r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta &= a^{\frac{1}{2}} & x^2 + y^2 &= (2a - x)^2 \\ r^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta & (2x^2 + 2y^2 - ax)^2 &= a^2 (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

## Zweites Kapitel.

### Der Gleichungsbegriff und die Gerade.

23. Eine Gleichung zwischen den Koordinaten definiert einen geometrischen Ort. Wenn die auf gegebene Achsen bezogenen Koordinaten  $x|y$  unabhängig voneinander beliebige Werte  $x = a$ ,  $y = b$  annehmen, so entspricht der Gesamtheit der Wertepaare der beiden unabhängigen Veränderlichen (Variablen) die Gesamtheit der Punkte der Ebene und nach unseren Festsetzungen (Nr. 19) auch umgekehrt. Eine Abhängigkeit zwischen diesen Veränderlichen wird ausgedrückt, wenn von ihnen eine Gleichung

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

erfüllt werden soll. Wir setzen die Funktion  $f(x, y)$  stetig und auf die Form einer ganzen rationalen Funktion gebracht voraus. Jede der Veränderlichen wird durch das Bestehen dieser Gleichung eine stetige Funktion der anderen.

Eine solche Gleichung reicht nicht hin, zwei Unbekannte  $x|y$  zu bestimmen; vielmehr genügt immer noch eine unbegrenzte Anzahl von Wertepaaren  $x|y$  der Gleichung. Aus allen sämtlichen Punkten der Ebene wird also eine Vereinigung von unendlich vielen Punkten ausgeschieden, deren Koordinaten durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$  verbunden sind.\*) Diese Vereinigung haben wir als die geometrische Bedeutung der Gleichung anzusehen und nennen sie den durch die Gleichung definierten geometrischen Ort oder den Ort von der Gleichung  $f(x, y) = 0$ .

---

\*) Die Gesamtheit der Werte von  $n$  Veränderlichen heißt eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; daher heißt die Gesamtheit der Punkte der Ebene ein Gebilde von zwei Dimensionen oder zweiter Stufe. Die Punkte, von deren Koordinaten nur eine unabhängig veränderlich ist, erfüllen ein Gebilde von einer Dimension oder erster Stufe.

Wir kennen schon verschiedene Beispiele geometrischer Orte. Nach Nr. 5 hat ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x|y$  die Entfernung  $d$  von  $a|b$ , wenn

$$(2) \quad d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Diese Gleichung wird aber, wenn wir  $a|b$  und  $d$  gegeben denken, durch unzählige Wertepaare  $x|y$  erfüllt, nämlich durch die Koordinaten aller Punkte auf einer mit dem Radius  $d$  um  $a|b$  als Mittelpunkt beschriebenen Kreisperipherie, aber nicht durch die anderer Punkte, da solche einen von  $d$  verschiedenen Abstand haben. Also ist diese Kreislinie der Ort, den die Gleichung (2) darstellt.

Wenn wir ferner von einem Punkte nur wissen, daß er die Abszisse  $x = a$  hat, so kann er, welches auch seine Ordinate sei, nur in der zur  $y$ -Achse parallelen Geraden liegen, die die  $x$ -Achse in der Entfernung  $a$  vom Nullpunkt schneidet (Nr. 3). Wird also der Wert von  $y$  unbestimmt gelassen, so ist jene  $y$ -Parallele ( $P'P_1$  in Fig. 4, S. 4) der Ort der durch die eine Gleichung  $x = a$  dargestellten Punkte  $a|y$ . So ist die  $y$ -Achse z. B. der Ort der Punkte von der Abszisse Null. Wir haben in Nr. 16 schon zwei Punkte der  $x$ -Achse zugleich durch eine Gleichung zweiten Grades in  $x$  definiert. Derselben Gleichung genügen also die Abszissen aller Punkte in den beiden  $y$ -Parallelen, die durch jene beiden Punkte der  $x$ -Achse gehen. So erkennen wir allgemein: *eine Gleichung, die die eine Koordinate  $y$  bez.  $x$  nicht enthält, definiert einen Ort, der aus parallelen Geraden zur  $y$ - bez.  $x$ -Achse besteht.*

**24. Gleichung einer Kurve.** Ist das Koordinatensystem und eine Gleichung  $f(x, y) = 0$  gegeben, so können wir von dem durch sie definierten Ort beliebig viele Punkte bestimmen. Wir nehmen für die Abszisse einen beliebigen Wert  $x = a$  an und suchen, welche Wertepaare  $a|y$  der gegebenen Gleichung genügen, bestimmen also die Ordinaten  $y$  so, daß  $f(a, y) = 0$  wird. Die numerische Auflösung dieser Gleichung für die Unbekannte  $y$  gibt bestimmte Wurzeln  $y = p, q, r, \dots$ . Jeder Punkt  $a|p, a|q, a|r, \dots$ , dessen Abszisse der angenommene Wert und dessen Ordinate eine jener Wurzeln ist, gehört dem

gesuchten Orte an, da seine Koordinaten die Gleichung des-  
 selben erfüllen. Sodann nehmen wir für  $x$  irgend einen anderen  
 Wert  $a'$  und finden aus  $f(a', y) = 0$   
 als Wurzeln die Ordinaten einer  
 zweiten Reihe von Punkten  $a'|p'$ ,  
 $a'|q'$ ,  $a'|r'$ , ... desselben Ortes, usw.  
 (Fig. 20). Wir erhalten dergestalt  
 beliebig viele getrennte (diskrete)  
 Punkte, die dem Orte angehören.

Nun soll aber  $y$  eine *stetige*  
 Funktion von  $x$  sein, d. h. un-  
 endlich kleinen Änderungen von  $x$   
 folgen vermöge  $f(x, y) = 0$  auch un-  
 endlich kleine Änderungen von  $y$

entsprechen. Genauer gesprochen heißt dies: macht man die  
 Abszissendifferenz  $a' - a$  beliebig klein, so werden auch die  
 Ordinatendifferenzen  $p' - p$ ,  $q' - q$ ,  $r' - r$ , ... kleiner als jeder  
 vorgebbare kleine Betrag. Denken wir also die Intervalle der auf-  
 inanderfolgenden  $y$ -Parallelen von den Abszissen  $a, a', a'', \dots$   
 unmeßbar klein, so liegen auch die in ihnen enthaltenen Punkte  
 des Ortes, in gewissen Folgen, einander unmeßbar nahe oder  
 bilden kontinuierliche Reihen. Die Punkte des Ortes sind  
 also durch einen stetigen Linienzug zu verbinden: *der durch die*  
*Gleichung (1) definierte Ort ist eine Kurve;  $f(x, y) = 0$  heißt*  
*die Gleichung der Kurve.* Die den Gleichungen  $f(x, y) = 0$  und  
 $y = a$  gleichzeitig genügenden Punkte sind die Schnittpunkte  
 der Kurve mit dieser  $y$ -Parallelen.

Die reellen Punkte der Kurve können so sofort in dem  
 Achsensystem graphisch eingetragen werden und bilden die  
*reellen Kurvenzüge*.\*) Wir sagen aber überhaupt: *die Kurve*

\*) Die graphischen Darstellungen der Kurven aus Gleichungen sind  
 für den Anfänger äußerst nützliche Übungen. Für die Beispiele unten  
 ist die Verwendung von Papier mit Quadrateinteilung (Millimeterpapier)  
 zu empfehlen. Insbesondere findet dieses graphische Verfahren häufig  
 Anwendung in den Naturwissenschaften, um durch die interpolierte Kurve  
 das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit zwischen den auf experimen-  
 tellem Wege gefundenen zusammengehörigen Werten zweier Größen  
 übersichtlich vor Augen zu führen.

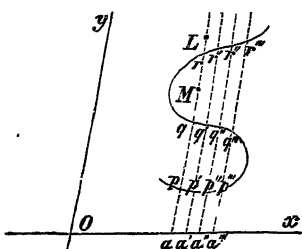


Fig. 20.

geht durch den Punkt  $x'|y'$ , oder dieser Punkt liegt auf der Kurve, wenn für seine Koordinaten  $f(x', y') = 0$  ist. Daher gehören der Kurve auch die imaginären Punkte an, deren komplexe Koordinaten ihre Gleichung befriedigen und nach demselben Verfahren gefunden werden. Haben insbesondere die Koeffizienten der Gleichung reelle Werte oder, kürzer gesagt, ist die Gleichung  $f(x, y) = 0$  selbst reell, so gehören bekanntlich die komplexen Wertepaare, die ihr genügen, paarweise zusammen: befriedigen  $x = p + qi$ ,  $y = p' + q'i$  die Gleichung, so auch  $\bar{x} = p - qi$ ,  $\bar{y} = p' - q'i$ . Liegt also auf einer Kurve von reeller Gleichung ein imaginärer Punkt, so geht sie auch durch den konjugiert imaginären Punkt.

\* *Zusatz.* Die Koordinaten eines nicht der Kurve angehörigen Punktes geben, in  $f(x, y)$  eingesetzt, einen von Null verschiedenen Funktionswert; dieser ist reell, wenn die Gleichung und  $x|y$  reell sind. Bewegt sich der reelle Punkt  $x|y$  in der Ebene, so geben die Koordinaten aller aufeinanderfolgenden Lagen Funktionswerte  $f(x, y)$  von unveränderlichem Vorzeichen, bis der bewegliche Punkt die Kurve  $f(x, y) = 0$  überschreitet oder ins Unendliche rückt. Denn nur durch die Werte 0 und  $\infty$  hindurch kann ein Funktionswert sein Vorzeichen wechseln; so geben also die Koordinaten von  $L$  und die von  $M$  in Fig. 20 den Funktionswerten  $f(x, y)$  entgegengesetzte Vorzeichen. Die reellen Kurvenzüge zerschneiden somit die Ebene in Felder, deren Begrenzung eventuell durch das Unendliche vervollständigt wird, so daß für alle Punkte eines Feldes die Funktion  $f(x, y)$  Werte von konstantem Vorzeichen annimmt. Hiernach kann man eine positive und eine negative Seite der Kurve unterscheiden.

B. 1) Man verzeichne in einer Figur eine Reihe von Punkten, die der Gleichung  $y = 2x + 3$  genügen.

Für die Werte  $x = -2, -1, 0, 1, 2$  usw. findet man die Werte von  $y$  bez. gleich  $-1, 1, 3, 5, 7$  usw.; die entsprechenden Punkte liegen alle in einer Geraden.

2) Man verzeichne den durch die Gleichung  $y = x^2 - 3x - 2$  dargestellten Ort.

Man findet für  $x = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$  die bez. Werte  $y = 2, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{13}{4}, -4, -\frac{17}{4}, -4, -\frac{13}{4}, 2$ .

$-2$ ,  $-\frac{1}{4}$ ,  $2$ . Wenn man diese Punkte aufträgt, so reichen sie hin, die Form der Kurve anzudeuten, die dann unbegrenzt fortgesetzt werden kann, indem man dem  $x$  größere positive oder negative Werte gibt.

3) Man stelle die Kurve  $y = 3 \pm \sqrt{20 - x - x^2}$  dar. Jedem Werte von  $x$  entsprechen zwei Werte von  $y$ ; nur für die Wurzeln der Gleichung  $20 - x - x^2 = 0$ , also für  $x = 4$  und  $x = -5$ , fallen die zugehörigen Wertepaare  $y$  zusammen in  $y = 3$ . Kein reeller Zug der Kurve liegt rechts von der Geraden  $x = 4$  oder links von der Geraden  $x = -5$ , da für größere positive oder negative Werte von  $x$  der Wert von  $y$  imaginär wird.

## 25. Verschiedene Formen der Gleichung einer Kurve.

Hat die Kurve in einem gegebenen Koordinatensystem die Gleichung  $f(x, y) = 0$ , so stellt offenbar zunächst auch jede Gleichung  $cf(x, y) = 0$  denselben Ort dar, wenn  $c$  eine willkürliche von Null verschiedene Konstante ist; denn die Funktionen  $f(x, y)$  und  $cf(x, y)$  verschwinden nur gleichzeitig. Jede Gleichung darf, ohne ihre geometrische Bedeutung zu ändern, mit beliebigen konstanten Faktoren multipliziert werden. Daher kann z. B. ein beliebiger Koeffizient der Gleichung gleich Eins gemacht werden.

Wird ferner statt der Längeneinheit etwa der  $k^{\text{te}}$  Teil derselben als neue Einheit eingeführt, so lautet die Gleichung in den nach dem neuen Maße gemessenen Koordinaten

$$f(kx', ky') = 0.$$

Die wichtigsten Umformungen einer Gleichung, die ihre geometrische Bedeutung nicht beeinflussen, sind die Koordinatentransformationen. Nehmen wir als Achsen der  $x'|y'$  zwei Geraden, die mit der  $x$ -Achse die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  bilden und deren Schnittpunkt die Koordinaten  $x_0|y_0$  hat, so sind nach (54), S. 26 an die Stelle der alten Veränderlichen  $x, y$  die Ausdrücke einzusetzen:

$$x = x_0 + x' \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}, \quad y = y_0 + x' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}.$$

Die Koordinatentransformationen gehören so zu den *linearen Substitutionen*, unter denen man die Ersetzung der Veränderlichen  $x|y$  durch lineare Funktionen zweier neuen Veränderlichen  $x'|y'$  versteht. Ordnet man die gegebene Gleichung, nach Ausführung der



angegebenen Substitution für  $x|y$ , nach Potenzen der neuen Veränderlichen  $x'|y'$ , so nimmt sie eine im allgemeinen von  $f(x, y) = 0$  ganz verschiedene Form  $f'(x', y') = 0$  an, aber  $f(x, y) = 0$  und  $f'(x', y') = 0$  stellen ein und dieselbe Kurve, auf verschiedene Achsen bezogen, dar. Alle diese geometrisch äquivalenten Gleichungsformen sind in  $f(x, y) = 0$  enthalten, wenn man für die Veränderlichen die angegebenen linearen Ausdrücke eingesetzt und darin den vier Größen  $x_0, y_0, \alpha, \beta$  beliebige Werte beigelegt denkt.

Endlich erhält die ursprüngliche Gleichung noch andere Formen durch den Übergang zu anderen Arten von Koordinaten, z. B. von Parallel- zu Polarkoordinaten. Der Ausdruck dafür ist die Substitution (vgl. (90), S. 46)

$$x = r \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\sin \omega}, \quad y = r \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega},$$

und ihr Ergebnis ist die Gleichung der Kurve  $f(x, y) = 0$  in Polarkoordinaten  $\varphi(\vartheta, r) = 0$ , wobei

$$(3) \quad f\left(r \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\sin \omega}, r \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega}\right) = \varphi(\vartheta, r).$$

Umgekehrt kann jede vorgelegte Gleichung zwischen zwei Veränderlichen  $f(x, y) = 0$  in verschiedenen Koordinatensystemen gedeutet werden und stellt alsdann im allgemeinen verschiedene geometrische Orte dar. So ist z. B.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2$  in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung eines Kreises (Nr. 23), dagegen die Gleichung einer ganz anderen Kurve, sobald wir uns die Koordinaten schiefwinklig denken. Denn bei beliebigem Achsenwinkel  $\omega$  drückt jene Gleichung nicht mehr aus, daß die Punkte  $x|y$  und  $a|b$  den konstanten Abstand  $d$  haben (vgl. Nr. 5). Jedoch stehen die Punkte  $x'|y'$  dieser neuen Kurve zu den  $x|y$  des Kreises in einer gewissen Abhängigkeit oder Beziehung, deren Ausdruck durch die Formeln der Transformation zwischen den beiden Achsensystemen geliefert wird, wenn man jene zweite Auffassung derselben gemäß Nr. 13 weiter ausbildet (vgl. Kap. IV).

B. 1) Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung  $(y - \frac{1}{2})^2 + x^2 = \frac{1}{4}$ ; wird die  $y$ -Achse als Nullachse von Polarkoordinaten mit demselben Nullpunkt genommen, so hat dieselbe Kurve die Gleichung  $r = \cos \vartheta$ . (Nr. 22)

2) Man transformiere die Gleichung  $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$  von Achsen, die unter dem Winkel von  $60^\circ$  geneigt sind, zu den Halbierungslinien der Winkel zwischen den alten Achsen. Sie wird  $x'^2 - 27y'^2 + 12 = 0$ . (Nr. 12, 2.)

3) Man zeichne die Kurve  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ , wenn die Gleichung auf Achsen von dem Winkel  $\omega = \frac{1}{2}\pi$  oder  $\frac{1}{4}\pi$  oder  $\frac{1}{6}\pi$  bezogen wird.

**26. Analytische Geometrie der Ebene.** Die *reine* Geometrie definiert ihre Gebilde durch gewisse geometrische Eigenschaften derselben. Offenbar können wir aber irgendwelche Lagenbeziehungen zwischen Punkten in Koordinatenausdrücken angeben, da wir für die elementare Grundlage derselben, die Entfernung zweier Punkte, schon eine allgemeine Koordinatenformel kennen. Die geometrische Definition einer Kurve können wir daher umsetzen in eine Gleichung zwischen Koordinatenausdrücken derart, daß diese Gleichung von den Koordinaten aller Punkte erfüllt wird, die jene geometrischen Lageneigenschaften haben. Wenn z. B. der Kreis der Ort eines Punktes  $P$  ist, der sich in konstanter Entfernung von einem festen Punkt  $M$  befindet, so ist die Gleichung des Kreises die Bedingung, daß der Koordinatenausdruck des Abstandes zwischen  $M$  und  $P$  einer Konstanten gleich sei.

Wenn umgekehrt eine Gleichung zwischen Koordinaten gegeben ist, so werden die geometrischen Eigenschaften der durch sie dargestellten Kurve aus ihr abzuleiten sein. Zunächst drückt offenbar die gerade vorgelegte Gleichung gewisse Lagen-eigenschaften der Kurvenpunkte gegenüber einem Achsensystem aus, von dessen Wahl die geometrischen Eigenschaften der Kurve selbst ihrem Wesen nach gänzlich unabhängig sind. Daraus schließen wir einerseits, daß wir die Gleichung durch Transformation unter Umständen vereinfachen und zur Untersuchung gewisser Aufgaben geeigneter machen können. Hat z. B. die Kurve eine Symmetrieachse, so läßt sich dies aus der vorgelegten Gleichung  $f(x, y) = 0$  zwar auch finden, aber man erkennt es unmittelbar, wenn man sie so zu rechtwinkligen Koordinaten transformiert, daß jene Symmetrieachse etwa zur  $x'$ -Achse wird. Denn die neue Gleichung enthält dann notwendig nur gerade Potenzen von  $y'$ , da sie zu jedem  $x'$  paar-

weise entgegengesetzt gleiche Wurzeln  $\pm y'$  geben muß (vgl. Nr. 12, 2).

Andrerseits folgern wir, daß sich auch an der allgemeinen Form des Koordinatenausdrucks einer geometrischen Eigenschaft die Unabhängigkeit seiner Bedeutung irgendwie zeigen wird. Ein wichtiges Beispiel bietet uns dafür die Abstandsformel:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega;$$

denn, transformieren wir sie zu Achsen von dem Winkel  $\omega'$  und werden  $x_1 | y_1, x_2 | y_2$  zu  $x'_1 | y'_1, x'_2 | y'_2$ , so kann die transformierte Formel so geschrieben werden, daß sie aus der vorigen durch die angedeutete Substitution (Beisetzung der Akzente) hervorgeht (vgl. Nr. 11, 2). Das Kennzeichen geometrischer Bedeutung der rechten Seite ist diese Übereinstimmung ihrer Form in der ursprünglichen und der transformierten Gestalt.

*Die Disziplin, die die geometrischen Probleme auf Grund des Koordinatenbegriffs nach rechnenden Methoden behandelt, heißt analytische Geometrie.* Die Einführung der dem Wesen der geometrischen Untersuchung ganz fremden Koordinaten, die so die analytische Geometrie charakterisiert, scheint ein Umweg zu sein, da erst die Unabhängigkeit von der Koordinatenwahl geometrische Bedeutung geben kann. In Wahrheit verleiht ihr dieses Hilfsmittel jedoch einen großen Vorteil vor der reinen oder *synthetischen Geometrie*, die nur mit den geometrischen Elementen unmittelbar operiert; denn die analytische Geometrie kann die Theorien und Methoden der *Algebra* und *Analysis* im weitesten Umfange ihren geometrischen Zwecken dienstbar machen.

**27. Ordnung algebraischer Kurven.** Man unterscheidet *transzendente* und *algebraische Kurven*, je nachdem deren Gleichung in Parallelkoordinaten  $f(x, y) = 0$  transzendent oder algebraisch ist. Daher stellen Gleichungen in Polarkoordinaten algebraische Kurven dar, wenn sie den Radiusvektor  $r$  und die trigonometrischen Funktionen von  $\vartheta$  in algebraischen Verbindungen enthalten. Hier sollen *ausschließlich* nur algebraische Kurven in Betracht gezogen werden.

Eine algebraische Gleichung  $f(x, y) = 0$ , bei der nach Nr. 23 angenommen wird, daß  $f(x, y)$  auf die Form einer ganzen rationalen Funktion gebracht sei, hat einen bestimmten Grad  $n$ , der den höchsten Wert der Exponentensumme der Veränderlichen in einem Gliede darstellt. So ist z. B. die Gleichung  $xy + 2x + 3y - 4 = 0$  vom zweiten Grad, wird aber vom ersten Grad, sobald das erste Glied fehlt.

Der Grad einer Gleichung wird durch Koordinatentransformation\*) nicht geändert. Denn erstens kann eine solche den Grad  $n$  der Gleichung nicht erhöhen. Ist nämlich  $x^m y^{n-m}$  ein Glied mit der höchsten Exponentensumme, so geht dasselbe durch Transformation über in das Produkt der  $m^{\text{ten}}$  und  $n - m^{\text{ten}}$  Potenz je einer linearen Funktion der neuen Veränderlichen  $x' | y'$ ; daher kann offenbar in keinem Glied der Entwicklung nach Potenzen von  $x' | y'$  die Exponentensumme die Zahl  $n$  überschreiten. Zweitens kann die Transformation den Grad auch nicht erniedrigen, weil man sonst bei Wiederherstellung der ursprünglichen Gleichung durch die umgekehrte, wiederum lineare Transformation der transformierten Gleichung den etwa verminderten Grad wieder auf  $n$  erhöhen müßte, entgegen dem eben Bewiesenen.

Der Grad der Gleichung ist somit eine von der Achsenwahl unabhängige, also geometrische Eigenschaft der Kurve selbst. Man nennt eine Kurve, deren Gleichung vom  $n^{\text{ten}}$  Grade ist, eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung.

\* Eine allgemeine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades wie  $f(x, y) = 0$  steigt auch in jeder einzelnen Veränderlichen bis zum  $n^{\text{ten}}$  Grade an, enthält also Glieder  $x^n, y^n$ . Zu jeder Abszisse  $x = a$  gehören vermöge  $f(a, y) = 0$  (Nr. 24) algebraisch wirklich auch  $n$  Wurzeln  $y$ . Dabei sind nicht nur die imaginären mitgerechnet, sondern eine Wurzel  $y = p$  ist auch  $k$ mal gezählt, wenn die Zerlegung von  $f(a, y)$  in lineare Faktoren den Faktor  $(y - p)^k$ , aber nicht  $(y - p)^{k+1}$  enthält. Wenn wir nun die Schnittpunkte der Kurve in der  $y$ -Parallelen in derselben Weise zählen, uns also auch den Begriff bilden, daß mehrere Punkte in einen zusammenfallen können, so enthält jede  $y$ -Parallele genau  $n$  Kurvenpunkte.

\*) Überhaupt durch lineare Substitution nicht (Nr. 91f.).

Nun können wir aber durch Transformation mit festem Nullpunkt und fester  $x$ -Achse zu jeder Geraden eine parallele  $y'$ -Achse einführen mittelst der Substitution

$$x = x' + y' \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}, \quad y = y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \quad (\text{Nr. 11, } \alpha = 0).$$

Wenn dabei in der transformierten Gleichung der Koeffizient von  $y'^n$  verschwinden soll, muß  $\beta$  aus einer endlichen Zahl von bestimmten Werten genommen werden, denn jener Koeffizient ist eine algebraische Funktion von  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$ . In unendlich vielen Fällen ist also die transformierte Gleichung in  $y'$  wirklich vom  $n^{\text{ten}}$  Grad, wie für den obigen Satz vorausgesetzt war. In einer endlichen Anzahl von transformierten Gleichungen steigt  $y'$  nur bis zur  $(n - r)^{\text{ten}}$  Potenz auf, und wir haben dieselben nach Nr. 16 als Gleichungen  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $y'$  anzusehen, die  $r$  Wurzeln  $y' = \infty$  besitzen, können also wiederum  $n$  Kurvenpunkte auf der  $y'$ -Parallelen zählen, wenn  $r$  derselben im Punkte  $\infty$  zusammenfallen. Da wir aber jede Gerade zu einer  $y'$ -Parallelen machen können, so hat jede Gerade der Ebene  $n$  Schnittpunkte mit der Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Diese Schnittpunktzahl ist die geometrische Definition der Ordnungszahl  $n$  der Kurve.

**28. Bézoutsches Theorem.** Wenn die Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades  $f(x, y)$  in ein Produkt mehrerer Funktionen niedriger Grade  $g(x, y), h(x, y) \dots$  zerlegt werden kann, so sagt man, die Gleichung  $f(x, y) = 0$  zerfällt in die Gleichungen  $g(x, y) = 0, h(x, y) = 0, \dots$  oder die Kurve  $f = 0$  in die Kurvensamtheit  $g = 0, h = 0, \dots$ , denn alle Wertepaare  $x|y$ , die einen Faktor  $g(x, y), h(x, y), \dots$  zu Null machen, erfüllen die ursprüngliche Gleichung. Demnach bilden mehrere Kurven zusammen eine zerfallende Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, wenn die Summe ihrer Ordnungszahlen  $n$  beträgt; denn multipliziert man ihre Gleichungen  $g = 0, h = 0, \dots$  Seite für Seite, so ist  $g \cdot h \cdot \dots = 0$  eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades. Haben zwei Funktionen  $f(x, y), \varphi(x, y)$  einen gemeinsamen Faktor  $g(x, y)$ , so ist die Kurve  $g = 0$  eine Teilkurve der beiden durch  $f = 0, \varphi = 0$  dargestellten zerfallenden Orte.

Dagegen bestimmen zwei Gleichungen  $f(x, y) = 0, \varphi(x, y) = 0$ , wenn  $f$  und  $\varphi$  keinen gemeinsamen Faktor haben, nur eine end-

liche Anzahl gemeinsamer Wertepaare. Und zwar sagt das Bézoutsche Theorem aus: zwei allgemeinen Gleichungen  $m^{\text{ten}}$  und  $n^{\text{ten}}$  Grades genügen gleichzeitig genau  $mn$  Wertepaare der Unbekannten. Bei besonderer Beschaffenheit der Koeffizienten ist  $mn$  scheinbar nur die obere Grenze der Zahl gemeinsamer Wurzeln und es müssen die mehrfach erwähnten Zählmethoden von unendlich großen und von zusammenfallenden Wurzeln berücksichtigt werden. Geometrisch gedeutet lautet dieser Fundamentalsatz: zwei Kurven  $m^{\text{ter}}$  und  $n^{\text{ter}}$  Ordnung haben stets  $mn$  reelle oder imaginäre, gesonderte oder zusammenfallende, endlich oder unendlich entfernte Schnittpunkte.

Im früheren sind schon zahlreiche Sonderfälle dieses Theorems enthalten. So ist durch  $x = a$ ,  $y = b$  ein einziger Punkt bestimmt, aber offenbar geschieht dies überhaupt durch irgend zwei Gleichungen ersten Grades. So gibt die Einsetzung eines konstanten Wertes für eine Veränderliche in eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades für die andere; dasselbe gilt aber noch, wenn wir zwischen der gegebenen und irgendeiner linearen Gleichung eine Veränderliche eliminieren. Ganz allgemein findet man die gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen  $m^{\text{ten}}$  und  $n^{\text{ten}}$  Grades durch Elimination einer Veränderlichen, z. B.  $y$ , woraus eine Resultante des Grades  $mn$  in  $x$  entspringt. Setzen wir irgendeine Wurzel  $x = a_k$ , die das Eliminationsergebnis gleich Null macht, in die gegebenen Gleichungen ein, so müssen die beiden Gleichungen in  $y$  eine gemeinsame Wurzel  $b_k$  haben und dann genügt  $a_k | b_k$  beiden Gleichungen.

Wir untersuchen hier nur die Form und die Eigenschaften der durch die Gleichungen ersten und zweiten Grades dargestellten Kurven, wobei manche in diesen Nummern zusammengestellten allgemeinen Begriffe ihre nochmalige elementare Begründung und Erläuterung finden werden. \*)

B. 1) Durch die Gleichungen  $3x + 5y = 13$ ,  $4x - y = 2$  ist der Punkt  $1 | 2$  gegeben.

---

\*) Anfänger mögen sich daher damit begnügen, auf die in diesen Nummern für bekannte algebraische Sätze eingeführte geometrische Redeweise zu achten.

2) Um die durch die zwei Gleichungen  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $xy = 2$  dargestellten Punkte zu finden, eliminieren wir  $y$  zwischen denselben und erhalten  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ . Die Wurzeln dieser Gleichung sind  $x^2 = 1$ ,  $x^2 = 4$ , daher die vier Werte von  $x$

$$x = +1, -1, +2, -2.$$

Indem wir einen dieser Werte in die zweite Gleichung einsetzen, erhalten wir den zugehörigen Wert von  $y$ , nämlich bez.

$$y = +2, -2, +1, -1.$$

Die zwei gegebenen Gleichungen stellen daher die vier Punkte  $1 | 2$ ,  $-1 | -2$ ,  $2 | 1$ ,  $-2 | -1$  dar.

3) Durch die Gleichungen  $x - y = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 25$  sind die Punkte  $4 | 3$ ,  $-3 | -4$  gegeben.

4) Die Gleichungen

$$x^2 - 5x + y + 3 = 0, \quad x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$$

bestimmen die Punkte  $1 | 1$ ,  $2 | 3$ ,  $3 | 3$ ,  $4 | 1$ .

29. Wir beginnen mit der **Gleichung ersten Grades** und werden beweisen, daß diese stets eine gerade Linie darstellt, sowie umgekehrt, daß die Gleichung einer Geraden stets vom ersten Grade oder linear ist.

Die beiden wichtigen einfachsten Fälle haben wir schon kennen gelernt. So haben wir in Nr. 23 die Gleichung  $x = a$  als die einer  $y$ -Parallelen gedeutet, während  $y = b$  eine  $x$ -Parallele darstellt, die die  $x$ -Achse in der Entfernung  $b$  vom Nullpunkt schneidet.

Und der Fall, daß eine Gerade durch den Nullpunkt geht, ist eigentlich durch Nr. 4 und Nr. 22 schon erledigt. In der Tat, verschieben wir in einer solchen Geraden einen Punkt  $P$ , so ändern sich zwar beide Koordinaten  $P'P$ ,  $P''P$  (Fig. 3, S. 3), aber ihr Verhältnis ist konstant, nämlich gleich dem Verhältnis

$$\sin P'OP : \sin POP'' \quad \text{oder} \quad \sin \alpha : \sin (\omega - \alpha),$$

wenn  $\alpha$  der *Neigungswinkel* der Geraden gegen die positive Richtung der  $x$ -Achse ist. Demnach besteht zwischen allen  $x|y$ , die zu Punkten dieser Geraden gehören, die Beziehung

$$(4) \quad y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \cdot x,$$

oder diese ist die Gleichung der vorliegenden Geraden.

Umgekehrt verlangt die Bestimmung des durch die Gleichung

$$(5) \quad y = mx$$

dargestellten Ortes, den Ort des Punktes  $P$  so zu finden, daß  $x : y = OP' : P'P = 1 : m$  ist. Nach der Eigenschaft ähnlicher Dreiecke  $OP'P$  ist dieser Ort eine durch den Achsenschnittpunkt gehende Gerade  $OP$ , die den Achsenwinkel  $\omega$  so teilt, daß  $\sin P'OP = m \sin POP''$  ist.

Bei rechtwinkligen Achsen ist  $\sin POP'' = \cos P'OP$ , also  $m = \operatorname{tg} P'OP$ . Die durch  $y = mx$  dargestellte Gerade ist somit diejenige Gerade durch den Nullpunkt, deren Neigungswinkel  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} m$  ist.

Je nachdem  $m$  positiv oder negativ ist, liegt die Gerade in den Feldern  $XOY$ ,  $X'OY'$  oder  $YOX'$ ,  $Y'OX$  (Fig. 4). Denn aus  $y = +mx$  folgt, daß für positive  $x$  auch  $y$  positiv, für negative  $x$  auch  $y$  negativ ist; um dagegen der Gleichung  $y = -mx$  zu genügen, muß  $y$  für positive  $x$  negativ, für negative  $x$  positiv sein (Nr. 3).

**30. Sinusteilverhältnis.** Man nennt die Verhältniszahl  $m = \sin XOP : \sin POY$ , die die Lage einer Geraden durch den Nullpunkt bestimmt, den *Richtungskoeffizienten* derselben. Allgemein gesprochen hat dieses Verhältnis in dem *Strahlenbüschel*  $O$ , d. h. in der Gesamtheit der durch den Punkt  $O$  gehenden Strahlen, analoge Bedeutung, wie in der Punktreihe das Teilverhältnis (Nr. 14). Daher heißt der Quotient der Sinus der Teilwinkel  $XOP$ ,  $POY$ , in die der Strahl  $OP$  den Winkel  $XOY$  teilt, das *Sinusteilverhältnis* des Strahles  $OP$  im Winkel  $XOY$ , und wie in Nr. 14 von Teilpunkten die Rede war, kann man jetzt von Teilgeraden sprechen. Die Teilwinkel sollen wiederum in dem Sinne gemessen werden, daß die Beziehung  $\sphericalangle XOP + POY = \sphericalangle XOY$  besteht. Alsdann ist das Sinusteilverhältnis positiv für Teilstrahlen innerhalb der Felder  $XOY$ ,  $X'OY'$ , negativ für Teilstrahlen in den Nebenseitenfeldern.



Die Bestimmung der Strahlen eines Büschels durch ihre Teilverhältnisse\*) in bezug auf zwei feste Strahlen ist selbstverständlich unabhängig davon, daß diese zu Koordinatenachsen gewählt waren. Um die Wertänderungen der Zahl  $m$  zu übersehen, genügt die Bemerkung, daß die beiden Sinus, absolut genommen, sich verhalten wie die Längen der aus einem Punkte  $P$  des Teilstrahls  $OP$  auf die festen Strahlen  $OX$ ,  $OY$  gefälltten Lote. Ist also  $m$  gegeben, so ziehe man in Abständen, die sich wie  $m:1$  verhalten, Parallelen zu den festen Strahlen  $OX$ ,  $OY$ ; durch ihren Schnittpunkt  $P$  geht der Teilstrahl. Für  $m=0$  fällt dieser mit dem Anfangsstrahl  $OX$ , für  $m=\infty$  mit dem Endstrahl  $OY$  zusammen, für  $m=1$  mit der inneren, für  $m=-1$  mit der äußeren Halbierungslinie des Winkels  $XOY$ .

Zwei Strahlen, deren Sinusteilverhältnisse mit dem festen Strahlenpaar entgegengesetzt gleich sind, bilden ein zu jenem *harmonisches Strahlenpaar*, analog zu Nr. 15. Von zwei harmonisch konjugierten Strahlen  $\pm m$  ist also stets einer ein innerer, der andere ein äußerer Teilstrahl. Insbesondere ist zu einem Strahlenpaar das (rechtwinklige) Paar ihrer Halbierungslinien harmonisch ( $m = \pm 1$ ). Umgekehrt sind zu zwei rechtwinkligen Strahlen immer die in bezug auf sie symmetrisch gelegenen Strahlen harmonisch konjugiert. So sind also die Geraden mit den Gleichungen  $y = mx$ ,  $y = -mx$  in bezug auf die Koordinatenachsen konjugiert harmonisch, insbesondere die beiden Halbierungslinien  $y = x$  und  $y = -x$  des Achsenwinkels.

**31. Gleichung einer beliebigen Geraden.** Um nun zu untersuchen, wie eine in bezug auf die Achsen völlig willkürlich gelegene Gerade  $QP$  durch eine Gleichung darzustellen ist, ziehen wir durch den Nullpunkt  $OR$  parallel und gleich  $QP$ . Hat ein Punkt  $P$  von  $QP$  die Koordinaten  $x|y$ , so hat der Punkt  $R$  von  $OR$  die Koordinaten  $x|y-b$ , falls wir die konstante Länge  $RP = OQ = b$  nennen; und ist  $m$  der Richtungskoeffizient des zur Geraden parallelen

---

\*) Immer Sinusteilverhältnisse darunter verstanden.

Vektors, so ist (Fig. 21)  $P'R = P'P - RP = m \cdot OP'$  oder

$$(6) \quad y - b = mx.$$

Diese für die Koordinaten jedes Punktes von  $QP$  erfüllte Gleichung  $y = mx + b$  heißt die Gleichung dieser Geraden. Die Konstante  $b$  ist die Ordinate des Schnittpunktes  $Q$  der Geraden mit der  $y$ -Achse. Der Richtungskoeffizient  $m$  des zur Geraden parallelen Vektors heißt auch *Richtungskoeffizient der Geraden selbst*.

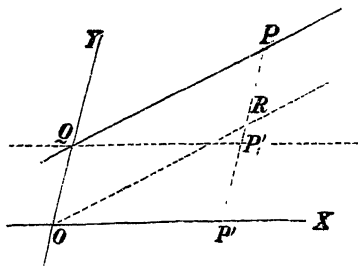


Fig. 21.

Diese Überlegung erweist sich unmittelbar als die Ausführung einer Paralleltransformation (Nr. 10) der auf  $Q$  als Anfangspunkt bezogenen Gleichung  $y' = mx$  von  $QP$  zum Nullpunkt  $O$  durch die Substitution  $y' = y - b$ . Daher definiert auch umgekehrt die Gleichung  $y = mx + b$  oder  $y - b = mx$  eine Gerade, die die  $x$ -Achse unter dem durch  $m$  gegebenen Winkel schneidet und in der  $y$ -Achse den Abschnitt  $b$  bestimmt, denn sie ist, in der Form  $y' = mx$  geschrieben, die Gleichung des Vektors vom Richtungskoeffizienten  $m$  im parallelen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt  $Q$ .

Zugleich folgt: Geraden, deren Gleichungen sich in den Formen  $y = mx + b$ ,  $y = mx + b'$  nur im konstanten Glied unterscheiden, sind parallel. *Parallele oder gleichgerichtete Geraden haben einen gemeinsamen unendlich fernen Schnittpunkt* (Nr. 14), durch den die *Richtung* der beiden Geraden bestimmt ist.

### 32. Die allgemeinste Gleichung des ersten Grades

$$(7) \quad a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

stellt stets eine Gerade dar. Denn sie kann durch Division mit  $a_2$  auf die Form  $y = mx + b$  gebracht werden, nämlich auf

$$y = -\frac{a_1}{a_2} x - \frac{a_3}{a_2}.$$

Sollte  $a_2 = 0$  sein, so ist die Division mit  $a_2$  nicht gestattet; die Division mit  $a_1$  ergibt aber alsdann  $x = -a_3 : a_1$ , die Gleichung einer  $y$ -Parallelen.

Daraus folgt die *geometrische Bedeutung der Konstanten* in der allgemeinen Gleichung einer Geraden. Ist der Neigungswinkel der Geraden gegen die  $x$ -Achse  $\alpha$ , so ist (Nr. 29)

$$(8) \quad m = -\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)}; \quad \text{für } \omega = \frac{\pi}{2}, \quad m = -\frac{a_1}{a_2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ferner ist der Abschnitt  $b$  der Geraden in der  $y$ -Achse (Nr. 31)

$$b = -\frac{a_3}{a_2}.$$

Nur diese Koeffizientenquotienten haben geometrische Bedeutung, weil die Koeffizienten selbst nur bis auf gemeinsame Faktoren bestimmt sind (Nr. 25). In der Tat stellt eine zweite Gleichung  $a'_1x + a'_2y + a'_3 = 0$  nur dann dieselbe Gerade wie die gegebene dar, wenn

$$-\frac{a'_1}{a'_2} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad -\frac{a'_3}{a'_2} = -\frac{a_3}{a_2}, \quad \text{also} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a'_1}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3}.$$

Zwei Geraden  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ ,  $a'_1x + a'_2y + a'_3 = 0$  sind parallel, wenn

$$(9) \quad a_1 : a_2 = a'_1 : a'_2$$

ist, denn sie haben dann denselben Richtungskoeffizienten. Der Parallelismus erfordert also Proportionalität der Koeffizienten entsprechender Veränderlicher.

Außer der Form  $y = mx + b$  gibt es noch zwei andere gebräuchliche besondere Gleichungsformen der Geraden, die zunächst abgeleitet und mit der allgemeinen in Beziehung gesetzt werden sollen.

**33. Die Gleichung einer Geraden  $MN$ , mittelst der Abschnitte  $OM = a$ ,  $ON = b$  ausgedrückt, die sie in den Achsen bestimmt, lautet**

$$(10) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wir leiten diese Gleichung ab aus der allgemeinen

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_2}{a_3}y + 1 = 0.$$

Sie muß durch die Koordinaten jedes Punktes der Geraden  $MN$  (Fig. 22), also auch durch diejenigen von  $M$ , d. h.  $a \mid 0$  erfüllt werden; daraus folgt  $\frac{a_1}{a_3}a + 1 = 0$ , oder  $\frac{a_1}{a_3} = -\frac{1}{a}$ . Man findet ferner  $\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{b}$  (Nr. 32), weil die Gleichung durch die Koordinaten  $0 \mid b$  von  $N$  erfüllt werden muß. Durch Substitution dieser Werte geht aus der allgemeinen Form die jetzt verlangte hervor, die nach dieser ihrer Herkunft ebenso für *rechtwinklige als für schiefwinklige Achsen* gültig ist.

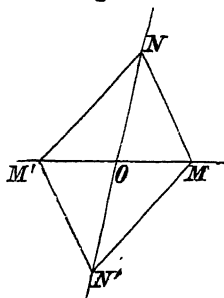


Fig. 22.

Die Lage der Geraden ändert sich mit den Vorzeichen von  $a$  und  $b$ . Wenn z. B. die Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , der in beiden Achsen positive Abschnitte  $a, b$  entsprechen, die Gerade  $MN$  der Figur darstellt, so gibt die Gleichung  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$  die Gerade  $MN'$ ,  $-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ist der Ausdruck von  $M'N$  und  $-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$  der von  $M'N'$ .

Jede Gleichung ersten Grades, deren konstantes Glied nicht Null ist, kann durch die Division mit demselben auf eine dieser vier Formen gebracht werden. So entsteht z. B. die Gleichung einer  $y$ -Parallelen wieder, wenn  $b = \infty$ ,  $\frac{1}{b} = 0$  gesetzt wird.

B. 1) Man soll die Lage der folgenden Geraden untersuchen und die von ihnen in den Achsen gebildeten Abschnitte bestimmen:

$$2x - 3y = 7; \quad 3x + 4y + 9 = 0; \quad 3x + 2y = 6.$$

2) Wird bei dem Dreieck  $MON$  (Fig. 22) von  $O$  aus auf  $OM = a$  und  $ON = b$  der  $m^{\text{te}}$  Teil dieser Seiten abgetragen, so stellt

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$$

die Verbindungslinie dieser Teilpunkte dar, sie ist also der dritten Seite  $MN$  des Dreiecks parallel.

34. Als Normalform der Gleichung der Geraden gilt

$$(11) \quad x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p = 0,$$

wo  $p$  die positive Länge des auf die Gerade vom Nullpunkt

gefallten Lotes und  $\alpha$  dessen Winkel gegen die positive Richtung der  $x$ -Achse bedeutet.

Sei  $OP = p$ ,  $OM = a$ ,  $ON = b$ ,  $\sphericalangle MOP = \alpha$ , also

$\sphericalangle PON = \omega - \alpha$ , so ist  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

die Gleichung der Geraden  $MN$  (Fig. 23). Durch Multiplikation mit  $p$

erhalten wir  $\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y - p = 0$ , wo

$\frac{p}{a} = \cos \alpha$ ,  $\frac{p}{b} = \cos (\omega - \alpha)$  gesetzt

werden kann, um in der Tat auf die Form (11) zu kommen.

Bei *rechtwinkligen* Koordinaten, die wir zumeist gebrauchen, wird wegen  $\cos \left( \frac{1}{2}\pi - \alpha \right) = \sin \alpha$  die Normalform:

$$(12) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Diese Gleichung schließt die vier Fälle von Nr. 33 ein, wenn wir voraussetzen, daß  $\alpha$  jeden beliebigen Wert zwischen 0 und  $2\pi$  annehme; so ist für die Lage  $NM'$   $\alpha$  zwischen  $\frac{1}{2}\pi$  und  $\pi$ , der Koeffizient von  $x$  negativ; für die Lage  $M'N'$  ist  $\alpha$  zwischen  $\pi$  und  $\frac{3}{2}\pi$  oder  $-\pi$  und  $-\frac{1}{2}\pi$ , beide Koeffizienten sind negativ; für  $MN'$  ist  $\alpha$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und 0 und nur der Koeffizient von  $y$  negativ. Die vier Geraden sind also völlig unterschieden, wenn wir  $p$  als eine wesentlich positive Größe definieren, d. h. den Abstand des Nullpunktes von der Geraden stets positiv nennen. Die Bestimmung der Geraden aus der Normalform ist also eigentlich identisch mit der Angabe des Fußpunktes  $P$  des von  $O$  auf die Gerade gefällten Lotes in Polarkoordinaten  $\alpha | p$  (Nr. 21).

**35. Reduktion der allgemeinen linearen Gleichung  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  auf die Normalform.** Unter der Annahme *rechtwinkliger Koordinaten* gelangen wir zu der Form  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ , indem wir die gegebene durch  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  dividieren. Sie lautet dann

$$(13) \quad \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}x + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}y + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

und nun kann man die Koeffizienten von  $x$  und  $y$  gleich  $\cos \alpha$

bzw.  $\sin \alpha$  setzen, weil die Summe der Quadrate dieser zwei achten Brüche gleich eins ist. Also bestimmen  $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \cos \alpha$ ,  $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \sin \alpha$  den Neigungswinkel  $\alpha$  des Lotes der gegebenen Geraden und  $p = \frac{-a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$  die Länge dieses Lotes. Um dieses  $p$  positiv zu erhalten, haben wir also der Quadratwurzel im Nenner das Vorzeichen zu geben, das dem des konstanten Gliedes  $a_3$  entgegengesetzt ist. Diese Vorzeichenregel versagt, wenn  $a_3 = 0$  ist, d. h. wenn die Gerade durch den Koordinatenanfang geht.<sup>10)</sup>

Um die *in schiefwinkligen Koordinaten* geschriebene allgemeine Gleichung auf  $x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p = 0$  zu reduzieren, suchen wir diese Form durch Multiplikation mit einer gewissen Konstanten, die wir  $R$  nennen wollen, mit der ersten identisch zu machen. Also ist zu setzen  $a_1 = R \cos \alpha$ ,  $a_2 = R \cos (\omega - \alpha)$ . Mit Hilfe der Identität

$\cos^2 \alpha + \cos^2 (\omega - \alpha) - 2 \cos \alpha \cos (\omega - \alpha) \cos \omega = \sin^2 \omega$  folgt hieraus

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega = R^2 \sin^2 \omega,$$

die Gleichung  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$  nimmt daher bei Überführung in die Normalform die Gestalt an:

$$\frac{a_1}{R} x + \frac{a_2}{R} y + \frac{a_3}{R} = 0$$

mit 
$$\frac{1}{R} = \frac{\sin \omega}{\pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega}},$$

und es besteht die Proportion  $\cos \alpha : \cos (\omega - \alpha) : p : 1$

$$= a_1 \sin \omega : a_2 \sin \omega : -a_3 \sin \omega : \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega}.$$

Um  $p$  positiv zu erhalten, hat man auch hier wieder der Quadratwurzel das Plus- oder Minuszeichen zu geben, je nachdem  $a_3$  negativ oder positiv ist.

**36. Winkel zweier Geraden.** Bei Bestimmung desjenigen Winkels  $\delta$  zweier Geraden  $g_1, g_2$ , der an Größe mit dem konkaven Winkel  $Q_1 O Q_2$  der vom Nullpunkt auf die beiden Geraden gefällten Lote übereinstimmt, hat man zu unterscheiden, ob die Lote  $O Q_1$  und  $O Q_2$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  gleichstimmig oder ungleichstimmig liegen (Nr. 6). Bilden diese Lote mit der positiven Richtung der

$x$ -Achse die Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$ , so ist diesen beiden Fällen entsprechend  $\delta = \beta - \alpha$  (Fig. 24) oder  $\delta = \alpha - \beta$ .

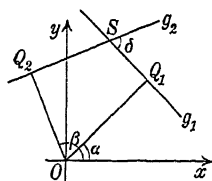


Fig. 24.

Es seien nun  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  und  $b_1x + b_2y + b_3 = 0$  die Gleichungen der Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem; alsdann folgt unter Anwendung der Formeln für  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  in Nr. 35 und der analogen Formeln für  $\cos \beta$  und  $\sin \beta$ :

$$(14) \quad \cos \delta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \sin \delta = \frac{\pm (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

$$\text{daher } \operatorname{tg} \delta = \frac{\pm (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_1 + a_2 b_2}.$$

Hierbei ist den Quadratwurzeln das zum Vorzeichen der Größe  $a_3$  bzw.  $b_3$  entgegengesetzte Zeichen zu geben; ferner ist vor  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  das Plus- oder Minuszeichen zu setzen, je nachdem die Lote  $OQ_1$  und  $OQ_2$  mit den positiven Richtungen der Achsen  $x$  und  $y$  gleichstimmig oder ungleichstimmig liegen.

Wenn die beiden Geraden durch die Gleichungen  $y = mx + b$ ,  $y = m'x + b'$  gegeben sind, so folgt aus den Richtungskoeffizienten der eingeschlossene Winkel vermöge

$$(15) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\pm (m' - m)}{1 + mm'}$$

oder auch direkt, weil  $\delta = \pm (\arctan m' - \arctan m)$  ist.

Ganz analog verfahren wir bei schiefwinkligen Koordinaten. Wir setzen  $R \sin \omega = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega)}$ ,  $R' \sin \omega = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos \omega)}$ ; aus

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{R}, \quad \cos \beta = \frac{b_1}{R'}, \quad \sin \alpha = \frac{a_2 - a_1 \cos \omega}{R \sin \omega},$$

$$\sin \beta = \frac{b_2 - b_1 \cos \omega}{R' \sin \omega}$$

folgt alsdann

$$(16) \quad \cos \delta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \omega}{R R' \sin^2 \omega}, \quad \sin \delta = \frac{\pm (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{R R' \sin \omega},$$

also

$$(17) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\pm (a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin \omega}{a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \omega}$$

mit entsprechender Vorzeichenregel wie zuvor.

Nun ist  $\operatorname{tg} \delta = 0$ , wenn die beiden Geraden parallel,  $\operatorname{tg} \delta = \infty$ , wenn sie zueinander rechtwinklig sind. Daher ergibt sich wieder wie in Nr. 32

$$(18) \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

als *Bedingung des Parallelismus*. Dagegen ist die *Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden*

$$(19) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \omega;$$

bei rechtwinkligen Koordinaten lautet sie einfacher

$$(20) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

und für die besondere Gleichungsform von Nr. 31

$$mm' = -1.$$

**37. Schnittpunkt zweier Geraden.** Jede der beiden linearen Gleichungen drückt eine Bedingung aus, der von den Koordinaten des geforderten Punktes genügt werden muß. Deshalb finden wir seine Koordinaten durch Auflösung der beiden Gleichungen nach den Unbekannten  $x$  und  $y$ . Man erhält

$$(21) \quad x = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Diese Werte werden nur dann *unendlich groß*, wenn der Nenner verschwindet, d. h. wenn die Bedingung des Parallelismus  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  erfüllt ist; doch bleibt ihr Verhältnis endlich, nämlich gleich dem der Zähler. Einen unendlich fernen Punkt geben wir überhaupt an durch den Richtungskoeffizienten der nach ihm gehenden Parallelstrahlen. Der Schnittpunkt wird nur dann *unbestimmt*, wenn außer dem Nenner noch ein Zähler, infolgedessen auch der andere verschwindet; dann ist aber die Bedingung der Identität erfüllt (Nr. 32).

Damit ist dem Satz von Nr. 28, daß irgend zwei lineare Gleichungen einen Punkt eindeutig bestimmen, die geometrische Deutung gegeben. Jeder Punkt ist durch irgend zwei Geraden bestimmt (unter anderen durch zwei Achsenparallelen); wie auch jede Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist.

Auf einer dritten Geraden  $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$  liegt der Schnittpunkt der beiden gegebenen, wenn seine Koordinaten



auch der letzten Gleichung genügen. Demnach ist *die Bedingung, unter der sich drei Geraden in einem Punkte schneiden:*

$$(22) \quad c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0;$$

sie kann auch in einer der Formen geschrieben werden

$$(23) \quad \begin{cases} a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0, \\ a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0, \end{cases}$$

oder mit Benutzung einer Determinante:

$$(24) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist auch die Bedingung dafür, daß das von den drei Geraden gebildete Dreieck die Fläche Null hat (vgl. Beispiel 5 und Nr. 7).

B. 1) Die Koordinaten der Ecken des Dreiecks von den Seiten  $x + y = 2$ ,  $x - 3y = 4$ ,  $3x + 5y + 7 = 0$  sind  $-\frac{1}{14} | -\frac{19}{14}$ ,  $\frac{17}{2} | -\frac{18}{2}$ ,  $\frac{5}{2} | -\frac{1}{2}$ .

2) Die Koordinaten der Punkte, in denen sich die Geraden  $3x + y - 2 = 0$ ,  $x + 2y - 5 = 0$ ,  $2x - 3y + 7 = 0$  schneiden, sind  $\frac{1}{7} | \frac{17}{7}$ ,  $-\frac{1}{11} | \frac{25}{11}$ ,  $-\frac{1}{5} | \frac{13}{5}$ .

3)  $2x + 3y - 13 = 0$ ,  $5x - y - 7 = 0$ ,  $x - 4y + 10 = 0$  schneiden sich in  $2 | 3$ .

4) Das Viereck, dessen aufeinanderfolgende Seiten durch die Gleichungen  $3x - 2y + 10 = 0$ ,  $x + 2y - 6 = 0$ ,  $16x - 10y - 33 = 0$ ,  $12x + 14y + 29 = 0$  gegeben sind, hat die Ecken  $-1 | \frac{7}{2}$ ,  $3 | \frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2} | -\frac{5}{2}$ ,  $-3 | \frac{1}{2}$ , und die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare  $83 | \frac{253}{2}$ ,  $-\frac{71}{5} | \frac{101}{10}$ .

5) *Inhalt des durch die Geraden  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ ,  $b_1x + b_2y + b_3 = 0$ ,  $c_1x + c_2y + c_3 = 0$  gebildeten Dreiecks.*

Wenn wir die Koordinaten der Ecken berechnen und ihre Werte in die Formel (17) in Nr. 7 einsetzen, erhalten wir für den doppelten Inhalt  $2F$  den Ausdruck  $\pm 2F: \sin \omega =$

$$\begin{aligned} & \frac{a_3b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \left( \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{c_1b_2 - c_2b_1} - \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1c_2 - a_2c_1} \right) + \\ & \frac{b_3c_3 - b_3c_2}{b_1c_2 - b_2c_1} \left( \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1c_2 - a_2c_1} - \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_1a_2 - b_2a_1} \right) + \\ & \frac{c_3a_3 - c_3a_2}{c_1a_2 - c_3a_1} \left( \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_1a_2 - b_2a_1} - \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{c_1b_2 - c_2b_1} \right). \end{aligned}$$

Wir reduzieren diesen Ausdruck auf einen gemeinsamen Nenner und bemerken, daß dann der Zähler des zwischen den ersten Klammern enthaltenen Teiles die mit  $c_1$  multiplizierte Größe

$$c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2)$$

ist, und daß die in den beiden folgenden Klammern enthaltenen Teile des Ausdrucks die Produkte derselben Größe mit  $a_1$  bez.  $b_1$  sind; dadurch erhalten wir für den doppelten Inhalt des Dreiecks den Wert

$$2F = \pm \frac{[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)]^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1) (b_1 c_2 - b_2 c_1) (c_1 a_2 - c_2 a_1)} \sin \omega.$$

Wenn sich die drei Geraden in einem Punkte schneiden, so wird dieser Ausdruck für den Flächeninhalt Null; wenn irgend zwei von ihnen parallel sind, wird er unendlich groß (Nr 32).

### 38. Bestimmung einer Geraden durch zwei Bedingungen.

Jede der Formen, die wir der Gleichung der Geraden gegeben haben, enthält zwei Konstanten; so die Formen  $y = mx + b$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  die Konstanten  $m$ ,  $b$ , bez.  $a$ ,  $b$ , bez.  $\alpha$ ,  $p$ . Nur die allgemeine Form  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$  enthält drei Konstanten, aber nur scheinbar, denn von geometrischer Bedeutung sind in ihr nicht die absoluten Werte, sondern nur zwei unter den Verhältnissen von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ . Nach Division durch  $-a_3$  wird die Gleichung z. B. mit der zweiten besonderen Form identisch und enthält nur die beiden Konstanten  $\frac{a_1}{a_3} = -\frac{1}{a}$ ,  $\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{b}$ . Die Gerade ist also durch die zwei Konstanten ihrer Gleichung bestimmt; wir erhalten alle möglichen Geraden der Ebene, wenn wir den Konstanten unabhängig voneinander alle Werte geben. Wir könnten die durch sie gegebenen geometrischen Größen, z. B. die negativen Reziproken der Achsenabschnitte, geradezu als die beiden Bestimmungselemente der Geraden ansehen, in demselben Sinne, wie  $x|y$  die beiden Koordinaten eines Punktes sind (vgl. Nr. 78).

Wie der Punkt (Nr. 28), so kann auch die Gerade zwei Bedingungen erfüllen, falls sich diese nicht widersprechen. Denn, betrachten wir die beiden Konstanten  $m$ ,  $b$  oder  $a$ ,  $b$  oder  $\alpha$ ,  $p$  als Unbekannte, so können wir deren Werte bestimmen, wenn ihnen irgend zwei Bedingungen auferlegt sind.

Ein solches Wertepaar entspricht dann einer besonderen Geraden, die diesen Bedingungen genügt. Man nennt eine Bedingung linear, wenn sie jeden Koeffizienten der Gleichung nur im ersten Grade enthält. *Also ist eine Gerade durch zwei (für die Konstanten ihrer Gleichung) lineare Bedingungen eindeutig festgelegt*, analog wie der Punkt durch zwei lineare Gleichungen bestimmt ist. Diese Bestimmung der Geraden durch Bedingungen wird durch Nr. 39, 40, 41 hinreichend erläutert.

**39. Gleichung einer Geraden, die durch einen ihrer Punkte und durch ihre Richtung bestimmt ist.**

Wenn die Gerade  $y = mx + b$  eine gegebene Richtung hat, so ist nach Nr. 31 und 32 die Konstante  $m$  bekannt. Und wenn die Gerade durch einen festen Punkt  $x_1 | y_1$  geht, so muß die Gleichung, als für jeden Punkt der Linie erfüllt, auch für ihn gelten; man erhält also  $y_1 = mx_1 + b$  und damit die Bestimmung von  $b$ , so daß die Elimination von  $b$  die Gleichung gibt

$$(25) \quad y - y_1 = m(x - x_1).$$

Betrachten wir in dieser Gleichung den Richtungskoeffizienten  $m$  als unbestimmt, so ist sie die allgemeine Gleichung einer durch den Punkt  $x_1 | y_1$  gehenden Geraden, und jede Gerade durch  $x_1 | y_1$  kann so dargestellt werden.

**40. Gleichung der Geraden als Verbindungslinie zweier ihrer Punkte.**

Nach (25) in Nr. 39 ist  $y - y_1 = m(x - x_1)$  die Gleichung einer Geraden durch  $x_1 | y_1$ . Wenn aber die verlangte Gerade auch durch den Punkt  $x_2 | y_2$  gehen soll, so muß diese Gleichung auch erfüllt bleiben, wenn man für  $x | y$  einsetzt  $x_2 | y_2$ . Demnach ist  $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ , und durch Elimination von  $m$  erhält man die Gleichung der Verbindungslinie in der Form

$$(26) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

In dieser Gestalt ist die Gleichung leicht zu behalten; durch Befreiung von den Nennern kann sie in eine andere viel benutzte Form gebracht werden, nämlich

$$(27) \quad (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

$$\text{oder} \quad (x - x_1)(y - y_2) = (x - x_2)(y - y_1).$$

Auch dies ist die Gleichung einer Geraden, weil die Glieder  $xy$ , die auf ihren beiden Seiten auftreten, einander aufheben; die Gerade (27) verbindet die gegebenen Punkte, denn die Gleichung (27) wird durch die Werte  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  sowie durch  $x = x_2$ ,  $y = y_2$  erfüllt.

Endlich lassen sich die Gleichungen (26) und (27) mit Benutzung einer Determinante in der Form

$$(28) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben.

Insbesondere ist  $y_1x - x_1y = 0$  die Gleichung der Geraden, die den Punkt  $x_1|y_1$  mit dem Anfangspunkt verbindet.

Wir können jede der Gleichungen (26), (27) und (28) auch deuten als den Ausdruck der *Bedingung, daß drei Punkte in einer Geraden liegen*. Denn, nennen wir den dritten Punkt  $x_3|y_3$ , so muß er der Gleichung genügen

$$(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Man kann diese Bedingung in der zyklisch-symmetrischen Form\*) schreiben

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

B. 1) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte sind:  $2|3$ ,  $4|-5$ ,  $-3|-6$ , lauten

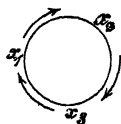
$$x - 7y = 39, \quad 9x - 5y = 3, \quad 4x + y = 11.$$

2) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$\text{ist (Nr. 14)} \quad x_1|y_1 \text{ und } \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2} \left| \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2} \right.$$

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

\*) Beim Gebrauch dieser und ähnlicher Formeln (z. B. Nr. 37) ist es nützlich, die Koordinaten oder überhaupt durch einen Index unterschiedene Buchstaben in einer festen Aufeinanderfolge zu denken; z. B. nimmt im zweiten Glied der eben gegebenen Formel  $x_2$  die Stelle von  $x_1$ ,  $y_3$  die von  $y_2$ , und  $y_1$  die von  $y_3$  im ersten Gliede ein, und im dritten gehen wir von  $x_2$  zu  $x_3$ , von  $y_3$  zu  $y_1$  und von  $y_1$  zu  $y_2$  über. Man kann dies Verfahren kurz als eine zyklische Vertauschung der Indizes bezeichnen.



3) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$x_1|y_1 \text{ und } \frac{x_2+x_3}{2} \left| \frac{y_2+y_3}{2} \right.$$

ist

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0.$$

4) Die Geraden, die die Ecken des Dreiecks in 1) mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, haben die Gleichungen

$$17x - 3y = 25; \quad 7x + 9y + 17 = 0; \quad 5x - 6y = 21.$$

5) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$\frac{lx_1 - mx_2}{l-m} \left| \frac{ly_1 - my_2}{l-m} \right. \text{ und } \frac{lx_1 - nx_3}{l-n} \left| \frac{ly_1 - ny_3}{l-n} \right.$$

ist

$$\begin{aligned} & x[l(m-n)y_1 + m(n-l)y_2 + n(l-m)y_3] - \\ & y[l(m-n)x_1 + m(n-l)x_2 + n(l-m)x_3] = \\ & lm(y_1x_2 - y_2x_1) + mn(y_2x_3 - y_3x_2) + nl(y_3x_1 - y_1x_3). \end{aligned}$$

6) Die Diagonalen des durch die Geraden  $x=a$ ,  $x=a'$ ,  $y=b$ ,  $y=b'$  gebildeten Parallelogramms sind

$$(b-b')x - (a-a')y = a'b - ab', \quad (b-b')x + (a-a')y = ab - a'b'$$

mit dem Schnittpunkt  $\frac{1}{2}(a+a') \left| \frac{1}{2}(b+b') \right.$ .

7). Wenn von einem Dreieck die Basis  $x'|0$ ,  $-x'|0$  und die Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit der Spitze  $0|y'$  zu Koordinatenachsen gewählt sind, so sind die Gleichungen der Geraden, die von den Basisecken nach den Mittelpunkten der Seiten  $x'|0$ ,  $0|y'$  bez.  $-x'|0$ ,  $0|y'$  gehen,

$$3x'y - y'x - x'y' = 0, \quad 3x'y + y'x - x'y' = 0$$

und die Koordinaten ihres Schnittpunktes sind  $0 \left| \frac{1}{3}y' \right.$ .

8) Zwei Gegenseiten eines Vierecks werden zu Koordinatenachsen gewählt, die anderen haben die Gleichungen

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1, \quad \frac{x}{2a'} + \frac{y}{2b'} = 1.$$

Die Mittelpunkte der Diagonalen sind  $a|b'$ ,  $a'|b$ .

9) In demselben Fall ist der Mittelpunkt der Geraden, die die Schnittpunkte der Gegenseiten verbindet,

$$\frac{a'b \cdot a - ab' \cdot a'}{a'b - ab'} \left| \frac{a'b \cdot b' - ab' \cdot b}{a'b - ab'} \right.$$

Nach Nr. 14 zeigt diese Form der Koordinatenwerte, daß dieser Punkt die Verbindungslinie der Diagonalenmitten äußerlich im Verhältnis  $a'b : ab'$  teilt.

41. **Normale aus einem gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden.** Ist  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  die Gleichung der gegebenen Geraden in rechtwinkligen Koordinaten, so sind infolge der Orthogonalitätsbedingung  $a_1 : a_2 = -b_2 : b_1$  (Nr. 36) alle Normalen derselben in der Gleichungsform enthalten  $a_2x + a_1y + b_3 = 0$ . Die durch den Punkt  $x_1|y_1$  gehende Normale hat also nach Nr. 39 die Gleichung

$$29) \quad a_2(x - x_1) - a_1(y - y_1) = 0.$$

Aus der Gleichung der zur gegebenen parallelen Geraden durch  $x_1|y_1$ ,  $a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) = 0$  wird die der Normale also erhalten durch Vertauschung der Koeffizienten von  $x$  und  $y$  und Änderung des Vorzeichens von einem derselben. Ebenso ergibt sich zu  $y = mx$ , wegen  $m' = -1 : m$ , die Normale  $y = \frac{-1}{m}x$  durch den Nullpunkt, somit zu  $y = mx + b$  durch  $x_1|y_1$  die Normale  $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$ .

In *schiefwinkligen* Koordinaten folgt auf dieselbe Weise als Gleichung der Normale

$$(a_2 - a_1 \cos \omega)(x - x_1) - (a_1 - a_2 \cos \omega)(y - y_1) = 0.$$

Ganz ebenso bildet man die Gleichung der Geraden, die durch einen Punkt  $x_1|y_1$  geht und mit einer gegebenen Geraden einen vorgeschriebenen Winkel  $\delta$  einschließt. Denn, ist  $m$  der Richtungskoeffizient der gegebenen Geraden, so folgt derjenige der geforderten Geraden aus der Formel (15) in Nr. 36 für  $\tan \delta = \mu$ , nämlich unter Annahme rechtwinkliger Koordinaten als

$$m' = \frac{m \pm \mu}{1 \mp m\mu},$$

wo das Vorzeichen gemäß der zu (14) in Nr. 36 gegebenen Regel zu setzen ist.

B. 1) Das Dreieck  $2|1, 3|-2, -4|-1$  hat die Seiten

$$x + 7y + 11 = 0, \quad 3y - x = 1, \quad 3x + y = 7$$

und die Höhen (Lote aus den Gegenecken)

$$7x - y = 13, \quad 3x + y = 7, \quad 3y - x = 1;$$

demnach ist es rechtwinklig.

2) Die Seitenmittelpunkte desselben Dreiecks sind  $-\frac{1}{2} | -\frac{3}{2}$ ,  $-1 | 0$ ,  $\frac{5}{2} | -\frac{1}{2}$ ; die durch sie rechtwinklig zu den Dreiecksseiten gezogenen Geraden sind

$$7x - y + 2 = 0, \quad 3x + y + 3 = 0, \quad 3y - x + 4 = 0;$$

sie durchschneiden sich in  $-\frac{1}{2} | -\frac{3}{2}$ , dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

3) Die Gleichungen der Höhen des Dreiecks  $2 | 3$ ,  $4 | -5$ ,  $-3 | -6$  (Nr. 40, 1) sind

$$7x + y = 17, \quad 5x + 9y + 25 = 0, \quad x - 4y = 21;$$

sie schneiden sich in  $\frac{89}{29} | -\frac{130}{29}$ , dem Höhenschnittpunkte.

4) Die Gleichungen der Mittelsenkrechten der Seiten desselben Dreiecks sind (vgl. 2)

$$7x + y + 2 = 0, \quad 5x + 9y + 16 = 0, \quad x - 4y = 7;$$

ihr Schnittpunkt ist  $-\frac{1}{29} | -\frac{51}{29}$ .

5) Aus den Koordinaten der Ecken eines Dreiecks folgen die allgemeinen *Gleichungen der Höhen* als

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + (x_1x_3 + y_1y_3) - (x_1x_2 + y_1y_2) = 0,$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + (x_2x_1 + y_2y_1) - (x_2x_3 + y_2y_3) = 0,$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (x_3x_2 + y_3y_2) - (x_3x_1 + y_3y_1) = 0.$$

6) Die *Gleichungen der Mittelsenkrechten* der Seiten des Dreiecks sind

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) + \frac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2),$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y = \frac{1}{2}(x_3^2 - x_1^2) + \frac{1}{2}(y_3^2 - y_1^2),$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2).$$

7) Die Basis  $x_2 | 0$ ,  $-x_3 | 0$  eines Dreiecks und die von der Spitze  $0 | y_1$  auf dieselbe gefällte Senkrechte sind als Koordinatenachsen gewählt; die Gleichungen der von den Basisecken auf die Gegenseiten gefällten Lote sind

$$x_3(x - x_2) + y_1y = 0, \quad x_2(x + x_3) - y_1y = 0$$

und die Koordinaten ihres Schnittpunktes  $0 \left| \frac{x_2x_3}{y_1} \right.$

8) Für dieselben Achsen sind die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Lote

$$2(x_3x + y_1y) = y_1^2 - x_3^2; \quad 2(x_2x - y_1y) = x_2^2 - y_1^2, \quad 2x = x_2 - x_3;$$

ihr Schnittpunkt ist

$$\frac{x_2 - x_3}{2} \left| \frac{y_1^2 - x_2x_3}{2y_1} \right.$$

9) Die Gleichung der Normale von  $x_1|y_1$  auf die Gerade  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  ist  $y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha$ , und die Koordinaten ihres Fußpunktes in derselben sind

$$x_1 + \cos \alpha (p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) | y_1 + \sin \alpha (p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha).$$

Daher ist die Entfernung dieses Schnittpunktes vom Punkte  $x_1|y_1$  gleich  $\pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$ , in Bestätigung der Ableitung von Nr. 34.

#### 42. Der Abstand eines Punktes $x_0|y_0$ von der Geraden

$$x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p = 0 \text{ ist}$$

$$(30) \quad s = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \cos (\omega - \alpha) - p).$$

Die Normalform der linearen Gleichung gibt zugleich die geometrische Bedeutung der Werte, die ihre linke Seite annimmt, falls die Koordinaten *irgend* eines Punktes in dieselbe eingesetzt werden. Transformieren wir nämlich die Gleichung zu parallelen Achsen durch den Punkt  $x_0|y_0$ , setzen also  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$ , so geht sie über in

$$x' \cos \alpha + y' \cos (\omega - \alpha) + x_0 \cos \alpha + y_0 \cos (\omega - \alpha) - p = 0;$$

das neue konstante Glied

$$-p' = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos (\omega - \alpha) - p$$

gibt also den normalen Abstand des neuen Nullpunktes von der Geraden, wenn wir zunächst vom Vorzeichen absehen.

Geometrisch finden wir dies folgendermaßen. Sind  $OP$ ,  $QV$  die Lote von  $O$  und von  $Q$  auf die Gerade  $MN$  (Fig. 25),  $OQ' = x_0$ ,  $Q'Q = y_0$ ,  $Q'T$  und  $QR$  Parallelen zu  $MN$ , so ist  $OT = x_0 \cos \alpha$ ,  $TR = SQ = y_0 \cos (\omega - \alpha)$ , also  $OR = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos (\omega - \alpha)$  und endlich  $PR = OR - p = VQ$ .

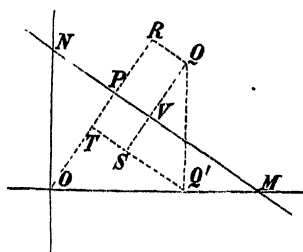


Fig. 25.

Läge aber  $Q$  auf derselben Seite der Geraden wie der Nullpunkt, etwa in  $S$ , so wäre  $SV = p - OT$  erhalten worden. Wir sehen daraus, daß der Abstand sein Vorzeichen wechselt, wenn man von einer Seite der Geraden auf die andere übergeht. Solange nur der Abstand *eines* Punktes von der Geraden betrachtet wird, ist es unnötig, dem Abstand ein Vorzeichen zu geben, da



es sich allein um seine absolute Größe handelt. Wenn wir aber die Abstände  $QV$ ,  $SV$  der Geraden von zwei verschiedenen Punkten  $Q$ ,  $S$  miteinander vergleichen, so müssen offenbar  $QV$  und  $SV$  als Strecken von entgegengesetztem Sinn unterschieden werden (Nr. 1 und 2).

Dasselbe folgt für die linke Seite der Gleichung der Geraden schon aus dem Zusatz zu Nr. 24, daß nämlich das Ergebnis der Substitution der Koordinaten  $x_0 | y_0$  so lange unveränderliches Vorzeichen hat, als der Punkt  $x_0 | y_0$  sich in einem der beiden Felder befindet, in die die Ebene durch die Gerade zerlegt wird. Nun haben wir  $p$  selbst als positiv angenommen, daher müssen wir das Vorzeichen so wählen, daß der Ausdruck des Abstandes  $s$  von  $x_0 | y_0$  bei Einsetzung von  $0 | 0$  positiv ist. *Der Abstand  $s$  eines beliebigen Punktes  $x_0 | y_0$  von der Geraden  $x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p = 0$  wird als das Substitutionsergebnis von  $x_0 | y_0$  in die linke Seite der Gleichung mit umgekehrtem Vorzeichen erhalten.*

Ist die Gleichung der Geraden in der allgemeinen Form  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$  gegeben, so führen wir sie durch Division mit  $R$  (Nr. 35) in die Normalform über und erhalten als den Abstand eines Punktes  $x_0 | y_0$

$$(31) \quad s = -\frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \text{bez.} \quad -\frac{(a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3) \sin \omega}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \omega}},$$

je nachdem die Achsen recht- oder schiefwinklig sind. Durch Vergleichen dieses Ausdrucks für den Abstand von  $x_0 | y_0$  mit dem für den Abstand von  $O$  sehen wir, daß  $x_0 | y_0$  mit dem Nullpunkt auf derselben Seite der Geraden liegt, wenn  $a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3$  mit  $a_3$  dasselbe Vorzeichen hat, und umgekehrt (vgl. Nr. 35).

Die Bedingung, daß irgend ein Punkt  $x_0 | y_0$  in der Geraden  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$  liege, besteht darin, daß  $a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 = 0$  sei. Wie der gegenwärtige Artikel zeigt, ist diese Bedingung nur der algebraische Ausdruck der geometrischen Wahrheit, daß der Abstand eines solchen Punktes  $x_0 | y_0$  von der Geraden gleich Null ist.

B. 1) Der Abstand des Anfangspunktes von der Geraden  $3x + 4y + 20 = 0$  ist bei rechtwinkligen Achsen  $p = 4$ .

2) Der Abstand des Punktes  $2|3$  von der Geraden  $2x + y - 4 = 0$  ist  $s = \frac{-3}{+\sqrt{5}}$ ; also sind  $2|3$  und  $0|0$  durch die Gerade getrennt.

3) Die Längen der Senkrechten von den Eckpunkten des Dreiecks  $2|1$ ,  $3|-2$ ,  $-4|-1$  auf die Gegenseiten sind  $2\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $2\sqrt{10}$ ; der Anfangspunkt liegt innerhalb des Dreiecks.

4) Der Abstand des Punktes  $3|-4$  von der Geraden  $4x + 2y - 7 = 0$  ist unter Voraussetzung eines Achsenwinkels von  $60^\circ$   $s = \frac{3}{4}$ ; der Punkt liegt auf der Seite des Anfangspunktes.

5) Der Abstand des Anfangspunktes von der Geraden

$$a(x - a) + b(y - b) = 0 \text{ ist } p = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

### 43. Gleichungen der Halbierungslinien des Winkels der Geraden

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0.$$

Wir finden die Gleichung einer dieser Geraden am einfachsten, indem wir algebraisch ausdrücken, daß die von irgendeinem Punkte  $x|y$  in ihr auf die beiden Winkelschenkel gefällten Lote gleich sind. Dies gibt unmittelbar die Gleichungen beider Winkelhalbierungslinien als

$$(32) \quad x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2),$$

weil jede Seite dieser Gleichungen einen von diesen Abständen bezeichnet (Nr. 42).

Wenn die Gleichungen in der Form gegeben sind

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3 = 0,$$

so sind die Gleichungen der Winkelhalbierenden

$$(33) \quad \frac{a_1x + a_2y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \pm \frac{b_1x + b_2y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Wie das doppelte Vorzeichen anzeigt, liegt von den Winkelhalbierungslinien die eine so, daß die Abstände ihrer Punkte von der einen der beiden Geraden nach Nr. 42 als positiv und die von der anderen als negativ zu betrachten sind; die andere Winkelhalbierende liegt dagegen so, daß ihre Abstände von beiden Geraden gleichzeitig positiv oder negativ sind.

Wenn wir das Vorzeichen wählen, das den beiden konstanten Gliedern einerlei Zeichen gibt, so drücken wir (Nr. 42)

durch die Gleichung die Halbierungslinie *des* Winkels aus, in dem der Anfangspunkt liegt; und wenn wir den konstanten Gliedern entgegengesetzte Zeichen geben, so haben wir die Gleichung der Halbierungslinie des Nebenwinkels.

Ganz in derselben Weise können wir den Ort eines Punktes bestimmen, dessen Abstände von zwei Geraden das konstante Verhältniß  $\lambda = s_1 : s_2$  haben. Bei positivem  $\lambda$  liegt der Punkt im Felde des Nullpunktes oder seinem Scheitelfeld, bei negativem  $\lambda$  in einem der Nebenfelder (Nr. 42). Der Ort ist in jedem Falle eine Gerade durch den Schnittpunkt der gegebenen, und zwar teilt sie denjenigen Winkel dieser beiden, durch den sie hindurchgeht, im Sinusverhältniß  $\lambda$  (Nr. 30). In der Tat ist die Gleichung des Ortes\*)

$$s_2 (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) = \pm s_1 (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2)$$

$$(34) \quad \text{oder } s_2 \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \pm s_1 \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}};$$

hierbei gehört das Vorzeichen, das den konstanten Gliedern gleiches Zeichen gibt, wenn man die Koordinaten eines Punktes der Winkelhalbierenden einsetzt, demjenigen Winkel an, in dem der Nullpunkt gelegen ist. Die den beiden Vorzeichen entsprechenden Strahlen bilden ein in bezug auf die gegebenen harmonisches Paar (Nr. 30).

B. 1) Die Gleichungen der Halbierungslinien des Winkels zwischen zwei Geraden, auf die Form  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  reduziert, lauten

$$x \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2} \right] + y \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{p_1 - p_2}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\text{und} \quad x \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + y \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{p_1 + p_2}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

2) Die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien für

$$3x + 4y - 9 = 0, \quad 12x + 5y - 3 = 0$$

sind

$$7x - 9y + 34 = 0, \quad 9x + 7y = 12.$$

\*) Die Gerade geht durch den gegebenen Schnittpunkt, weil ihre Gleichung durch das Wertepaar erfüllt wird, das die Gleichungen der beiden Geraden gleichzeitig befriedigt.

## 44. Aus den Gleichungen zweier Geraden

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3 = 0$$

folgt die jeder dritten durch ihren Schnittpunkt gehenden in der Form  $a_1x + a_2y + a_3 + k(b_1x + b_2y + b_3) = 0$ .

Die zunächstliegende Methode zur Bestimmung einer solchen Geraden besteht darin, nach Nr. 37 die Koordinaten  $x_0|y_0$  des Schnittpunktes der zwei Geraden zu berechnen und ihre Werte in die Gleichung von Nr. 39  $y - y_1 = m(x - x_1)$  einzusetzen.

Zu einem einfacheren Verfahren führt jedoch folgende Überlegung. Die gesuchte Gleichung muß linear sein und erfüllt werden, sobald die gegebenen gleichzeitig von einem Wertepaar  $x_0|y_0$  befriedigt werden. Diesen Anforderungen entspricht nun, für ganz beliebige Werte einer Konstanten  $k$ , die Gleichung

$$(35) \quad (a_1x + a_2y + a_3) + k(b_1x + b_2y + b_3) = 0;$$

sie stellt eine Gerade durch den Punkt  $x_0|y_0$  dar, der durch die beiden Gleichungen  $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3 = 0$ ,  $b_1x_0 + b_2y_0 + b_3 = 0$  bestimmt ist, denn für dessen Koordinaten verschwindet jeder der beiden Klammerausdrücke in (35). Für jeden Wert von  $k$  stellt daher die Gleichung (35) eine Gerade durch den Schnittpunkt dar.

Umgekehrt ist auch die Gleichung einer jeden durch diesen Schnittpunkt gehenden Geraden in der Form (35) darstellbar; denn um diejenige Gerade zu finden, die  $x_0|y_0$  mit einem beliebigen Punkte  $x_1|y_1$  verbindet, haben wir  $k$  nur aus der Bedingung zu berechnen, daß das Aggregat links für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  zu Null werde. Die verlangte Gleichung wird alsdann

$$(36) \quad \begin{aligned} & (b_1x_1 + b_2y_1 + b_3)(a_1x + a_2y + a_3) \\ &= (a_1x_1 + a_2y_1 + a_3)(b_1x + b_2y + b_3). \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß die Gleichungsform in Nr. 39 nur ein besonderer Fall von (35) ist; denn bestimmen wir einen Punkt durch die Geraden  $x - x_1 = 0$ ,  $y - y_1 = 0$ , so hat jede weitere durch ihn gehende Gerade eine Gleichung von der Form  $y - y_1 - m(x - x_1) = 0$ , wenn  $m$  eine verfügbare Konstante ist.

B. 1) Die Gleichung der Geraden, die den Anfangspunkt mit dem Schnittpunkt der oben erwähnten Geraden verbindet, lautet

$$(a_1 b_3 - a_3 b_1) x + (a_2 b_3 - a_3 b_2) y = 0.$$

Denn wir erhalten sie, indem wir die erste Gleichung mit  $b_3$ , die zweite mit  $a_3$  multiplizieren und die Produkte voneinander abziehen. Durch den Anfangspunkt geht die Gerade nach Nr. 23.

2) Die Gleichung der durch den Schnittpunkt derselben Geraden gezogenen  $x$ -Parallelen ist

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) y + a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

3) Die Gleichung der Geraden, die den Punkt 2 | 3 mit dem Schnittpunkt von  $2x + 3y + 1 = 0$  und  $3x - 4y = 5$  verbindet, ist  $11(2x + 3y + 1) + 14(3x - 4y - 5) = 0$  oder  $64x - 23y = 59$ .

**45. Bedingung dafür, daß drei Geraden demselben Büschel angehören.** Das in der vorhergehenden Nummer begründete Prinzip liefert für drei sich in demselben Punkt schneidende Geraden ein Kennzeichen, das häufig bequemer ist, als das in Nr. 37 angegebene. *Drei Geraden gehen durch denselben Punkt, gehören also demselben Büschel an, wenn es drei Konstanten von solcher Beschaffenheit gibt, daß nach Multiplikation der Gleichungen der Geraden mit je einer dieser Konstanten die Summe der linken Seiten der Gleichungen identisch verschwindet; d. h. wenn für alle  $x$  und  $y$  die Beziehung besteht*

$$(37) \quad l(a_1 x + a_2 y + a_3) + m(b_1 x + b_2 y + b_3) + n(c_1 x + c_2 y + c_3) = 0.$$

Denn in diesem Fall müssen die Werte der Koordinaten, die die beiden ersten Teile der Gleichung einzeln mit Null identisch machen, auch den dritten Teil gleich Null machen.

Da der Ausdruck (37) in  $l, m, n$  homogen ist, müssen auch  $ql, qm, qn$ , wo  $q$  eine beliebige Zahl bedeutet, Konstanten der gleichen Beschaffenheit sein; es lassen sich daher nur die Verhältnisse  $l : m : n$  eindeutig bestimmen, und zwar geschieht dies, wie aus (37) hervorgeht, mit Hilfe der Gleichungen

$$(38) \quad \begin{aligned} la_1 + mb_1 + nc_1 &= 0 \\ la_2 + mb_2 + nc_2 &= 0 \\ la_3 + mb_3 + nc_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die aus den Koeffizienten dieser Gleichungen gebildete Determinante

$$(39) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet nach Nr. 37; überdies ist das Verschwinden von  $\Delta$  die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei in den Unbekannten  $l, m, n$  homogenen Gleichungen (38) nebeneinander bestehen. Zur Berechnung von  $l:m:n$  sind nur zwei der drei Gleichungen (38) nötig. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Elemente  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) von  $\Delta$  mit  $A_i, B_i, C_i$ , so erhält man, je nachdem bei dem System (38) die erste, zweite oder letzte Gleichung weggelassen wird, durch Auflösung der beiden übrigen Gleichungen: (40)  $l:m:n = A_1:B_1:C_1$  oder  $= A_2:B_2:C_2$  oder  $= A_3:B_3:C_3$ .

Tatsächlich ist hier z. B.  $A_1:B_1 = A_2:B_2$  oder  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ , denn weil  $A_1B_2 - A_2B_1$  die Unterdeterminante von  $C_3$  in der aus den  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gebildeten Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

ist, besteht, wie man durch Ausrechnen leicht bestätigen kann, die Beziehung  $A_1B_2 - A_2B_1 = \Delta c_3$ , und dieser Ausdruck verschwindet nun wegen  $\Delta = 0$ .

Für später folgende Betrachtungen ist noch die Bemerkung wichtig, daß die Gleichung  $\Delta = 0$  als das Ergebnis der Elimination von  $l, m, n$  aus den drei Gleichungen (38) angesehen werden kann.

B. 1) Die drei *Mittellinien des Dreiecks*, die die Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Die Gleichungen dieser Geraden sind nach Nr. 40, 3

$$\begin{aligned} (y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 &= 0, \\ (y_3 + y_1 - 2y_2)x - (x_3 + x_1 - 2x_2)y + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 &= 0, \\ (y_1 + y_2 - 2y_3)x - (x_1 + x_2 - 2x_3)y + x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Da die Summe dieser drei Gleichungen identisch Null ist, so gehen die durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt, den

Schwerpunkt des Dreiecks. Nach Nr. 37 findet man für ihn die Koordinaten

$$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \mid \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Vgl. auch Nr. 14, 4.

2) Derselbe Satz ist evident unter der Voraussetzung, daß zwei Seiten des Dreiecks von den Längen  $a$  und  $b$  zu den Achsen genommen sind, denn dann sind die Gleichungen der Halbierungslinien

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

3) Die drei Höhen eines Dreiecks und die drei Mittelsenkrechten zu den Seiten schneiden sich je in einem Punkte, denn die Gleichungen Nr. 41, 5 u. 6 geben zur Summe identisch Null.

4) Die *Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks* schneiden sich in einem Punkte, denn ihre Gleichungen sind

$$\begin{aligned} (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1) - (x \cos \beta + y \sin \beta - p_2) &= 0, \\ (x \cos \beta + y \sin \beta - p_2) - (x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_3) &= 0, \\ (x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_3) - (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1) &= 0. \end{aligned}$$

Von den Halbierungslinien je zweier äußerer Winkel und der des dritten inneren gilt ein analoger Satz.

**46. Imaginäre Strahlen.** Jede reelle lineare Gleichung definiert eine reelle Gerade, d. h. eine Gerade mit unendlich vielen reellen Punkten. Außer diesen enthält aber eine reelle Gerade auch unendlich viele imaginäre Punkte, denn ein Punkt  $p + iq \mid p' + iq'$  liegt in der Geraden  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ , wenn für die vier reellen Größen  $p, q, p', q'$  die beiden reellen Bedingungen erfüllt sind

$$(41) \quad a_1p + a_2p' + a_3 = 0, \quad a_1q + a_2q' = 0;$$

man erhält diese durch die Einsetzung der komplexen Werte in die gegebene Gleichung, weil dann sowohl der reelle als der imaginäre Teil der linken Seite dieser Gleichung für sich verschwinden muß. Alsdann liegt aber gleichzeitig auch der konjugiert imaginäre Punkt  $p - iq \mid p' - iq'$  in der reellen Geraden (Nr. 24), denn er liefert dieselben Bedingungen. Aus diesem Grunde ist durch die Angabe eines imaginären Punktes eine reelle Gerade, die ihn enthalten soll, bestimmt, weil sie ihn mit seinem konjugiert imaginären Punkt verbinden muß.

Die Gleichung der Verbindungsgeraden oder des Trägers des imaginären Punktepaares ist (Nr. 40)

$$q'x - qy + p'q - pq' = 0.$$

Eine lineare Gleichung mit komplexen Koeffizienten können wir durch Trennung des reellen und des imaginären Teiles stets in der Form schreiben

$$(12) \quad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 + i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0.$$

Sie stellt daher eine imaginäre Gerade dar, denn sie enthält außer unendlich vielen imaginären Punkten nur einen einzigen reellen Punkt. Ein reelles Wertepaar  $x|y$  genügt der komplexen Gleichung nämlich nur, wenn es gleichzeitig die reellen Gleichungen befriedigt

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0.$$

Diese beiden reellen Geraden bestimmen also in ihrem Schnittpunkt (Nr. 37) den reellen Punkt, der auch auf der imaginären Geraden liegt. Derselbe Punkt liegt aber auch auf der konjugiert imaginären Geraden

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0.$$

Somit ist der Schnittpunkt konjugiert imaginärer Geraden stets reell und heißt der Träger des imaginären Paares. Ein reeller Punkt ist also durch die Angabe einer durch ihn gehenden imaginären Geraden bestimmt. Eine reelle oder imaginäre Gerade schneidet eine imaginäre nur dann reell, wenn sie durch ihren Träger geht; in allen anderen Fällen ist der Schnittpunkt imaginär<sup>11)</sup>

Auf die imaginären Geraden sind nun wiederum gewisse reelle geometrische Eigenschaften zu übertragen, indem die analytischen Ausdrücke derselben als Definitionen fortbestehend genommen werden. Vor allem erinnere man sich der allgemeinen analytischen Definitionen der goniometrischen Funktionen, nach denen für imaginäre und komplexe Argumente

$$(43) \quad \begin{cases} \sin i\eta' = i \frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2}, & \cos i\eta' = \frac{e^{\eta'} + e^{-\eta'}}{2}, \\ \sin(\eta + i\eta') = \frac{e^{\eta} + e^{-\eta'}}{2} \sin \eta + i \frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2} \cos \eta, \\ \cos(\eta + i\eta') = \frac{e^{\eta'} + e^{-\eta'}}{2} \cos \eta - i \frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2} \sin \eta. \end{cases}$$



Wir werden nun die Ausdrücke von Nr. 36 für die trigonometrischen Funktionen des Winkels zweier reeller Geraden auch bei komplexen Gleichungskoeffizienten gelten lassen und können alsdann den *Winkel zwischen imaginären Geraden* definieren. Fernerhin werden wir namentlich auch komplexe Richtungskoeffizienten und komplexe Sinusteilverhältnisse (Nr. 30) in Betracht zu ziehen haben.

#### 47. Die Polargleichung einer Geraden ist

$$(44) \quad r \cos (\vartheta - \alpha) = p.$$

Wenn wir nämlich das auf die gegebene Gerade  $g$  gefällte Lot  $OP$  als Nullachse voraussetzen, wenn ferner  $OR = r$  irgendein durch den Pol nach einem Punkt der Geraden  $g$  gezogener Vektor und  $\sphericalangle POR = \vartheta$  die zugehörige Anomalie (Nr. 21) ist, so folgt

$$r \cos \vartheta = p.$$

Bildet hingegen die Nullachse mit dem Lot den Winkel

$\alpha = AOP$  und ist jetzt  $\sphericalangle AOR = \vartheta$  die Anomalie von  $R$  (Fig. 26), so erhält man (Nr. 22)

$r \cos (\vartheta - \alpha) = p$ . Diese Gleichung kann auch

durch Transformation der Gleichung für rechtwinklige Koordinaten  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

erhalten werden; denn indem man für  $x \mid y$

bez.  $r \cos \vartheta \mid r \sin \vartheta$  (Nr. 22) einsetzt, wird diese Gleichung  $r (\cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha) = p$ , d. h.  $r \cos (\vartheta - \alpha) = p$ .

Eine Gleichung von der Form

$$r (a_1 \cos \vartheta + a_2 \sin \vartheta) + a_3 = 0$$

kann auf die Form  $r \cos (\vartheta - \alpha) = p$  reduziert werden, indem man sie durch  $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$  dividiert und wie in Nr. 35 setzt

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad p = \frac{-a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}.$$

B. 1) Wird die Gleichung  $r = 2a \sec \left( \vartheta + \frac{\pi}{6} \right)$  in eine solche zwischen rechtwinkligen Koordinaten umgewandelt, so folgt

$$x\sqrt{3} - y = 4a.$$

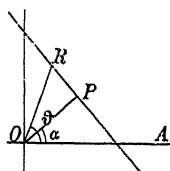


Fig. 26.

2) Die Polarkoordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$r \cos \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) = 2a, \quad r \cos \left( \vartheta - \frac{\pi}{6} \right) = a$$

sind  $r = 2a$ ,  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ; der eingeschlossene Winkel ist  $= \frac{\pi}{3}$ .

3) Die Polargleichung der Verbindungsgeraden der Punkte  $r_1 | \vartheta_1$ ,  $r_2 | \vartheta_2$  ist:

$$r_1 r_2 \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2) + r_2 r \sin (\vartheta_2 - \vartheta) + r r_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1) = 0.$$

4) Die Polargleichung der Normale auf  $r \cos (\vartheta - \alpha) = p$  aus  $r_1 | \vartheta_1$  ist  $r \sin (\vartheta - \alpha) = r_1 \sin (\vartheta_1 - \alpha)$ .

5) Der Abstand des Punktes  $r_1 | \vartheta_1$  von der Geraden  $r \cos (\vartheta - \alpha) = p$  ist  $\pm \{ r_1 \cos (\vartheta_1 - \alpha) - p \}$ .

## Drittes Kapitel.

### Aufgaben über Geraden und Geradenpaare.

48. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Prinzipien dargelegt haben, mit deren Hilfe sich die Lage eines Punktes oder einer Geraden in der Ebene algebraisch ausdrücken läßt, wollen wir einige weitere Beispiele von der Anwendung dieser Methode zur Lösung geometrischer Aufgaben hinzufügen. Der Anfänger muß sich in der Anwendung der Methode zur Lösung solcher Aufgaben üben, bis er hierin Sicherheit und Schnelligkeit erlangt hat.

Bei den Auflösungen geometrischer Aufgaben können im allgemeinen die Gleichungen durch eine geschickte Wahl der Koordinatenachsen vereinfacht werden; indem man zwei der wichtigsten Linien der Figur zu Koordinatenachsen wählt, werden die analytischen Ausdrücke wesentlich verkürzt (vgl. Nr. 40, 7, 8, 9, Nr. 41, 7). Andererseits geschieht es freilich oft, daß durch die Annahme von Koordinatenachsen, die mit der Figur nicht in einer solchen besonderen Verbindung stehen, die Gleichungen an Symmetrie das gewinnen, was ihnen an Einfachheit abgeht. Der Leser kann dies aus den zwei in Nr. 45, 1, 2 gegebenen Auflösungen derselben Aufgabe erkennen, wo die erste Lösung, obgleich die längere, den Vorzug hat, daß man aus der entwickelten Gleichung der einen Mittellinie sogleich die der beiden anderen ohne Rechnung ableiten kann.

Weil Ausdrücke, die von Winkeln abhängen, durch die Anwendung schiefwinkliger Koordinaten komplizierter werden, ist es im allgemeinen ratsam, für solche Aufgaben rechtwinklige Achsen voranzusetzen.

Die analytische Geometrie eignet sich mit vorzüglicher Leichtigkeit zur Untersuchung *geometrischer Orte*. Wir haben nur die Beziehung aufzusuchen, die auf Grund der Bedingungen

der Aufgabe zwischen den Koordinaten des Punktes stattfinden muß, dessen Ort gesucht wird; der algebraische Ausdruck dieser Beziehung liefert uns sofort die *Gleichung* des verlangten Ortes (Nr. 26).

B. 1) Ort der Spitze eines Dreiecks, von dem die Basislänge  $2c$  und die Differenz der Quadrate der anderen Seiten gegeben sind.

Wir nehmen die Basis und ihr Mittellot zu Koordinatenachsen und nennen die Koordinaten der Spitze  $x|y$ . Dann ist (Fig. 27)

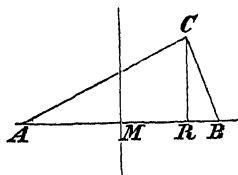


Fig. 27.

$\overline{AC}^2 = y^2 + (c + x)^2$ ,  $\overline{BC}^2 = y^2 + (c - x)^2$ ,  $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4cx$ ; die Gleichung des fraglichen Ortes ist also  $4cx = m^2$ ; derselbe ist somit eine zur Basis rechtwinklige Gerade in einer Entfernung  $x = \frac{m^2}{4c}$  vom Mittelpunkt. Man sieht auch, daß die Differenz der Quadrate der Basisabschnitte  $\overline{AR}^2 - \overline{BR}^2$  der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist.

2) Ort der Spitze aus der Basis und der gegebenen konstanten Summe  $\cot A + m \cot B = p$ .

Aus der Figur folgt  $\cot A = \frac{c+x}{y}$ ,  $\cot B = \frac{c-x}{y}$ ; die Gleichung des Ortes ist also  $c + x + m(c - x) = py$ , die Gleichung einer Geraden.

3) Von einem Dreieck ist die Basis  $AB = 2c$  und die Summe  $m$  der beiden anderen Seiten gegeben; welches ist der Ort des Punktes in dem von der Spitze des Dreiecks auf die Basis gefällten Lote, der jenseits der Spitze liegend um die Länge der einen Seite  $AC$  von der Basis entfernt ist?

Wir nehmen dieselben Achsen (Fig. 27), um zu untersuchen, welche Beziehung zwischen den Koordinaten des Punktes besteht, dessen Ort wir zu bestimmen haben. Die Abszisse des Punktes ist  $MR$  und seine Ordinate nach der Voraussetzung so groß wie  $AC$ ; also ist

$$BC = m - y.$$

Auch gilt

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \cdot AR,$$

d. h.

$$(m - y)^2 = 4c^2 + y^2 - 4c(c + x),$$

woraus wir durch Reduktion erhalten  $2my - 4cx = m^2$ , die Gleichung einer Geraden.

4) Wenn zwei feste Geraden  $OA$ ,  $OB$  durch eine dritte  $AB$  von gegebener Richtung ( $\parallel OC$ ) geschnitten werden, so soll der

Ort des Punktes  $P$  gefunden werden, der die Strecke  $AB$  in dem Verhältnis teilt, daß  $AP = n \cdot AB$  ist (Fig. 28).

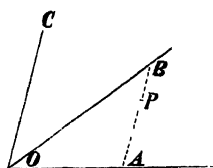


Fig. 28.

Wir können hier schiefwinklige Achsen anwenden, weil die Aufgabe die Betrachtung von Winkeln nicht erfordert: Nehmen wir also  $OA$  zur  $x$ -Achse,  $OC$  zur  $y$ -Achse, so daß die Gleichung für  $OB$  von der Form  $y = mx$  ist. Alsdann ist  $AB = m \cdot OA$ ; somit  $AP = mn \cdot OA$ , und der gesuchte

Ort des Punktes  $P$  eine Gerade aus dem Anfangspunkt mit der Gleichung  $y = mn x$ .

5) Man denke wie vorher  $AP$  parallel  $OC$  gezogen und durch eine Anzahl von Geraden in Punkten  $B, B', B''$  usw. geschnitten,  $AP$  aber als proportional der Summe aller Ordinaten  $AB, AB'$  usw. bestimmt, und den Ort von  $P$  gesucht.

Für  $y = mx$ ,  $y = m'x + n'$ ,  $y = m''x + n''$  usw. als die Gleichungen der festen Geraden ist die Gleichung des Ortes

$$ky = mx + (m'x + n') + (m''x + n'') + \text{usw.}$$

6) Von einer beliebigen Anzahl von Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze sind die Grundlinien und die Summe  $m^2$  ihrer Flächen gegeben; man soll den Ort ihrer Spitze finden.

Sind die Gleichungen der Grundlinien

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0, \quad x \cos \beta + y \sin \beta - p_2 = 0, \\ x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_3 = 0 \text{ usw.}$$

und ihre Längen  $a, b, c$  usw., so ist  $a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1)$  (Nr. 42) der doppelte Inhalt des ersten Dreiecks. Die Gleichung des Ortes muß daher sein

$$a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1) + b(x \cos \beta + y \sin \beta - p_2) \\ + c(x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_3) + \dots = 2m^2;$$

der Ort ist also eine Gerade.

7) Aus gegebenem Winkel an der Spitze  $O$  und der Summe  $s$  der ihn einschließenden Seiten den Ort des Punktes zu finden, der die Basis in gegebenem Verhältnis teilt.

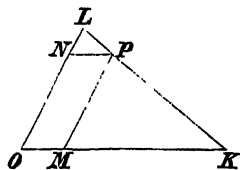


Fig. 29.

Wir wählen jene Seiten des Dreiecks als Koordinatenachsen und setzen das Verhältnis  $KP:PL$  gleich  $n:m$ . Dann folgt aus ähnlichen Dreiecken (Fig. 29)

$$OK = \frac{m+n}{m} x, \quad OL = \frac{m+n}{n} y,$$

und der Ort ist eine Gerade mit der Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{s}{m+n}.$$

8) Man bestimme den Ort eines Punktes  $P$ , wenn die Summe der Abschnitte  $OM + ON$  gegeben ist, die die von ihm auf zwei feste Geraden gefällten Lote  $PM, PN$  in diesen bilden (Fig. 30).

Indem man die festen Geraden zu Achsen wählt, findet man

$$OM = x + y \cos \omega, \quad ON = y + x \cos \omega$$

und daher die Gleichung des Ortes  $x + y = \text{const.}$

9) Man soll den Ort bestimmen unter der Voraussetzung, daß  $MN$  einer festen Geraden parallel sei; er ist

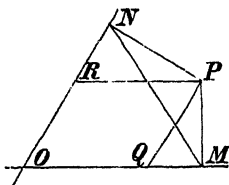


Fig. 30.

$$y + x \cos \omega = m(x + y \cos \omega).$$

10) Ebenso, wenn  $MN$  durch eine gegebene Gerade  $y = mx + n$  halbiert (oder allgemeiner in gegebenem Verhältnis geteilt) werden soll.

Die Koordinaten des Mittelpunktes ergeben sich mit Hilfe der Koordinaten von  $P$  gleich  $\frac{1}{2}(x + y \cos \omega) | \frac{1}{2}(y + x \cos \omega)$ , und da sie der Gleichung der gegebenen Geraden genügen müssen, so ist der Ort von  $P$  dargestellt durch

$$y + x \cos \omega = m(x + y \cos \omega) + 2n.$$

11) Ort des Mittelpunktes von  $MN$ , wenn  $P$  die Gerade  $y = mx + n$  durchläuft.

Sind  $\alpha | \beta$  die Koordinaten von  $P$ ,  $x | y$  die des Mittelpunktes, so ward in der vorigen Aufgabe bewiesen, daß

$$2x = \alpha + \beta \cos \omega, \quad 2y = \beta + \alpha \cos \omega$$

sei; die Auflösung dieser Gleichungen für  $\alpha | \beta$  liefert

$$\alpha \sin^2 \omega = 2x - 2y \cos \omega, \quad \beta \sin^2 \omega = 2y - 2x \cos \omega,$$

und nach der Beziehung  $\beta = m\alpha + n$ , die  $\alpha$  und  $\beta$  verbindet, ist

$$2y - 2x \cos \omega = m(2x - 2y \cos \omega) + n \sin^2 \omega$$

die Gleichung des Ortes.

49. Es ist üblich und zweckmäßig, die Koordinaten des veränderlichen Punktes, der einen Ort beschreibt, durch  $x | y$ , dagegen die Koordinaten fester Punkte durch Buchstaben mit Indizes oder mit Akzenten zu bezeichnen; dementsprechend sind in den vorigen Aufgaben die Buchstaben  $x$  und  $y$  überall für die Koordinaten des Punktes gewählt worden, nach dessen Ort gefragt ward. Oft ist es aber zur Bestimmung des Ortes notwendig, die Gleichungen von Linien zu bilden, die mit der Figur in Verbindung stehen, und dann entsteht

die Gefahr der Verwirrung zwischen den laufenden Koordinaten  $x|y$  eines Punktes in einer solchen Geraden und den Koordinaten  $x|y$  des Punktes, der den gesuchten Ort beschreibt. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, die Koordinaten des letzten Punktes zuerst durch andere Buchstaben, etwa  $\alpha|\beta$ , zu bezeichnen und die Betrachtung bis zur Aufstellung einer sie verbindenden Beziehung zu führen. Diese ist bereits die Gleichung des Ortes und wird in der gewöhnlichen Form erhalten, indem man  $\alpha|\beta$  durch  $x|y$  ersetzt.

B. 1) Ort der Spitze  $P$  eines Dreiecks, von dem die Basis  $CD$  und das Verhältnis  $AM : NB$  der Teile gegeben ist, die die Seiten in einer festen, der Basis parallelen Strecke  $AB$  abschneiden.

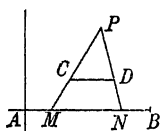


Fig. 31.

Wir nehmen  $AB$  und die zu ihr rechtwinklig durch  $A$  gezogene Gerade zu Achsen (Fig. 31) und haben  $AM$ ,  $NB$  durch die Koordinaten  $\alpha|\beta$  von  $P$  auszudrücken. Sind  $x'|y'$ ,  $x''|y'$  die Koordinaten von  $C$  und  $D$ , so ist die Gleichung der Geraden  $PC$  als der Verbindungslinie von  $\alpha|\beta$  und  $x'|y'$  (Nr. 40)

$$(\beta - y')x - (\alpha - x')y = \beta x' - \alpha y'.$$

Dieser Gleichung genügt wie jeder Punkt von  $PC$  auch der in der Abszissenachse gelegene Punkt  $M$ , dessen Abszisse  $x = AM$  ist; wir erhalten also aus ihr für  $y = 0$

$$AM = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'}; \text{ und ebenso } AN = \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

Wenn  $AB = c$  ist, so gibt die Beziehung  $AM = k \cdot NB$

$$\frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'} = k \left\{ c - \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'} \right\},$$

eine Gleichung, in der die Bedingungen der Aufgabe durch die Koordinaten des Punktes  $P$  ausgedrückt sind. Nunmehr können ohne verwirrende Folge die Größen  $\alpha|\beta$  durch  $x|y$  ersetzt werden, und es ergibt sich durch Beseitigung der Brüche die Gleichung des Ortes in der Form

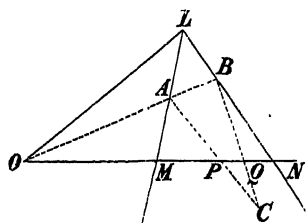


Fig. 32.

$$yx' - xy' = k \{ c(y - y') - (yx'' - xy') \}.$$

2) Zwei Ecken  $A$ ,  $B$  eines Dreiecks  $ABC$  bewegen sich in festen Geraden  $LM$ ,  $LN$  und seine drei Seiten drehen sich um feste Punkte  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ , die in einer Geraden liegen (Fig. 32); welches ist der Ort der dritten Ecke?

Wir nehmen die Gerade  $OP$ , die die drei festen Punkte enthält, zur  $x$ -Achse und die Gerade  $OL$ , die den Schnittpunkt der beiden festen Geraden mit dem Punkte  $O$  verbindet, zur  $y$ -Achse. Unter den Voraussetzungen

$$OL = b, \quad OM = a, \quad ON = a', \quad OP = c, \quad OQ = c'$$

sind die Gleichungen von  $LM$  und  $LN$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ist  $ABC$  eine durch die Koordinaten  $\alpha|\beta$  von  $C$  bestimmte Lage des beweglichen Dreiecks, so ist die Gleichung von  $CP$ , als der Verbindungslinie des Punktes  $\alpha|\beta$  mit  $P$  oder  $c|0$ :

$$(\alpha - c)y - \beta x + \beta c = 0.$$

Daraus folgen die Koordinaten des Schnittpunktes  $A$  dieser Geraden mit  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  als

$$x_1 = \frac{ab(\alpha - c) + ac\beta}{b(\alpha - c) + a\beta}, \quad y_1 = \frac{b(\alpha - c)\beta}{b(\alpha - c) + a\beta},$$

und die Koordinaten von  $B$  werden aus ihnen gefunden, indem man statt  $a$  und  $c$  bez.  $a'$  und  $c'$  einführt:

$$x_2 = \frac{a'b(\alpha - c') + a'c'\beta}{b(\alpha - c') + a'\beta}, \quad y_2 = \frac{b(\alpha - c')\beta}{b(\alpha - c') + a'\beta}.$$

Damit aber diese beiden Punkte  $x_1|y_1$  und  $x_2|y_2$  in einer Geraden durch den Nullpunkt liegen, muß (Nr. 40)

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 \text{ sein, also}$$

$$\frac{b(\alpha - c)\beta}{ab(\alpha - c) + ac\beta} = \frac{b(\alpha - c')\beta}{a'b(\alpha - c') + a'c'\beta}.$$

Da diese Beziehung von den Koordinaten des Punktes  $\alpha|\beta$  stets erfüllt werden muß, so wird die Gleichung des Ortes einfach dadurch erhalten, daß man  $\alpha|\beta$  mit  $x|y$  vertauscht; nach Beseitigung der Nenner ergibt sich

$$(a - c)[a'b(x - c') + a'c'y] = (a' - c')[ab(x - c) + acy]$$

$$\text{oder} \quad \frac{(ac' - a'c)x}{cc'(a - a') - aa'(c - c')} + \frac{y}{b} = 1.$$

Der Ort ist demnach eine durch den Punkt  $L$  gehende Gerade.

3) In der letzten Aufgabe den Ort der Ecke  $C$  unter der Voraussetzung zu finden, daß die Punkte  $P, Q$  in einer statt durch  $O$  durch  $L$  gehenden Geraden liegen.



Wir lösen zuerst das allgemeine Problem, in dem die Punkte  $P, Q$  eine vollkommen unbestimmte Lage haben, und wählen dazu die Linien  $LM, LN$  zu Koordinatenachsen. Sind dann die Koordinaten von  $P, Q, O, C$  bez.  $x_1 | y_1, x_2 | y_2, x_3 | y_3, \alpha | \beta$ , so ist die Bedingung auszudrücken, daß die Verbindungslinie der Punkte  $A$  und  $B$ , in denen die Geraden  $CP, CQ$  die Achsen schneiden, stets durch  $O$  gehe (Fig. 33). Nun ist die Gleichung von  $CP: (\beta - y_1)x - (\alpha - x_1)y$

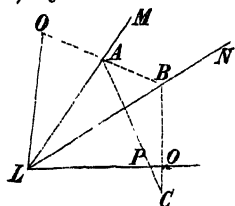


Fig. 33.

$= \beta x_1 - \alpha y_1$ , und der von ihr in der  $x$ -Achse bestimmte Abschnitt daher  $LA = \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{\beta - y_1}$ . In gleicher Weise ist der von  $CQ$  in der  $y$ -Achse gebildete Abschnitt  $LB = \frac{\alpha y_2 - \beta x_2}{\alpha - x_2}$ , und daher die Gleichung von  $AB$

$$\frac{x}{LA} + \frac{y}{LB} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x(\beta - y_1)}{\beta x_1 - \alpha y_1} + \frac{y(\alpha - x_2)}{\alpha y_2 - \beta x_2} = 1.$$

Daß diese Gleichung durch die Koordinaten  $x_3 | y_3$  erfüllt werde, ist die Bedingung des Problems, d. h. die Koordinaten  $\alpha | \beta$  des Punktes  $C$  sind durch die Beziehung verbunden

$$\frac{x_3(\beta - y_1)}{\beta x_1 - \alpha y_1} + \frac{y_3(\alpha - x_2)}{\alpha y_2 - \beta x_2} = 1.$$

Die Beseitigung der Nenner zeigt, daß diese Gleichung in den  $\alpha | \beta$  im allgemeinen vom zweiten Grade ist. Wenn wir aber voraussetzen, daß die Punkte  $x_1 | y_1, x_2 | y_2$  in derselben Geraden  $y = mx$  durch  $L$  liegen, so daß  $y_1 = mx_1, y_2 = mx_2$  ist, so kann die Gleichung in der Form  $\frac{x_3(\beta - y_1)}{x_1(\beta - \alpha m)} + \frac{y_3(\alpha - x_2)}{x_2(\alpha m - \beta)} = 1$  geschrieben werden. Wenn man nun die Nenner beseitigt und  $\alpha | \beta$  durch  $x | y$  ersetzt, ergibt sich als Ort eine Gerade mit der Gleichung

$$x_3 x_2 (y - y_1) - y_3 x_1 (x - x_2) = x_1 x_2 (y - mx).$$

50. Statt die Bedingungen der Aufgabe direkt durch die Koordinaten des Punktes auszudrücken, dessen Ort gesucht wird, ist es oft zweckmäßig, sie zunächst mit Hilfe anderer Linien der Figur zu bestimmen. Dann ist es nötig, so viele Beziehungen aufzustellen, als zur Elimination der so eingeführten Unbekannten hinreichend sind, um nach vollzogener Elimination eine Gleichung zwischen den Koordinaten des Punktes zu finden, dessen Ort gesucht wird. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung dieser Methode hinreichen.

B. 1) Ort der Mittelpunkte der Rechtecke, die in ein gegebenes Dreieck  $ABC$  eingeschrieben sind.

Wir nehmen  $RC$  und  $AB$  zu Koordinatenachsen (Fig. 34) und setzen  $RC = p$ ,  $RB = s$  und  $AR = s'$ : dann haben  $AC$  und  $BC$  die Gleichungen  $\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1$  und  $\frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1$ .

Wenn wir nun in der Entfernung  $KF = k$  eine Parallele  $FS$  ziehen, so finden wir die Abszissen der Punkte  $F$  und  $S$ , in denen diese Parallele die Seiten  $AC$  und  $BC$  trifft, durch Substitution von  $y = k$  in die Gleichungen von  $AC$  und  $BC$ . So erhalten wir aus der ersten und der zweiten Gleichung bez.

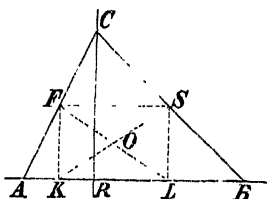


Fig. 34.

$$x = RK = -s' \left(1 - \frac{k}{p}\right);$$

$$x = RL = s \left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Daraus ergibt sich die Abszisse des Mittelpunktes von  $FS$  (Nr. 14):

$x = \frac{s-s'}{2} \left(1 - \frac{k}{p}\right)$ . Dies ist die Abszisse von  $O$ , die Ordinate ist  $y = \frac{1}{2}k$ . Sollen wir eine Beziehung finden, die zwischen dieser Ordinate und Abszisse für jeden Wert von  $k$  bestehen muß, so haben wir nur zwischen diesen Gleichungen  $k$  zu eliminieren; dann erhalten wir für die Gleichung des verlangten Ortes

$$2x = (s - s') \left(1 - \frac{2y}{p}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{2x}{s-s'} + \frac{2y}{p} = 1.$$

Der gesuchte Ort ist also eine Gerade, und die Achsenabschnitte derselben zeigen, daß sie den Mittelpunkt der Basis  $AB$  mit dem Mittelpunkte der Höhe  $CR$  verbindet.

2) Parallel zur Basis eines Dreiecks ist eine Gerade gezogen, und die Punkte, in denen sie die Seiten desselben schneidet, sind mit je einem festen Punkte der Basis durch Geraden verbunden. Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien?

Wir behalten die Achsen und die übrigen Bestimmungen in 1) und nehmen als die Koordinaten der festen Punkte  $T$  und  $V$  der Basis  $m|0$  und  $n|0$ . Dann ist die Gleichung

$$\text{von } FT' \quad \left[s' \left(1 - \frac{k}{p}\right) + m\right] y + kx - km = 0,$$

$$\text{von } SV \quad \left[s \left(1 - \frac{k}{p}\right) - n\right] y - kx + kn = 0.$$

Da nun der Punkt, dessen Ort wir suchen, in jeder der beiden Geraden  $FT'$  und  $SV$  liegt, so drücken die eben geschriebenen Gleichungen Beziehungen aus, die seine Koordinaten erfüllen müssen;

da sie aber die Größe  $k$  enthalten, so entsprechen diese Beziehungen lediglich der besonderen Lage des Punktes, für die die Parallele  $FS$  in der Höhe  $k$  über der Basis gezogen ist. Eliminieren wir aber die Unbestimmte  $k$  zwischen diesen Gleichungen, so erhalten wir eine Beziehung, die neben den Koordinaten des betrachteten Punktes nur bekannte Größen enthält, und die, als wahr für jede beliebige Lage der Parallelen  $FS$ , die geforderte Gleichung des Ortes sein muß.

Wir setzen also die Gleichungen in die Form

$$(s' + m)y - k\left(\frac{s'}{p}y - x + m\right) = 0,$$

$$(s - n)y - k\left(\frac{s}{p}y + x - n\right) = 0,$$

und erhalten durch Elimination von  $k$  die Gleichung des Ortes

$$(s - n)\left(\frac{s'}{p}y - x + m\right) = (s' + m)\left(\frac{s}{p}y + x - n\right),$$

die Gleichung einer Geraden.

3) In einem Dreieck sind die Schnittpunkte der Seiten und einer Parallelen zur Basis verbunden mit den gegenüberliegenden Basisecken; Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinien?

Die Aufgabe ist zwar ein besonderer Fall der vorigen, nimmt aber eine einfachere Auflösung an, indem man die Dreiecksseiten  $AC$  und  $CB$  zu Achsen wählt; sind dann ihre Längen  $a$  und  $b$ , so können die proportionalen Abschnitte, die die Parallele in ihnen macht, durch  $\mu a$  und  $\mu b$  ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen der Transversalen  $AS$  und  $BF$ :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\mu b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\mu a} + \frac{y}{b} = 1;$$

indem man die eine von der anderen subtrahiert und den Rest durch die Konstante  $1 - \frac{1}{\mu}$  dividiert, erhält man für die Gleichung des Ortes  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ , die Gleichung der Verbindungsgeraden der Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis (Nr. 45, 2).

4) Es sind zwei feste Punkte  $A$  und  $B$ , je einer in jeder Achse, gegeben und zwei veränderliche  $A'$  und  $B'$  in denselben Achsen so bestimmt, daß  $OA' + OB' = OA + OB$  ist; Ort des Schnittpunktes der Geraden  $AB'$  und  $A'B$ ?

Sei  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OA' = a + k$ , so ist nach den Bedingungen des Problems  $OB' = b - k$ ; die Gleichungen von  $AB'$ ,  $A'B$  sind bez.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b-k} = 1$ ,  $\frac{x}{a+k} + \frac{y}{b} = 1$ , oder  $bx + ay - ab + k(a - x) = 0$ ,  $bx + ay - ab + k(y - b) = 0$ .

Wir eliminieren  $k$  durch Subtraktion und erhalten für die Gleichung des Ortes  $x + y = a + b$ .

5) In der Basis  $AB$  eines Dreiecks sei ein Stück  $AT = k$  und am anderen Ende ein Stück  $SB$  genommen, das zu  $AT$  in einem festen Verhältnis  $m$  steht; werden sodann  $ET$  und  $FS$  einer festen Geraden  $CR$  parallel gezogen, so ist der Ort des Punktes  $O$  zu finden, in dem sich die Geraden  $EB$  und  $FA$  schneiden (Fig. 35).

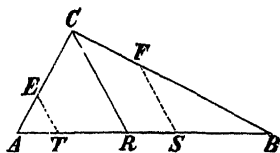


Fig. 35.

Wir nehmen  $AB$  zur  $x$ -Achse,  $RC$  zur  $y$ -Achse, setzen  $RB = s$ ,  $AR = s'$ ,  $RC = p$ , so daß  $SB = mk$  ist. Alsdann sind die Abszissen von  $S$  und von  $T$  bez.  $s - mk$ ,  $-(s' - k)$ .

Wir finden die Koordinaten von  $E$  und  $F$ , indem wir diese Werte von  $x$  in die Gleichungen von  $AC$  und  $BC$  einsetzen; also

$$E \text{ als } -(s' - k) \mid \frac{pk}{s'}, \quad F \text{ als } s - mk \mid \frac{mpk}{s}.$$

Wir bilden nun die Gleichungen der Geraden  $EB$  und  $FA$ , nämlich

$$EB \quad (s + s' - k)y + \frac{pk}{s'}x - \frac{pks}{s'} = 0,$$

$$FA \quad (s + s' - mk)y - \frac{mpk}{s}x - \frac{mpks'}{s} = 0$$

und eliminieren endlich  $k$  durch Subtraktion beider Gleichungen voneinander und Division des Restes durch  $k$ ; so erhalten wir die Gerade

$$(m - 1)y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right)x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps'}{s'}\right) = 0.$$

6)  $PP'$  und  $QQ'$  sind ein Paar beliebige Parallelen zu den Seiten eines Parallelogramms; welches ist der Ort des Schnittpunktes der Geraden  $PQ$  und  $P'Q'$  (Fig. 36)?

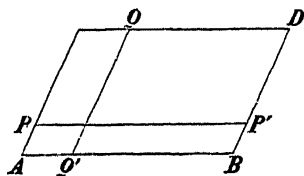


Fig. 36.

Wir nehmen zwei der Seiten des Parallelogramms zu Achsen, setzen ihre Längen gleich  $a$  und  $b$  und bezeichnen  $AQ'$  durch  $m$  und  $AP$  durch  $n$ . Dann ist die Gleichung von  $PQ$ , als Verbindungsgerade der Punkte  $O \mid n$  und  $m \mid b$ ,  $(b - n)x - my + mn = 0$ , und die Gleichung von  $P'Q'$ , der Verbindungsline von  $a \mid n$  mit  $m \mid 0$ ,

$$nx - (a - m)y - mn = 0.$$

Da hier zwei unbestimmte Größen  $m$  und  $n$  vorhanden sind, so kann man vermuten, daß es nicht möglich sein werde, sie beide

aus diesen zwei Gleichungen zu eliminieren; addiert man jedoch die beiden Gleichungen zueinander, so verschwinden beide Unbestimmte und man erhält den Ort  $bx - ay = 0$ , die Gleichung der Diagonale  $AD$  des Parallelogramms.

7) Ein Punkt und zwei feste Geraden sind gegeben; man zieht durch jenen irgend zwei Geraden und verbindet die Punkte, wo diese den festen Geraden begegnen, kreuzweise; Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien?

Wir nehmen die festen Geraden zu Koordinatenachsen und lassen die Gleichungen der durch den festen Punkt willkürlich gezogenen Geraden sein

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1.$$

Weil diese Geraden durch den festen Punkt  $x'|y'$  gehen müssen, ist auch  $\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1$  und  $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$  oder durch Subtraktion

$$x' \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) + y' \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = 0.$$

Die Gleichungen der Transversalen sind offenbar

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$  und  $\frac{x}{m'} + \frac{y}{n} = 1$ ; sie liefern durch Subtraktion

$$x \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) - y \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der vorher gefundenen lassen sich  $\left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right)$  und  $\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$  eliminieren, und wir erhalten dadurch mit  $x'y + y'x = 0$  die Gleichung einer Geraden durch den Nullpunkt.

8) Durch irgendeinen Punkt  $Q$  in der Basis eines Dreiecks wird in gegebener Richtung eine Gerade von gegebener Länge so gezogen, daß sie in jenem Punkte halbiert (allgemeiner von der Basis in einem gegebenen Verhältnis geteilt) ist; welches ist der Ort der Schnittpunkte der Linien, die die Enden der Geraden mit denen der Basis verbinden, während  $Q$  die Basis des Dreiecks durchläuft?

51. Der Grundgedanke der analytischen Geometrie liegt darin, daß jede durch einen Punkt zu erfüllende geometrische Bedingung zu einer Gleichung führt, die durch seine Koordinaten befriedigt werden muß. Darum ist es sehr wichtig, daß sich der Anfänger in der Anwendung jener Idee übe, um so möglichst jede geometrische Bedingung durch eine Gleichung

ausdrücken zu lernen. Wir fügen deshalb zur weiteren Übung eine Anzahl von Aufgaben über Orte bei, die auf Gleichungen führen, deren Grad den ersten übersteigt. Obwohl die Deutung solcher Gleichungen erst Gegenstand der späteren Kapitel und des weiteren Ausbaues der Wissenschaft ist, so ist doch die Methode, durch die man zu diesen Gleichungen gelangt — und damit haben wir es hier allein zu tun — dieselbe, wie in dem Falle des geradlinigen Ortes. In der Tat erfährt man ja erst durch die Aufstellung der Gleichung des Ortes den Grad derselben und des Problems. Die folgenden Beispiele sind so gewählt, daß sie nach der Reihenfolge ihrer Aufzählung eine analoge Behandlung gestatten, wie die Aufgaben der vorhergehenden Nummern. In den bei ihnen gegebenen Auflösungen ist vorausgesetzt, daß die Achsen ebenso gewählt sind, wie in den entsprechenden früheren Beispielen.

**B. 1)** Der Ort der Spitze eines Dreiecks, wenn die Basis und die Quadratsumme der anderen Seiten gegeben sind, ist

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}m^2 - c^2.$$

2) Ebenso, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der  $m$ - und  $n$  fachen Seitenquadrate bekannt, etwa gleich  $p^2$  sind:

$$(m \pm n)(x^2 + y^2) + 2(m \mp n)cx + (m \pm n)c^2 = p^2.$$

3) Aus der Basis und dem Verhältnis der Seiten.

4) Aus der Basis und dem Produkt der Tangenten der an ihr anliegenden Winkel:  $y^2 + m^2x^2 = m^2c^2$ .

In diesem und dem folgenden Beispiel sind die Werte der Tangenten der Basiswinkel zu benutzen, die in Nr. 48, 2 gegeben sind.

5) Aus der Basis und dem Winkel an der Spitze oder der Summe der Basiswinkel:  $x^2 + y^2 - 2cy \cot C = c^2$ .

6) Aus der Basis und der Differenz der Basiswinkel:

$$x^2 - y^2 + 2xy \cot D = c^2.$$

7) Aus der Basis und für das Verhältnis der Basiswinkel  $A : B = 1 : 2$

$$3x^2 - y^2 + 2cx = c^2.$$

8) Aus der Basis und der Beziehung  $\operatorname{tg} C = m \operatorname{tg} B$ :

$$m(x^2 + y^2 - c^2) = 2c(c - x).$$

9) Wie in Nr. 48, 4 ist die Gerade  $AP$  parallel zu  $OC$  gezogen, so daß sie zwei Geraden mit den Gleichungen  $y = mx$  und  $y = m'x + n'$  in Punkten  $B, B'$  schneidet, und der Punkt  $P$  ist so bestimmt, daß  $PA^2 = PB \cdot PB'$  ist. Der Ort von  $P$  ist

$$mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n').$$

10)  $PA$  ist als das harmonische Mittel (Nr. 15, 2) zwischen  $AB$  und  $AB'$  bestimmt:  $2mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$ .

11) Der Ort des Punktes, der in einem Dreieck von gegebenem Winkel an der Spitze und von konstanter Fläche die Basis in gegebenen Verhältnissen teilt, ist  $xy = \text{const.}$

12) Bei gegebenem Winkel an der Spitze  $\omega$  und gegebener Basis  $b$  soll der Punkt die Basis im Verhältnis  $n : m$  teilen:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{2xy \cos \omega}{mn} = \frac{b^2}{(m+n)^2}.$$

13) Wenn die Basis durch einen festen Punkt geht:

$$\frac{mx'}{x} + \frac{ny'}{y} = m + n.$$

14) Man soll nach Nr. 48, 8 den Ort von  $P$  bestimmen, wenn  $MN$  konstant ist:  $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = \text{const.}$

15) Wenn  $MN$  durch einen festen Punkt geht:

$$\frac{x'}{x + y \cos \omega} + \frac{y'}{y + x \cos \omega} = 1.$$

16) Wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt dreht und wenn sie die Achsen in den sich mit der Geraden ändernden Punkten  $M, N$  trifft, so ist der Ort des Schnittpunktes der Parallelen zu den Achsen aus  $M$  und  $N$

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1.$$

17) Man soll in Nr. 49, 1 den Ort von  $P$  bestimmen, wenn die Gerade  $CD$  nicht zu  $AB$  parallel ist.

18) Soll der Abschnitt  $AB$  zwischen den Seiten eines Dreiecks von gegebener Basis in einer gegebenen Geraden konstant sein, so ist der Ort der Spitze

$$(x'y - xy')(y - y'') - (x''y - xy'')(y - y') = c(y - y')(y - y'').$$

**52. Aufgaben, in denen zu beweisen ist, daß eine bewegliche Gerade durch einen festen Punkt geht.**

Nach Nr. 44 geht die Gerade

$$(a_1 + kb_1)x + (a_2 + kb_2)y + a_3 + kb_3 = 0,$$

wo  $k$  eine unbestimmte Größe ist, immer durch einen festen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Geraden

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 = 0.$$

Wir entnehmen daraus den Satz: *Wenn die Gleichung einer Geraden eine unbestimmte Größe im ersten Grade enthält, so geht die Gerade immer durch einen festen Punkt.*

**B. 1)** Wenn in einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der reziproken Werte der Seiten gegeben sind, so geht die Basis immer durch einen festen Punkt.

Für die Seiten als Achsen ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m}$$

die zu erfüllende Bedingung; daher ist die Gleichung der Basis  $\frac{x}{a} + \frac{y}{m} - \frac{y}{a} = 1$ , wo  $m$  konstant und  $a$  unbestimmt ist; schreiben wir dies  $\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{m} - 1 = 0$ , so erkennen wir, daß die Basis stets durch den Schnittpunkt der Geraden  $x - y = 0$  und  $y = m$  geht.

**2)** Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen Geraden  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  und zwei seiner Seiten gehen durch feste Punkte; es ist zu beweisen, daß auch die dritte Seite durch einen festen Punkt geht (Fig. 37).

Wir wählen die festen Geraden  $OA$ ,  $OB$ , in denen sich die Basisecken  $A$ ,  $B$  bewegen, zu Achsen  $y$ ,  $x$ , so daß die Gerade  $OC$ , die die Spitze des Dreiecks durchläuft, eine Gleichung von der Form  $y = mx$  hat, und bezeichnen die Koordinaten der festen Drehpunkte 1 und 2 von  $AC$  und  $BC$  durch  $x_1 | y_1$ ,  $x_2 | y_2$ . Sind dann in irgend einer Lage die Koordinaten der Spitze  $a | ma$ , so ist die Gleichung von  $AC$

$$(x_1 - a)y - (y_1 - ma)x + a(y_1 - mx_1) = 0.$$

Ebenso ist die Gleichung von  $BC$

$$(x_2 - a)y - (y_2 - ma)x + a(y_2 - mx_2) = 0.$$

Die Länge des von der Geraden  $AC$  bestimmten Abschnittes  $OA$  wird hiernach durch Substitution von  $x = 0$  in die Gleichung derselben gefunden, nämlich

$$y = -\frac{a(y_1 - mx_1)}{x_1 - a};$$

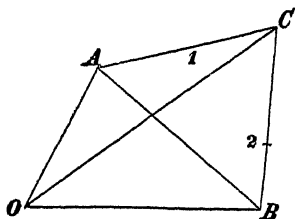


Fig. 37.



ebenso die Länge des Abschnittes  $OB$  für  $y=0$  aus der Gleichung von  $BC$  als

$$x = \frac{a(y_2 - mx_2)}{y_2 - ma}.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung von  $AB$

$$x \frac{y_2 - ma}{y_2 - mx_2} - y \frac{x_1 - a}{y_1 - mx_1} = a.$$

Da hierin  $a$  unbestimmt ist und nur im ersten Grade vorkommt, so geht diese Gerade immer durch einen festen Punkt. Derselbe zeigt sich, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{y_2}{y_2 - mx_2} x - \frac{x_1}{y_1 - mx_1} y - a \left( \frac{mx}{y_2 - mx_2} - \frac{y}{y_1 - mx_1} + 1 \right) = 0$$

schreibt, als der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\frac{y_2}{y_2 - mx_2} x - \frac{x_1}{y_1 - mx_1} y = 0, \quad \frac{mx}{y_2 - mx_2} - \frac{y}{y_1 - mx_1} + 1 = 0.$$

3) Man untersuche, ob in der vorigen Aufgabe unter gewissen Bedingungen die Basis auch dann noch durch einen festen Punkt geht, wenn die Gerade, in der sich die Spitze  $C$  bewegt, den Punkt  $O$  nicht enthält.

Wir behalten die Achsen und die Bezeichnung bei, mit der einen notwendigen Abweichung, daß die Gleichung der von der Spitze durchlaufenen Geraden durch  $y = mx + n$  und daher die Koordinaten der Spitze in irgend einer Lage durch  $a | ma + n$  ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen von  $AC$ ,  $BC$

$$(x_1 - a)y - (y_1 - ma - n)x + a(y_1 - mx_1) - nx_1 = 0,$$

$$(x_2 - a)y - (y_2 - ma - n)x + a(y_2 - mx_2) - nx_2 = 0,$$

$$\text{woraus } OA = -\frac{a(y_1 - mx_1) - nx_1}{x_1 - a}, \quad OB = \frac{a(y_2 - mx_2) - nx_2}{y_2 - ma - n}.$$

Daher ist die Gleichung von  $AB$

$$x \frac{y_2 - ma - n}{a(y_2 - mx_2) - nx_2} - y \frac{x_1 - a}{a(y_1 - mx_1) - nx_1} = 1.$$

Wenn diese Gleichung von Brüchen befreit wird, so enthält sie im allgemeinen  $a$  im zweiten Grade, und die Basis geht nicht durch einen festen Punkt. Wenn aber die Punkte  $x_1 | y_1$ ,  $x_2 | y_2$  in einer durch  $O$  gehenden Geraden  $y = kx$  liegen, so daß wir  $y_2 = kx_2$  und  $y_1 = kx_1$  einsetzen können, so wird die Gleichung

$$x \frac{y_2 - ma - n}{x_2} - y \frac{x_1 - a}{x_1} = a(k - m) - n,$$

die  $a$  nur im ersten Grade enthält und somit eine durch einen festen Punkt gehende Gerade darstellt.

4) Jede Gerade, die so bestimmt wird, daß die Produkte aus gewissen Konstanten und den Abständen einer Anzahl fester Punkte  $x_1|y_1, x_2|y_2, \dots$  von der Geraden die Summe Null geben, geht durch einen festen Punkt.

Ist die Gleichung der Geraden  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ , so ist die von  $x_1|y_1$  auf sie gefällte Normale von der Länge  $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$ , und die Bedingungen liefern

$$m_1 (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) + m_2 (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - p) + m_3 (x_3 \cos \alpha + y_3 \sin \alpha - p) + \dots = 0.$$

Unter Benutzung der Bezeichnung  $\Sigma(m_1 x_1)$  für die algebraische Summe der  $m x$ , d. h. für  $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots$  und in gleicher Art  $\Sigma(m_1 y_1)$  für  $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots$ ,  $\Sigma(m_1)$  für  $m_1 + m_2 + \dots$  können wir diese Gleichung schreiben

$$\Sigma(m_1 x_1) \cos \alpha + \Sigma(m_1 y_1) \sin \alpha - p \Sigma(m_1) = 0.$$

Indem wir in die ursprüngliche Gleichung den hieraus erhaltenen Wert von  $p$  einsetzen, erhalten wir für die Gleichung der beweglichen Geraden

$$x \Sigma(m_1) \cos \alpha + y \Sigma(m_1) \sin \alpha - \Sigma(m_1 x_1) \cos \alpha - \Sigma(m_1 y_1) \sin \alpha = 0$$

oder  $x \Sigma(m_1) - \Sigma(m_1 x_1) + [y \Sigma(m_1) - \Sigma(m_1 y_1)] \operatorname{tg} \alpha = 0.$

Da diese Gleichung die unbestimmte Größe  $\operatorname{tg} \alpha$  im ersten Grade enthält, so geht die durch sie ausgedrückte Gerade durch den festen Punkt, den die Gleichungen

$$x \Sigma(m_1) - \Sigma(m_1 x_1) = 0, \quad y \Sigma(m_1) - \Sigma(m_1 y_1) = 0$$

bestimmen, d. h. durch den Punkt

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

Dieser wird oft als das *Zentrum der mittleren Entfernungen* der gegebenen Punkte bezeichnet, er ist der Schwerpunkt der gegebenen Punkte, wenn die Koeffizienten  $m$  die denselben beigelegten Massen bedeuten.

53. Enthält die Gleichung einer Geraden die Koordinaten irgend eines Punktes im ersten Grade, so wie

$$(a_1 x' + a_2 y' + a_3)x + (b_1 x' + b_2 y' + b_3)y + (c_1 x' + c_2 y' + c_3) = 0,$$

so geht diese Gerade immer durch einen festen Punkt, wenn der Punkt  $x'|y'$  sich selbst auf einer Geraden

$$u_1 x' + u_2 y' + u_3 = 0$$

bewegt; denn dann kann mit Hilfe dieser Beziehung  $x'$  aus der gegebenen Gleichung eliminiert werden, und die unbestimmte

Größe  $y'$  verbleibt im ersten Grade in derselben, die Gerade geht also (Nr. 52) durch einen festen Punkt.

Daraus entspringt der Satz: *Sind die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  der Gleichung  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  durch die Beziehung  $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0$  verbunden, in der  $k_1, k_2, k_3$  Konstanten sind, während  $a_1, a_2, a_3$  veränderlich gedacht werden, so geht die durch diese Gleichung dargestellte Gerade immer durch einen festen Punkt.*

Denn durch Elimination von  $a_3$  zwischen beiden Gleichungen erhalten wir

$$(k_1x - k_1)a_1 + (k_2y - k_2)a_2 = 0,$$

die Gleichung einer Geraden durch den Punkt  $\frac{k_1}{k_3} \mid \frac{k_2}{k_3}$ .

54. Das Teilverhältnis des Punktes, in dem die Verbindungsgerade der Punkte  $x_1 \mid y_1, x_2 \mid y_2$  von der Geraden  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  geschnitten wird, finden wir nach einer Methode, die wir oft anwenden werden, um den Punkt zu bestimmen, in dem die Verbindungsgerade zweier gegebenen Punkte durch einen gegebenen Ort geschnitten wird.

Nach Nr. 14 sind die Koordinaten eines Punktes in der Verbindungsgeraden der Punkte  $x_1 \mid y_1, x_2 \mid y_2$  immer durch  $x = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2}, y = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2}$  darstellbar, und wir können das Verhältnis  $n_1:n_2 = \nu$ , in dem dieselbe durch den gegebenen Ort geteilt wird, als eine unbekannte Größe ansehen, die sich aus der Bedingung bestimmt, daß die eben geschriebenen Koordinaten der Gleichung des Ortes genügen müssen.

So haben wir im gegenwärtigen Falle

$$a_1 \frac{x_1 + \nu x_2}{1 + \nu} + a_2 \frac{y_1 + \nu y_2}{1 + \nu} + a_3 = 0; \text{ also}$$

$$(1) \quad \nu = \frac{n_1}{n_2} = - \frac{a_1x_1 + a_2y_1 + a_3}{a_1x_2 + a_2y_2 + a_3},$$

woraus sich die Koordinaten des gesuchten Punktes ergeben.

Der Wert für  $\nu = n_1:n_2$  sagt geometrisch aus, daß das Verhältnis, in dem die Verbindungslinie von  $x_1 \mid y_1$  und  $x_2 \mid y_2$  geschnitten wird, dem Verhältnis der Abstände dieser Punkte von der gegebenen Geraden gleich ist; denn diese Abstände sind, mit  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  multipliziert, Zähler und Nenner des Bruches. Vgl. Nr. 42 und 43.

Das Minuszeichen in dem vorher gefundenen Werte entspringt daraus, daß in dem Falle des inneren Schnittes, dem (Nr. 14) das Pluszeichen von  $n_1:n_2$  entspricht, die Normalen auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Geraden liegen, daher (Nr. 42) als von entgegengesetzten Zeichen angesehen werden müssen.

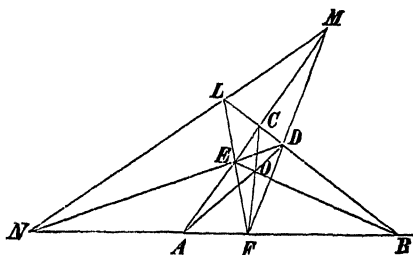


Fig. 38.

B. 1) Wenn eine Gerade die Seiten eines Dreiecks  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  in den Punkten  $L$ ,  $M$ ,  $N$  schneidet (Fig. 38), so ist

$$\frac{BL \cdot CM \cdot AN}{LC \cdot MA \cdot NB} = -1.$$

Sind die Koordinaten der Ecken  $x_1|y_1$ ,  $x_2|y_2$ ,  $x_3|y_3$ , so haben wir

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3}{a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3}, \quad \frac{CM}{MA} = -\frac{a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3}{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3},$$

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3},$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar.

2) Wenn die Verbindungsgeraden eines Punktes  $O$  mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  bez. in Punkten  $D$ ,  $E$ ,  $F$  schneiden, so ist

$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{DC \cdot EA \cdot FB} = +1.$$

Sind die Ecken  $x_1|y_1$ ,  $x_2|y_2$ ,  $x_3|y_3$ , und ist der angenommene Punkt  $x_4|y_4$ , so folgt

$$\frac{BD}{DC} = \frac{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)},$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_1(y_2 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)},$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)},$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar.

55. Polarkoordinaten. Es ist im allgemeinen nützlich, diese Methode anzuwenden, wenn die Aufgabe verlangt, den Ort der Endpunkte von geraden Strecken zu finden, die nach

einem gegebenen Gesetz durch einen festen Punkt gezogen sind. Die folgenden Aufgaben 1—4 führen auf geradlinige Orte, 5—8 auf Orte höherer Ordnungen.

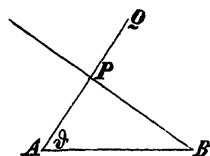


Fig. 39.

B. 1)  $A$  und  $B$  sind zwei feste Punkte; durch  $B$  wird eine Gerade gezogen, von  $A$  ein Lot  $AP$  darauf gefällt und dasselbe so verlängert, daß das Rechteck  $AP \cdot AQ$  konstant  $= k^2$  bleibt. Ort des Punktes  $Q$ ? (Fig. 39.)

Wir nehmen  $A$  zum Pol und  $AB$  zur festen Achse, so daß  $AQ$  der durch  $r$  zu bezeichnende Vektor und der Winkel  $BAQ = \vartheta$  ist; die Aufgabe fordert, die zwischen  $r$  und  $\vartheta$  bestehende Gleichung zu finden. Wir setzen  $AB = c$  und haben  $AP = c \cdot \cos \vartheta$ ; wegen  $AP \cdot AQ = k^2$  ist alsdann

$$rc \cos \vartheta = k^2, \quad \text{oder} \quad r \cos \vartheta = \frac{k^2}{c}.$$

Dies ist (Nr. 47) die Gleichung einer Normalen zu  $AB$ , die vom Pol  $A$  den Abstand  $k^2 : c$  hat.

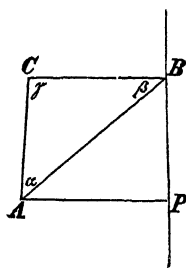


Fig. 40.

2) Von einem Dreieck, dessen Winkel gegeben sind, ist eine der Ecken  $A$  fest, die zweite  $B$  bewegt sich längs einer festen Geraden, man soll den Ort der dritten finden (Fig. 40).

Wir nehmen die feste Ecke  $A$  zum Pol und das von  $A$  auf die feste Gerade gefällte Lot  $AP$  zur Achse, so daß  $AC = r$ ,  $\angle PAC = \vartheta$  ist.

Da die Winkel des Dreiecks  $ABC$  gegeben sind, so steht  $AB$  in einem festen Verhältnis zu  $AC$ , d. h.  $AB = m \cdot AC$  und

$\angle PAB = \vartheta - \alpha$ ; aber man hat  $AP = AB \cdot \cos PAB$ , d. h. mit  $AP = a$ ,  $mr \cos (\vartheta - \alpha) = a$ , also (Nr. 47) die Gleichung einer Geraden, die mit der gegebenen einen Winkel  $\alpha$  bildet und vom Pol  $A$  um die Strecke  $a : m$  entfernt ist.

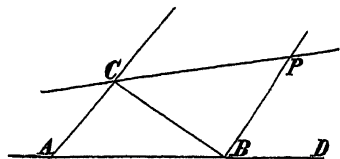


Fig. 41.

3) In einem Dreieck ist die Basis und die Summe  $m$  der beiden anderen Seiten gegeben; in einem Endpunkt  $B$  der Basis errichtet man auf der anliegenden Seite  $BC$  ein Lot und verlangt, den Ort des Punktes  $P$  zu finden, wo dieses veränderliche Lot

von der äußeren Halbierungslinie  $CP$  des Winkels an der Spitze getroffen wird (Fig. 41).

Indem wir den Punkt  $B$  zum Pol wählen, wird  $BP$  der Vektor  $r$  und durch Wahl der verlängerten Basis zur festen Achse wird der Winkel  $DBP = \vartheta$ , und die Aufgabe verlangt nun,  $r$  durch  $\vartheta$  auszudrücken. Wir bezeichnen die Seiten und die Gegenwinkel des Dreiecks durch  $a, b, c, A, B, C$ ; dann ist offenbar  $\sphericalangle BCP = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}C$  und aus dem Dreieck  $PCB$  folgt  $a = r \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$ . Wenn wir  $a$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}C$  durch  $\vartheta$  ausdrücken können, so ist die Aufgabe gelöst. Aus dem Dreieck  $ABC$  ist  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ; hier kann für  $b$  eingesetzt werden  $m - a$  und ist  $\cos B = \sin \vartheta$ ; daher

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \vartheta$$

und 
$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)}.$$

Ferner ist identisch  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{b \sin C}{b(1 + \cos C)}.$

Aber  $b \sin C = c \sin B = c \cos \vartheta$ ;  $b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \vartheta$ ;

also 
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{c \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}.$$

Nun setzen wir die eben für  $a$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}C$  gefundenen Werte in die Gleichung  $a = r \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$  ein und erhalten

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)} = \frac{rc \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}, \quad \text{oder} \quad r \cos \vartheta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Der Ort ist demnach eine Normale zur Basis des Dreiecks, in dem Abstände  $\frac{m^2 - c^2}{2c}$  vom Punkte  $B$ .

Zu weiterer Übung untersuche man den Ort, der bei gegebener Differenz der Seiten durch die innere Halbierungslinie des Winkels an der Spitze bestimmt wird.

4) Gegeben sind  $n$  feste Geraden und ein fester Punkt  $O$ ; wenn man durch diesen irgend einen Vektor zieht, der diese Geraden in Punkten  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  schneidet, und in ihm einen Punkt  $R$  so bestimmt, daß  $OR$  das harmonische Mittel aller dieser Vektoren oder

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3} + \dots + \frac{1}{OR_n}$$

ist, so soll man den Ort von  $R$  bestimmen.

Wenn die Gleichungen der Geraden durch

$r \cos(\vartheta - \alpha) = p_1, r \cos(\vartheta - \beta) = p_2, r \cos(\vartheta - \gamma) = p_3$ , usw. dargestellt werden, so ist die Gleichung des Ortes offenbar

$$\frac{n}{r} = \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\vartheta - \beta)}{p_2} + \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{p_3} + \dots,$$

nach Nr. 47 die Gleichung einer Geraden. Der hierin enthaltene

Satz ist nur ein besonderer Fall eines weit allgemeineren, den wir später beweisen werden.

- 5) Sämtliche Punkte  $P$  einer festen Geraden  $MB$  mit der Gleichung  $r \cos \vartheta = m$  werden durch Vektoren  $OP$  mit dem Pol  $O$  verbunden und alsdann trägt man von  $P$  aus auf jeder dieser Verbindungslinien nach beiden Seiten eine konstante Länge  $|PQ'| = |PQ''| = d$  ab. Man soll den Ort der Punkte  $Q'$  sowie den Ort der Punkte  $Q''$  finden (Fig. 42).

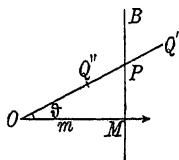


Fig. 42.

Nach der Voraussetzung ist  $OP = \frac{m}{\cos \vartheta}$ ; also

$$OQ' = \frac{m}{\cos \vartheta} + d, \quad OQ'' = \frac{m}{\cos \vartheta} - d;$$

in rechtwinklige Koordinaten übertragen gibt dies

$$(x - m)^2 (x^2 + y^2) = d^2 x^2.$$

Wie man sieht, entspricht jedem der beiden durch die Gesamtheit der Punkte  $Q'$  bzw.  $Q''$  gebildeten Kurvenzüge bei Polarkoordinaten eine besondere Gleichung, während nach Einführung rechtwinkliger Koordinaten beide Kurvenzüge zusammen durch eine einzige Gleichung dargestellt werden. Die Punkte  $Q'$  und  $Q''$  erfüllen eine Kurve vierter Ordnung, die sog. *Konchoide des Nikomedes*.

- 6) Ort von  $Q'$  und  $Q''$ , wenn  $P$  irgend einen durch seine Polargleichung  $r = \varphi(\vartheta)$  gegebenen Ort durchläuft.

Da nach der Voraussetzung  $OP$  in Funktion von  $\vartheta$  bestimmt ist und  $OP$  der um  $d$  verminderte oder vermehrte Radiusvektor  $r$  des Ortes ist, so haben wir in die gegebene Gleichung nur  $r \mp d$  für  $r$  zu substituieren:

$$r \mp d = \varphi(\vartheta).$$

- 7) Wenn  $OP$  so weit verlängert wird, daß  $OQ = 2 \cdot OP$  ist (Fig. 43), so ist  $OP$  die Hälfte von dem  $r$  des Ortes, und man hat an Stelle von  $r$  in die gegebene Gleichung  $\frac{1}{2} r$  einzusetzen.

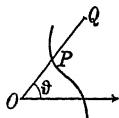


Fig. 43.

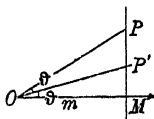


Fig. 44.

- 8) Wird der Winkel  $MOP$  halbiert und in der Halbierungslinie eine Strecke  $OP'$  abgetragen, so daß  $OP'^2 = m \cdot OP$  ist, so soll der Ort von  $P'$  gefunden werden unter der Voraussetzung, daß  $P$  die Gerade  $MP$  (Fig. 44) beschreibt. Da nun  $MOP$  das Doppelte vom  $\vartheta$  des Ortes ist, so hat man  $OP = \frac{m}{\cos 2\vartheta}$ , und die Gleichung des Ortes ist  $r^2 \cos 2\vartheta = m^2$ .

56. Offenbar kann auch eine Gleichung höheren Grades gerade Linien darstellen, nämlich dann und nur dann (Nr. 28), wenn ihre linke Seite in lauter Faktoren vom ersten Grade zerlegt werden kann. Wir können jederzeit solche Gleichungen  $n^{\text{ten}}$  Grades bilden, indem wir  $n$  lineare Gleichungen Seite für Seite miteinander multiplizieren. Dagegen ist es aus einer vorgelegten Gleichung nicht ohne weitere Kriterien erkennbar, ob die durch sie dargestellte Kurve zerfällt. Wir betrachten hier nur den Fall, wo sie in  $n$  Geraden zerfällt, die überdies durch einen Punkt gehen. Derselbe muß dann als ein  *$n$  facher Punkt der zerfallenden Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung* bezeichnet werden (Nr. 27), denn für seine Koordinaten verschwindet jeder der  $n$  Faktoren der linken Seite. Eine homogene Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades zwischen zwei Veränderlichen stellt  $n$  Geraden dar, die durch einen Punkt gehen. Denn ist diese Gleichung

$$(2) \quad y^n - pxy^{n-1} + qx^2y^{n-2} - \dots \pm tx^n = 0,$$

so erhalten wir durch Division mit  $x^n$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n - p\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + q\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} - \dots \pm t = 0,$$

eine Gleichung, die durch Auflösung  $n$  Werte für  $\frac{y}{x}$  liefert; bezeichnen wir dieselben durch  $a, b, c, \dots$ , so kann die ursprüngliche Gleichung in die Faktoren zerlegt werden

$$(y - ax)(y - bx)(y - cx) \dots = 0.$$

Sie stellt also  $n$  Geraden dar

$$y - ax = 0, \quad y - bx = 0, \quad \dots,$$

die alle durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen.

Eine allgemeinere Form der Gleichung erhalten wir durch Koordinatentransformation, die etwa  $a|b$  zum Nullpunkt macht. Kann daher eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades auf die Form gebracht werden

$$(y - b)^n - p(x - a)(y - b)^{n-1} + q(x - a)^2(y - b)^{n-2} - \dots \pm t(x - a)^n = 0,$$

so bestimmt sie  $n$  Geraden durch den Punkt  $a|b$ .

B. 1) Der durch die Gleichung  $xy = 0$  dargestellte Ort besteht aus den beiden Koordinatenachsen, weil der Gleichung durch jede der beiden Voraussetzungen  $x = 0, y = 0$  genügt wird.



2) Der durch  $x^2 - y^2 = 0$  dargestellte Ort wird von den Halbierungslinien der Achsenwinkel  $x \pm y = 0$  gebildet (Nr. 43).

3) Die Gleichung  $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$  stellt die beiden Geraden  $x - 2y = 0$ ,  $x - 3y = 0$  dar.

4) Der durch  $x^2 - 2xy \sec \vartheta + y^2 = 0$  dargestellte Ort ist  $x = y \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \vartheta \right)$ .

5) Welche Geraden sind ausgedrückt durch

$$x^2 - 2xy \operatorname{tg} \vartheta - y^2 = 0?$$

6) Welche Geraden bestimmt

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = 0?$$

**57. Geradenpaar.** Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien oder ein *Geradenpaar* darstellt, so muß sie durch Koordinatentransformation auf die homogene Form

$$(3) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

gebracht werden können. Sie stellt in der Tat die beiden Geraden

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0$$

dar, wenn  $m_1, m_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

$$C \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 2B \left( \frac{y}{x} \right) + A = 0$$

oder also 
$$m_1 + m_2 = -2 \frac{B}{C}, \quad m_1 m_2 = \frac{A}{C}.$$

Bei reellen Koeffizienten der quadratischen Gleichung sind diese Wurzeln entweder reell und verschieden, reell und gleich oder konjugiert komplex, je nachdem die Diskriminante

$$(4) \quad B^2 - AC \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ ist.}$$

Im ersten Falle stellt die gegebene Gleichung ein Paar reeller Geraden durch den Nullpunkt dar, deren Richtungskoeffizienten  $m_1, m_2$  sind. Ist zweitens die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat, so sagen wir, um den Sprachgebrauch der Geometrie dem der Algebra anzupassen, die Gleichung stelle zwei zusammenfallende Geraden dar und nicht nur eine Gerade schlechthin. Sind drittens die Wurzeln komplex, so genügen der Gleichung keine anderen reellen Koordinaten als  $x = 0, y = 0$ , sie stellt also einen Ort dar, der außer dem

Nullpunkte nur imaginäre Punkte enthält. Wollen wir in Übereinstimmung mit der Ausdrucksweise der Algebra bleiben, so müssen wir in der Tat in die Betrachtung auch imaginäre Geraden aufnehmen und können dann sagen: *Eine reelle quadratische homogene Gleichung mit negativer Diskriminante definiert ein Paar konjugiert imaginärer Geraden mit dem Nullpunkt als reellem Schnittpunkt oder Träger.*

Wir deuten nun allgemein eine in  $x - a$ ,  $y - b$  homogene quadratische Gleichung als ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkt  $a|b$ . Ohne Annahme dieses einheitlichen Sprachgebrauchs der Algebra würde in vielen Fällen die Einfachheit und Strenge des Ausdrucks und manche wichtige Analogie verloren gehen müssen. Diese Ausdrucksweise reicht wirklich auch aus, um der homogenen Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades die Deutung als  $n$  Geraden durch einen Punkt zu sichern, da jede reelle Gleichung in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden kann. Überhaupt ist hervorzuheben, daß weiterhin keine Gleichungen höheren Grades mit komplexen Koeffizienten berücksichtigt werden, daß dagegen infolge des eben erwähnten Umstandes bei den linearen Gleichungen neben den reellen auch die komplexen zur Geltung kommen müssen.

58. **Winkel  $\delta$  des Geradenpaares.** Wenn die Gleichung (3) auf die Form  $C(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$  gebracht ist und rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt werden, so gilt nach (15) in Nr. 36 für den Richtungsunterschied  $\delta$  der beiden Geraden  $m_1, m_2$   $\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ . Da nun aber nach Nr. 57  $m_1 + m_2$  und  $m_1 m_2$  bekannt sind, also

$$m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = \frac{2}{C} \sqrt{B^2 - AC}$$

ist, so folgt zur Bestimmung von  $\delta$  aus den Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta = \pm 2 \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A + C} \quad *)$$

---

\*) Für schiefe Achsen ergibt sich in derselben Weise die Formel

$$\operatorname{tg} \delta = \pm 2 \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A + C - 2B \cos \omega} \sin \omega.$$

*Insbesondere schneiden sich die beiden Geraden rechtwinklig oder bilden ein Rechtwinkelpaar, wenn  $A + C = 0$  ist, also die Gleichung des Paares die Form hat*

$$x^2 + 2bxy - y^2 = 0,$$

welches auch der Wert von  $b$  sei.

Die Formel (5) dient auch als Definition des Winkels zwischen konjugiert imaginären Geraden, und zwar zeigt sie denselben als rein imaginär an (Nr. 46), da  $\frac{1}{2}(A + C) \operatorname{tg} \delta$  gleich der Quadratwurzel aus der im vorliegenden Falle *negativen* Diskriminante ist. Insbesondere schließt das Geradenpaar  $x^2 + y^2 = 0$  wegen  $\operatorname{tg} \delta = \pm i$  einen ganz unbestimmten imaginären Winkel ein.

B. Die Winkel in den Geradenpaaren

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0 \quad \text{bez.} \quad x^2 - 2xy \sec \vartheta + y^2 = 0 \quad \text{sind}$$

$$\frac{1}{4}\pi \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}\pi \quad \text{bez.} \quad \vartheta \quad \text{und} \quad \pi - \vartheta.$$

**59. Das Paar der Winkelhalbierenden ist stets reell.** Bezeichnet man unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer durch  $y - \mu x = 0$  die Gleichung einer Halbierungslinie des Winkels  $\delta$ , so bestimmt sich der Richtungskoeffizient  $\mu$  durch die Bemerkung, daß er die Tangente eines Winkels ist, der gleich der halben Summe der zu  $m_1, m_2$  gehörigen Neigungswinkel sein soll. Aus

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} m_1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} m_2$$

folgt 
$$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}, \quad \text{somit} = \frac{2B}{A-C}$$

oder 
$$\mu^2 + \frac{A-C}{B} \mu - 1 = 0.$$

Die Wurzeln  $\mu_1, \mu_2$  dieser quadratischen Gleichung sind die Richtungskoeffizienten der inneren und der äußeren Halbierungslinie des Winkels  $\delta$  (Nr. 43). Indem wir also in die Gleichung für  $\mu$  seinen Wert  $y : x$  einsetzen, erhalten wir *die Gleichung des Paares der Winkelhalbierenden*

$$(6) \quad y^2 + \frac{A-C}{B} xy - x^2 = 0.$$

Man erhält dieselbe auch, wenn man zu  $y - m_1 x = 0$ ,  $y - m_2 x = 0$  nach Nr. 43 die Gleichungen der beiden Winkelhalbierenden bildet und sie miteinander multipliziert.

Die Diskriminante  $\left(\frac{A-C}{2B}\right)^2 + 1$  der Gleichung (6) ist stets positiv, woraus hervorgeht, daß ein Paar von imaginären Geraden reelle Winkelhalbierende hat. Die Form der Gleichung (6) zeigt (Nr. 58), daß die beiden Halbierungslinien rechtwinklig zueinander sind. Für  $B=0$  reduziert sich die Gleichung

$$B(y^2 - x^2) + (A - C)xy = 0$$

auf  $xy = 0$ , d. h. alle Geradenpaare  $Ax^2 + Cy^2 = 0$  haben die Achsen zu Winkelhalbierenden. Ist jedoch außerdem  $A = C$  so wird  $\mu$  völlig unbestimmt, d. h. jedes Rechtwinkelpaar kann als ein Paar von Winkelhalbierenden des imaginären Geradenpaares  $x^2 + y^2 = 0$  angesehen werden.

#### 60. Die Bedingung harmonischer Lage der Geradenpaare

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \quad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$

lautet

$$AC' + A'C - 2BB' = 0.$$

Gehören zu den Geraden der beiden Paare die Richtungskoeffizienten  $m_1, m_2; m'_1, m'_2$ , so müssen sich die Geraden  $y - m'_1x = 0, y - m'_2x = 0$  in der Form darstellen lassen (Nr. 43 und 44):

$y - m_1x + k(y - m_2x) = 0, \quad y - m_1x - k(y - m_2x) = 0$ ,  
wenn sie zu  $y - m_1x = 0, y - m_2x = 0$  harmonisch sein sollen. Hieraus folgt

$$m'_1 = \frac{m_1 + km_2}{1 + k}, \quad m'_2 = \frac{m_1 - km_2}{1 - k},$$

und durch Elimination von  $k$  erhält man die Bedingung harmonischer Lage, ausgedrückt in den Richtungskoeffizienten:

$$(m_1 - m'_1)(m_2 - m'_2) + (m_1 - m'_2)(m_2 - m'_1) = 0 \text{ oder} \\ (7) \quad m_1m_2 + m'_1m'_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(m'_1 + m'_2) = 0;$$

dies ist aber mit der zuvor angegebenen Form identisch wegen

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = -\frac{B}{C}, \quad m_1m_2 = \frac{A}{C}, \quad \frac{m'_1 + m'_2}{2} = -\frac{B'}{C'}, \quad m'_1m'_2 = \frac{A'}{C'}.$$

Verbinden wir damit die Bedingung  $A' + C' = 0$ , so folgt  $B' : C' = (A - C) : 2B$ , d. h. zu einem gegebenen Geradenpaar gibt es nur ein harmonisches Rechtwinkelpaar, das Paar seiner Winkelhalbierenden (Nr. 59).

Von großer Wichtigkeit ist die Einsicht, daß die Koeffizientenbedingung der harmonischen Lage für Punktpaare (Nr. 16) und Geradenpaare identisch ist.

Diese geht geradezu in jene über, wenn wir eine Koordinate konstant setzen, z. B. drückt  $AC' + A'C = 2BB'$  für  $y = k$  zugleich die harmonische Lage der Punktpaare  $Ax^2 + 2Bkx + Ck^2 = 0$ ,  $A'x^2 + 2B'kx + C'k^2 = 0$  aus. Dies gibt aber, da jede beliebige Gerade in  $y - k = 0$  transformiert werden kann, den sehr wichtigen *Fundamentalsatz*: *Jede Gerade schneidet zwei harmonische Geradenpaare in harmonischen Punktpaaren; und umgekehrt bilden die Verbindungslinien der Punkte zweier harmonischen Paare mit einem beliebigen Punkte der Ebene zwei harmonische Strahlenpaare.*

\* Diese Übereinstimmung begründet auch die Analogie in der Darstellung des Imaginären. Soll nämlich das erste Geradenpaar zugleich zu einem dritten  $A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 = 0$  harmonisch, also auch  $AC'' + A''C - 2BB'' = 0$  sein, so lassen die beiden Bedingungen nur eine gemeinsame Lösung zu  $A:B:C = (A'B'' - A''B') : \frac{1}{2}(A'C'' - A''C') : (B'C'' - B''C')$ , wie in Nr. 16 und 17. Zu zwei gegebenen Geradenpaaren mit demselben Doppelpunkt ist also unzweideutig ein gemeinsames harmonisches Paar bestimmt, auch dann, wenn dieses imaginär ist (Nr. 16 und 17).

\* 61. **Absolute Richtungen.** Von ganz hervorragender Bedeutung sind die imaginären Geradenpaare

$$(8) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

Jeder Punkt  $a|b$  ist der Doppelpunkt *eines* derselben, und zwar wird dasselbe offenbar gebildet von den durch ihn gezogenen Parallelen zu den Geraden des Paares am Nullpunkt

$$(9) \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x \pm iy = 0.$$

Es gibt also in der Ebene zwei ausgezeichnete imaginäre Richtungen (Nr. 31), die den mit  $x^2 + y^2 = 0$  gleichgerichteten Geradenpaaren angehören und kurz *die imaginären absoluten (isotropen) Richtungen* heißen sollen. In der Tat sind sie bei allen Koordinatentransformationen, also auch (Nr. 13) *bei allen*

*Bewegungen der Ebene in sich unveränderlich oder absolut, denn es ist*

$$(x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2 + (x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)^2 = x^2 + y^2.$$

Dies ist nur möglich, wenn der Winkel irgend einer Geraden der Ebene mit einer Geraden absoluter Richtung unbestimmt ist, und in der Tat ergibt die Formel (15) in Nr. 36 stets  $\operatorname{tg} \delta = \pm i$  (Nr. 46). Gleichwohl müssen wir die Geraden von den Richtungskoeffizienten  $\pm i$  als bestimmte Geraden auffassen, da sie durch bestimmte Gleichungen gegeben sind, nur lassen sie sich nicht durch gemessene Winkel angeben.

Ferner geht die Bedingung harmonischer Lage eines Geradenpaares  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$  mit  $x^2 + y^2 = 0$  (Nr. 60) über in  $A + C = 0$ , d. h. in die Orthogonalitätsbedingung (Nr. 58). Hieraus folgt: Wenn zwei Geraden in bezug auf die durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden der absoluten Richtungen konjugiert harmonisch sind, so sind sie zueinander rechtwinklig (vgl. Nr. 59 am Schluß). Und umgekehrt ist ein Geradenpaar der absoluten Richtungen definierbar als das gemeinsame harmonische zu irgend zwei Rechtwinkelpaaren, die denselben Doppelpunkt haben.\*) Eine besondere Folgerung aus dem ersten Satz ist die, daß jede Gerade absoluter Richtung zu sich selbst rechtwinklig ist, wie auch die Orthogonalitätsbedingung in Nr. 36 (Schluß)  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$  für  $m_1 = m_2 = \pm i$  bestätigt.

Überhaupt ergibt die Anwendung unserer metrischen Formeln auf  $x \pm iy = 0$  scheinbare Widersprüche. Jeder Punkt einer dieser Geraden hat stets den Vektor  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = 0$ . Somit haben überhaupt alle in einer Geraden absoluter Richtung gemessenen Strecken die Länge Null; infolgedessen führen sie auch bisweilen den Namen: Geraden ohne Länge oder Minimalgeraden.

Von einer Geraden absoluter Richtung hat jeder Punkt der Ebene, der nicht in der Geraden liegt, unendlich großen Abstand. Denn in der Abstandsformel (31) in Nr. 42 enthält der Nenner

\*) Man bestätigt dies direkt in der Endformel der vorhergehenden Nummer, denn im Falle  $A' + C' = 0$ ,  $A'' + C'' = 0$  ergibt diese Formel  $A : B : C = 1 : 0 : 1$ .

die Wurzel aus der Quadratsumme der Koeffizienten von  $x$  und  $y$  in der Gleichung der Geraden, und diese Summe ist unter unserer Annahme  $1 + i^2 = 0$ . In der Tat kann das Lot, das von dem Punkte auf die Gerade absoluter Richtung gefällt wird, keine endliche Länge haben, denn die parallelen Geraden dieser Richtung sind auch zueinander rechtwinklig. Ebenso erklärt sich das erste Paradoxon, da doch die Entfernung zweier Punkte einer solchen Geraden zugleich den senkrechten Abstand jedes der Punkte von der Geraden bedeutet und deswegen Null sein muß (Nr. 42). Diese scheinbaren Widersprüche, die der Anblick metrischer Formeln sofort dem Leser aufdrängt, sobald er die vorkommenden Größen auch komplexer Werte fähig denkt, erhalten so aus jener Definition der absoluten Richtungen durch Rechtwinkelpaare ihre Lösungen.

62. Bedingung, unter der die allgemeine Gleichung des zweiten Grades ein Geradenpaar darstellt. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades schreiben wir

$$(10) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ordnen wir sie an in der Form

$$a_{11}x^2 + 2(a_{12}y + a_{13})x + (a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}) = 0$$

und lösen sie nach  $x$  auf, so ergeben sich im Falle  $a_{11} \geq 0$  die Wurzeln

$$a_{11}x = -(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})y^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})y + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})}.$$

Diese Werte von  $x$  können nur dann auf die Form  $x = my + n$  reduziert werden, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist. Dies ist bekanntlich allein der Fall, wenn man hat

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) - (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 = 0.$$

Die Ausführung der angedeuteten Operationen liefert nach einer Division durch  $a_{11}$

$$(11) \quad a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

als die Bedingung, unter der die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei Geraden darstellt.

Die Bedingung (11) läßt sich mit Hilfe einer Determinante dritten Grades in der Form

$$(12) \quad A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben, und wenn man verabredet, daß  $a_{ki}$  dieselbe Größe sein soll wie  $a_{ik}$ , läßt sich (12) durch

$$(12a) \quad A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ersetzen, wo nun bei jedem Element  $a_{ik}$  der erste Index die Zeile, der zweite die Spalte anzeigt, in der das Element steht.

Man nennt die linke Seite von (11) oder die Determinante (12) die *Diskriminante*  $A$  der Gleichung zweiten Grades (10). *Unter der Bedingung, daß die Diskriminante  $A$  verschwindet, stellt die Gleichung zweiten Grades eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung dar, die einen Doppelpunkt besitzt, d. h. ein Geradenpaar.*

Die vorstehende Ableitung der Bedingung (11) setzt allerdings, wie schon bemerkt wurde,  $a_{11} \geq 0$  voraus; ist  $a_{11} = 0$  und  $a_{22} \geq 0$ , so löst man die Gleichung (10) nicht nach  $x$ , sondern nach  $y$  auf, verfährt analog wie im Falle  $a_{11} \geq 0$  und gelangt alsdann wieder zu der Bedingung, die sich aus (11) für  $a_{11} = 0$  ergibt. Ist jedoch  $a_{11} = a_{22} = 0$ , so muß man einen anderen Weg einschlagen, um die Bedingung für ein Geradenpaar zu erhalten. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung (10) auf

$$(13) \quad 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

und hier setzen wir  $a_{12} \geq 0$  voraus, denn im Falle  $a_{12} = 0$  würde die Gleichung (13) überhaupt nicht mehr vom zweiten Grade sein. Man kann nun (13) in der Form

$$\frac{2}{a_{12}} (a_{12}x + a_{23}) (a_{12}y + a_{13}) - \frac{2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12}^2}{a_{12}^2} = 0$$

schreiben, wo der Zähler  $2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12}^2$  des letzten Gliedes genau der Ausdruck ist, in den die Diskriminante (11) im Falle



$a_{11} = a_{22} = 0$  übergeht. Verschwindet dieser Ausdruck, so zerfällt die durch (13) dargestellte Kurve in die Geraden  $a_{12}x + a_{23} = 0$  und  $a_{12}y + a_{13} = 0$ .

B. 1) Die Gleichung  $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$  zerfällt in die Gleichungen der Geraden

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 4y + 2 = 0.$$

2) Stellt die Gleichung

$$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2)$$

zwei Geraden dar und welche?

3) Die Gleichung

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$$

stellt die imaginären Geraden

$$x + \theta y + \theta^2 = 0, \quad x + \theta^2 y + \theta = 0,$$

dar, wo  $\theta = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}$  eine der beiden imaginären Kubikwurzeln der Einheit ist.

4) Man soll die Größe  $a_{12}$  so bestimmen, daß die Gleichung  $x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$  zwei Geraden darstellt.

Indem man die Werte der Koeffizienten in die allgemeine Bedingungsgleichung (11) einsetzt, erhält man für  $a_{12}$  die quadratische Gleichung  $12a_{12}^2 - 35a_{12} + 25 = 0$ , aus der für  $a_{12}$  die Werte  $a'_{12} = \frac{5}{3}$ ,  $a''_{12} = \frac{5}{4}$  hervorgehen.

63. Die in der vorigen Nummer angewendeten Methoden, obgleich besonders einfach in dem Fall der Gleichung zweiten Grades, sind auf Gleichungen höherer Grade nicht anwendbar; wir geben daher im folgenden noch eine andere Lösung der Aufgabe.

Dieselbe verlangt zu erkennen, ob die gegebene Gleichung zweiten Grades mit dem Produkt der Gleichungen zweier Geraden  $(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha'x + \beta'y - 1) = 0$  identisch werden kann. Wir dividieren dazu unter der Voraussetzung  $a_{33} \neq 0$  die allgemeine Gleichung des zweiten Grades durch  $a_{33}$  und vergleichen die Koeffizienten ihrer Glieder mit den entsprechenden Koeffizienten in der Entwicklung jenes Produkts; dadurch erhalten wir fünf Bedingungsgleichungen, von denen vier die Bestimmung der vier unbestimmten Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  liefern müssen. Durch die Substitution der erhaltenen Werte

in die fünfte Bedingungsgleichung finden wir dann die verlangte Bedingung.

Jene fünf Gleichungen sind

$$\alpha\alpha' = \frac{a_{11}}{a_{33}}, \quad \alpha + \alpha' = -\frac{2a_{13}}{a_{33}},$$

$$\beta\beta' = \frac{a_{22}}{a_{33}}, \quad \beta + \beta' = -\frac{2a_{23}}{a_{33}}, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = \frac{2a_{12}}{a_{33}}.$$

Die vier ersten liefern sofort zwei quadratische Gleichungen zur Bestimmung von  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ . Wir können dieselben auch durch die Bemerkung erhalten, daß diese vier Größen die Reziproken der Achsenabschnitte der Geraden sind, und daß die durch die Gleichung

$$(14) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dargestellte Kurve in den Achsen Punkte ausschneidet, deren Koordinaten sich ergeben aus

$$y = 0, \quad a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0;$$

$$x = 0, \quad a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Bezeichnen wir durch  $L$ ,  $L'$ ,  $M$ ,  $M'$  die vier so erhaltenen Achsenschnittpunkte des bezeichneten Ortes, so müssen, wenn derselbe aus Geraden zusammengesetzt ist, diese entweder das Paar  $LM$ ,  $L'M'$  oder das Paar  $LM'$ ,  $L'M$  sein; die Gleichungen dieser Paare sind

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0,$$

$$(\alpha x + \beta' y - 1)(\alpha' x + \beta y - 1) = 0.$$

Die gleichmäßige Berechtigung derselben lehrt, daß für  $\frac{2a_{12}}{a_{33}}$  nicht allein der zuvor gegebene Wert  $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ , sondern auch der andere  $\alpha\beta + \alpha'\beta'$  gelten muß. Die Summe beider ist  $(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') = \frac{4a_{23}a_{13}}{a_{33}^2}$  und ihr Produkt

$$\alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) + \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2)$$

$$= \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{(4a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33})}{a_{33}^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{(4a_{13}^2 - 2a_{11}a_{33})}{a_{33}^2}.$$

Daher bestimmt sich  $a_{12} : a_{33}$  aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{a_{12}^2}{a_{33}^2} - 2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}^2} \cdot \frac{a_{12}}{a_{33}} + \frac{a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{33}^3} = 0,$$

die, von den Nennern befreit, die Bedingungsgleichung  $A=0$  der vorigen Nummer wiedergibt.

Ähnlich ist zu verfahren, wenn in (14) das Glied  $a_{33}$  fehlt, also mindestens eine der beiden Geraden eine Gleichung von der Form  $\alpha x + \beta y = 0$  hat, bei der das absolute Glied fehlt.

B. 1) (Vgl. Nr. 62, 4.) Man bestimme  $a_{12}$  so, daß

$$x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

zwei Geraden darstellt.

Die Abschnitte in den Achsen sind durch die Gleichungen

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad y^2 - 7y + 6 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln  $x' = 2$ ,  $x'' = 3$ ;  $y' = 1$ ,  $y'' = 6$  sind. Indem wir die Gleichungen der Verbindungsgeraden der so gefundenen Punkte bilden, sehen wir, daß die Gleichung, wenn sie Geraden darstellt, entweder von der Form

$$(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0,$$

oder von der Form  $(x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0$  sein muß. Daraus ergeben sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplikationen die Werte von  $a_{12}$ .

2) Man bestimme die Zahl der Bedingungen, unter denen die allgemeine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades  $0 =$

$A + (Bx + Cy) + (Dx^2 + Exy + Fy^2) + (Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3) + \text{usw.}$  gerade Linien darstellt. Wir vergleichen dieselbe nach Division durch das absolute Glied mit dem Produkt der  $n$  Faktoren

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1)(\alpha'' x + \beta'' y - 1) \text{ usw.} = 0.$$

Nun ist die Gliederzahl  $N$  von jener die Summe der arithmetischen Reihe

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2},$$

und die Gleichsetzung der Koeffizienten gibt  $N - 1$  oder  $\frac{n(n + 3)}{1 \cdot 2}$  Gleichungen, von denen  $2n$  zur Bestimmung der  $2n$  unbekannten Größen  $\alpha$ ,  $\alpha'$  usw. dienen. Die Anzahl der notwendigen Bedingungsgleichungen beträgt daher  $N - 1 - 2n = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2}$ .

## Viertes Kapitel.

### Symbolische Gleichungen und duale homogene Koordinaten.

64. Gleichungssymbolik. Für viele Untersuchungen ist es zweckmäßig, zur Bezeichnung der ganzen Funktionen von  $x|y$ , die gleich Null gesetzt die vorgelegten Gleichungen liefern, Abkürzungen anzuwenden, wie dies *Plücker* zuerst gezeigt hat.<sup>12)</sup> Bedeutet also  $S$  eine ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades, so definiert  $S = 0$  eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, die wir kurz die Kurve  $S$  nennen. Alsdann können wir das dem Satze von Nr. 44 zugrunde liegende wichtige Prinzip einfach so formulieren: Sind  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$  die Gleichungen irgend zweier Kurven, so enthält die durch die Gleichung  $S_1 - kS_2 = 0$  dargestellte Kurve alle Schnittpunkte der beiden gegebenen, welches auch der Wert der Konstanten  $k$  sei. Denn natürlich machen Koordinatenpaare, die die Gleichungen  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$  befriedigen, auch das lineare Aggregat  $S_1 - kS_2$  zu Null. Eine Konstante  $k$ , deren Wert unbestimmt bleibt, nennt man zum Unterschied von den festen Konstanten einen *Parameter* der Gleichung.

Im folgenden sollen die Symbole immer lineare Funktionen bedeuten,

$$(1) \quad S \equiv a_1 x + a_2 y + a_3, \quad S' \equiv a'_1 x + a'_2 y + a'_3,$$

so daß  $S = 0$ ,  $S' = 0$  die Gleichungen von Geraden in allgemeiner Form sind. Es ist wünschenswert, die Normalform einer solchen Gleichung besonders zu charakterisieren, und wir wollen zu diesem Zwecke die kleinen Buchstaben  $s$  verwenden; es bedeute stets

$$-s_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1, \quad -s_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2.$$

Abkürzend sprechen wir von den Geraden  $S$  oder  $s$  und vom Punkte  $s_1 | s_2$ , d. h. dem Schnittpunkte von  $s_1 = 0$  und  $s_2 = 0$ .

Zugleich gibt bei der soeben getroffenen Vorzeichenwahl der Wert von  $s$ , nach Einsetzung beliebiger Koordinatenwerte  $x|y$ , den senkrechten Abstand des Punktes  $x|y$  von der Geraden  $s = 0$  an (Nr. 42), während das Symbol  $S$  nur eine zu demselben proportionale Größe darstellt, da (Nr. 35)  $s = S : \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

65. Die einen Parameter enthaltende Gleichung  $s_1 - k s_2 = 0$  stellt das Strahlenbüschel vom Scheitel  $s_1 | s_2$  dar. In der Tat stellt sie nach dem vorigen Prinzip für jeden Wert von  $k$  eine Gerade durch den Schnittpunkt der Geraden  $s_1, s_2$  dar, und umgekehrt kann über  $k$  so verfügt werden, daß die definierte Gerade noch einen beliebigen Punkt enthält (Nr. 44). Unter den unendlich vielen Strahlen (Nr. 30) des Büschels  $s_1 | s_2$  ist jeder einzelne durch seinen Parameter bestimmt.

Die geometrische Bedeutung des Parameters ergibt sich aus  $k = s_1 : s_2$  als das konstante Verhältnis der senkrechten Abstände irgend eines Punktes der Geraden  $t - s_1 - k s_2 = 0$  von den Geraden  $s_1 = 0$  und  $s_2 = 0$ , demnach (Nr. 43) als das Sinusteilverhältnis des Teilstrahles  $t$  im Winkel  $(s_1 s_2)$

$$(2) \quad k = \sin(s_1 t) : \sin(t s_2) \quad (\text{Nr. 30}).$$

Einem positiven Parameterwert entspricht ein innerer Teilstrahl desjenigen Winkels  $(s_1 s_2)$ , der den Nullpunkt enthält, einem negativen ein äußerer Teilstrahl desselben.

Innere und äußere Teilstrahlen von entgegengesetzt gleichen Parametern sind bezüglich  $s_1, s_2$  harmonisch konjugiert (Nr. 30). Die Halbierungslinien sind insbesondere  $s_1 - s_2 = 0, s_1 + s_2 = 0$ . Dieselben Winkelhalbierenden wie  $s_1 = 0, s_2 = 0$  haben also alle Paare  $s_1 - k s_2 = 0, k s_1 - s_2 = 0$ , deren Parameter reziproke Werte haben. Auch folgt dies daraus, daß die eine der Geraden offenbar mit  $s_1 = 0$  denselben Winkel bildet, wie die andere mit  $s_2 = 0$ .

Haben die beiden gegebenen Geraden allgemeiner die Gleichungen  $S' = 0, S'' = 0$ , so stellt

$$(3) \quad S' - k' S'' = 0$$

die Gleichung des durch die Geraden bestimmten Büschels dar. Der Teilstrahl  $T \equiv S' - k' S'' = 0$  beschreibt das ganze

Büschel, wenn  $k'$  wiederum alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft.

Jedoch ist jetzt der Parameter  $k'$  nur *proportional* zu dem Sinusteilverhältnis, nämlich

$$(4) \quad k' = \frac{s'}{s''} \sqrt{\frac{a_1'^2 + a_2'^2}{a_1''^2 + a_2''^2}} = \frac{\sin(S'T)}{\sin(TS'')} \sqrt{\frac{a_1'^2 + a_2'^2}{a_1''^2 + a_2''^2}}.$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Rechnung mit diesen Symbolen die explizite Durchführung ersetzt. Die Beispiele beziehen sich auf Dreiecke, und zwar wird angenommen, daß *der Nullpunkt jedesmal im Inneren des zunächst gegebenen Dreiecks liegt.*

B. 1) Die drei Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (vgl. Nr. 45, 4).

*Die Gleichungen der Halbierungslinien sind*

$$s_1 - s_2 = 0, \quad s_2 - s_3 = 0, \quad s_3 - s_1 = 0,$$

wenn die Gleichungen der Seiten durch  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$  ausgedrückt sind. Da die drei Gleichungen die Identität  $0 = 0$  zur Summe geben, so haben die Halbierungslinien selbst einen gemeinsamen Schnittpunkt (Nr. 45).

2) Die Halbierungslinien von zwei äußeren Winkeln eines Dreiecks schneiden sich auf der Halbierungslinie des dritten inneren Winkels.

Indem man sich der Übereinkunft hinsichtlich der Zeichen erinnert, erkennt man leicht, daß die Gleichungen der beiden ersten Halbierungslinien durch  $s_1 + s_2 = 0$ ,  $s_1 + s_3 = 0$  gegeben sind; ihre Subtraktion liefert  $s_2 - s_3 = 0$ , die Gleichung der inneren Halbierungslinie des dritten Winkels.

3) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (Nr. 41, 5; 45, 3).

Wenn man die den Seiten  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$  bez. gegenüberliegenden Winkel durch  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  bezeichnet, so ergeben sich *die Gleichungen der Höhen* als

$$s_1 \cos A_1 - s_2 \cos A_2 = 0, \quad s_2 \cos A_2 - s_3 \cos A_3 = 0, \\ s_3 \cos A_3 - s_1 \cos A_1 = 0,$$

weil jede derselben den Winkel, von dessen Scheitel sie ausgeht, in Teilwinkel zerlegt, die die Komplemente der beiden anderen Dreieckswinkel sind; die Summe dieser Gleichungen ist identisch Null.

4) Die Mittellinien (Schwerlinien) des Dreiecks gehen durch einen Punkt (Nr. 45, 1).

Die Lote, die man von dem Mittelpunkte der Seite  $s_3 = 0$  auf die Nachbarseiten fällen kann, stehen im Verhältnis  $\sin A_1 : \sin A_2$ ; somit sind die Gleichungen der Mittellinien

$$s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 = 0, \quad s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 = 0, \\ s_3 \sin A_3 - s_1 \sin A_1 = 0.$$

5) Die Längen der Seiten eines Vierecks sind  $l_1, l_2, l_3, l_4$ ; die Gleichung der Geraden, die die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet, ist  $l_1 s_1 - l_2 s_2 + l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$ .

Denn die durch sie dargestellte Gerade geht durch den Schnittpunkt der Geraden  $l_1 s_1 - l_2 s_2 = 0, l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$ , die nach 4) in zwei Dreiecken, die eine Diagonale als gemeinschaftliche Basis haben, den Mittelpunkt derselben mit der bez. Gegenecke verbinden. Ebenso schneiden sich die Geraden  $l_1 s_1 - l_4 s_4 = 0$  und  $l_2 s_2 - l_3 s_3 = 0$  im Mittelpunkte der anderen Diagonale.

6) Die Gleichung der auf der Basis  $s_3 = 0$  eines Dreiecks im Scheitel des Winkels  $A_2$  errichteten Normale ist  $s_1 + s_3 \cos A_2 = 0$ .

7) Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, daß die Normalen von den Ecken des ersten auf die Seiten des zweiten sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch die Normalen von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten durch einen Punkt.

Man bezeichne durch  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0; s'_1 = 0, s'_2 = 0, s'_3 = 0$  die Seiten der beiden Dreiecke, so ergibt sich die Gleichung der von der Ecke  $s_1 | s_2$  auf die Seite  $s'_3 = 0$  gefällten Normale in der Form  $s_1 \cos(s_2 s'_3) - s_2 \cos(s_1 s'_3) = 0$ ; und die der beiden Normalen von  $s_2 | s_3$  auf  $s'_1 = 0$  und von  $s_3 | s_1$  auf  $s'_2 = 0$  in den Formen

$$s_2 \cos(s_3 s'_1) - s_3 \cos(s_2 s'_1) = 0, \quad s_3 \cos(s_1 s'_2) - s_1 \cos(s_3 s'_2) = 0.$$

Indem man zwischen den beiden ersten Gleichungen  $s_2$  eliminiert und die erhaltene Gleichung mit der dritten verbindet, erhält man die Bedingung, daß diese drei Geraden durch einen Punkt gehen, in der Form

$$\cos(s_1 s'_2) \cos(s_2 s'_3) \cos(s_3 s'_1) = \cos(s'_1 s_2) \cos(s'_2 s_3) \cos(s'_3 s_1).$$

Die vollständige Symmetrie dieser Gleichung zeigt, daß sie ebensowohl die Bedingung ausdrückt, unter der die von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällten Normalen durch einen Punkt gehen.

8) Wird durch jede Ecke eines Dreiecks eine Gerade gezogen und gehen diese drei Geraden  $t_1, t_2, t_3$  durch einen und denselben Punkt, so schneiden sich auch diejenigen Geraden  $t'_1, t'_2, t'_3$  in einem Punkte, die mit  $t_1$  bzw.  $t_2$  bzw.  $t_3$  dieselbe Winkelhalbierende haben wie die betreffenden Ecken des Dreiecks.

Sind  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$  die Seiten des Dreiecks und  $n_1 s_1 - n_2 s_2 = 0$ ,  $n_2 s_2 - n_3 s_3 = 0$ ,  $n_3 s_3 - n_1 s_1 = 0$  die drei von den Ecken ausgehenden Geraden  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  (die sich offenbar in einem Punkte schneiden), so sind die Gleichungen der drei Geraden  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ :

$$n_2 s_1 - n_1 s_2 = 0, \quad n_3 s_2 - n_2 s_3 = 0, \quad n_1 s_3 - n_3 s_1 = 0$$

(vgl. S. 120, Zeile 10—8 von unten), und diese Geraden schneiden sich auch in einem Punkte.

66. Das vollständige Viereck. Von besonderer Wichtigkeit in der Theorie der harmonischen Gruppen erweist sich das *vollständige Viereck*, gebildet von vier Punkten  $A, B, C, D$  als Ecken und ihren sechs Verbindungslinien als Seiten. Zwei

Seiten, die keine Ecke gemeinsam haben, heißen *Gegenseiten*, z. B.  $AD$ ,  $BC$ , und ihr Schnittpunkt ein *Diagonalepunkt* des Vierecks, z. B.  $O$  (Fig. 45). Nennen wir das Dreieck  $DEF$  der Diagonalepunkte das *Diagonaldreieck*, so besteht der fundamentale Satz: An

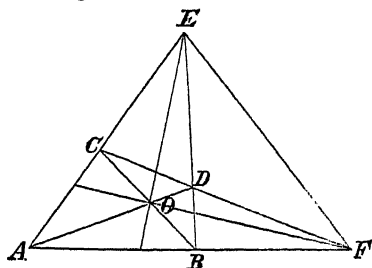


Fig. 45.

jedem Diagonalepunkt eines vollständigen Vierecks bilden die Gegenseiten des Vierecks und die beiden Seiten des Diagonaldreiecks harmonische Strahlenpaare.

Bezeichnen wir die Gleichungen der Seiten  $OE$ ,  $OF$ ,  $EF$  des Diagonaldreiecks bez. mit  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$ , so können wir die Seiten  $AB$  und  $AC$  durch  $a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$  und  $a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$  darstellen und erhalten für  $AD$  die Gleichung  $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$ , da die drei Geraden den Punkt  $A$  gemein haben (Nr. 45 und 65). Nehmen wir nun noch an, die Gleichung von  $BC$  laute  $a'_1 s_1 - a'_2 s_2 = 0$ , so muß die Gleichung von  $CD$  sein  $a_3 a'_1 s_3 - a_1 a'_2 s_2 = 0$ . Die Gerade  $CD$  geht nämlich durch den Schnittpunkt  $C$  von  $CA$  und  $CB$ , hat daher eine Gleichung von der Form  $a_3 s_3 - a_1 s_1 + \kappa(a'_1 s_1 - a'_2 s_2) = 0$ ; da aber  $CD$  auch durch den Schnittpunkt  $F$  von  $s_2 = 0$  und  $s_3 = 0$  geht, müssen sich die Glieder mit  $s_1$  aus der Gleichung für  $CD$  herausheben, was für  $\kappa = a_1 : a'_1$  der Fall ist. Ebenso muß die Gleichung von  $DB$  sein  $a_2 a'_1 s_1 - a_3 a'_2 s_3 = 0$ , als



identisch mit  $a'_2(a_2s_2 - a_3s_3) + a_2(a'_1s_1 - a'_2s_2) = 0$ . Endlich soll aber der Schnittpunkt von  $CD$  und  $DB$  auf  $AD$  liegen, d. h. ein Parameter  $k = \mu : \nu$  muß so bestimmt werden können, daß  $a_1s_1 - a_2s_2 = 0$  mit  $\mu(a_3a'_1s_3 - a_1a'_2s_2) + \nu(a_2a'_1s_1 - a_3a'_2s_3) = 0$  identisch ist. Aus den Bedingungen  $a_1 = \nu a_2a'_1$ ,  $a_2 = \mu a_1a'_3$ ,  $\mu a'_1 = \nu a'_2$  folgt aber  $a'_1{}^2 : a'_2{}^2 = a_1{}^2 : a_2{}^2$  oder  $a'_1 : a'_2 = a_1 : -a_2$ , da doch  $AD$  von  $BC$  verschieden ist.

Also ist nach Annahme des Diagonaldreiecks und zweier Nachbarseiten das ganze Viereck völlig bestimmt, und zwar drücken sich die Gleichungen der Seitenpaare mit Hilfe dreier Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  in folgender Weise aus:

$$\begin{array}{ll} AD & a_1s_1 - a_2s_2 = 0 \\ AB & a_2s_2 - a_3s_3 = 0 \\ AC & a_3s_3 - a_1s_1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} BC & a_1s_1 + a_2s_2 = 0 \\ CD & a_2s_2 + a_3s_3 = 0 \\ DB & a_3s_3 + a_1s_1 = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen beweisen sofort die zuvor erwähnten harmonischen Eigenschaften. Man kann nach Nr. 60 auch sagen: *In jeder Seite des Vierecks sind der Diagonalschnittpunkt und der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalschnittpunkte harmonisch konjugiert in bezug auf das Eckenpaar.*

Hierauf gründet sich die Linealkonstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen Punkten einer Reihe, z. B. zu  $A, B, F$  mittelst  $OE$ , oder die Konstruktion des vierten harmonischen Strahles  $EO$  zu drei Strahlen  $EA, EB, EF$  eines Büschels.

67. Wenn drei Geraden  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$  gegeben sind, die ein Dreieck bilden, so kann die Gleichung jeder beliebigen Geraden in die Form gesetzt werden

$$(5) \quad a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 = 0.$$

Denn wenn man die Werte von  $s_1, s_2, s_3$  in voller Länge einführt, so wird  $a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 = 0$  zu

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3)x + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3)y - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = 0,$$

und diese Gleichung wird mit der Gleichung einer beliebigen Geraden  $c_1x + c_2y + c_3 = 0$  identisch, wenn gleichzeitig

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = c_1,$$

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = c_2,$$

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = -c_3 \quad \text{ist.}$$

Die Größen  $a_1, a_2, a_3$  können aber stets so bestimmt werden, daß sie diesen Gleichungen genügen; vorausgesetzt nur, daß die drei gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen, weil dann die Gerade  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  notwendig auch durch diesen Punkt gehen müßte und mit einer ihn nicht enthaltenden Geraden nicht identifiziert werden könnte.

Den vorstehend bewiesenen Satz kann man auch so aussprechen:

*Zwischen den linken Seiten der Gleichungen von vier Geraden besteht stets eine lineare Identität, vorausgesetzt daß keine drei der vier Geraden durch einen und denselben Punkt gehen. Mit anderen Worten:*

*Sind*

$$(6) \quad S_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

*die Gleichungen der vier Geraden, so gibt es stets vier Konstanten  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$  von solcher Beschaffenheit, daß die Summe*

$$(7) \quad \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3 + \kappa_4 S_4 \equiv 0$$

*ist.*

Da der Ausdruck (7) in  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$  homogen ist, so müssen auch  $m\kappa_1, m\kappa_2, m\kappa_3, m\kappa_4$ , wo  $m$  eine beliebige Zahl bedeutet, Konstanten der gleichen Beschaffenheit sein; es lassen sich daher nur die Verhältnisse  $\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 : \kappa_4$  eindeutig bestimmen, und zwar geschieht dies, wie aus (7) hervorgeht, mit Hilfe der Gleichungen

$$(8) \quad \begin{aligned} \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4 &= 0 \\ \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2 + \kappa_3 b_3 + \kappa_4 b_4 &= 0 \\ \kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2 + \kappa_3 c_3 + \kappa_4 c_4 &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = (a_2 \ b_3 \ c_4)$$

und haben  $(a_3 \ b_4 \ c_1)$ ,  $(a_4 \ b_1 \ c_2)$  und  $(a_1 \ b_2 \ c_3)$  analoge Bedeutung, so findet man aus (8):

$$(9) \quad \kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 : \kappa_4 = (a_2 \ b_3 \ c_4) : -(a_3 \ b_4 \ c_1) : (a_4 \ b_1 \ c_2) : -(a_1 \ b_2 \ c_3).$$

Zur Kontrolle dieses Ergebnisses dient die Tatsache, daß man mit Hilfe der Werte (9) jede der Gleichungen (8) in

Gestalt einer identisch verschwindenden Determinante schreiben kann, z. B. die erste Gleichung (8) in der Gestalt

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

während die zweite und dritte Gleichung (8) aus (10) dadurch hervorgehen, daß man die erste Zeile durch die Elemente  $b_i$  bzw. durch die Elemente  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ersetzt.

Nimmt man vier Punkte  $A, B, C, O$  an und zieht ihre Verbindungslinien (vollständiges Viereck); verbindet man die neuen Schnittpunkte derselben unter sich und mit den alten durch neue Geraden und verfährt man mit den Schnittpunkten in dieser neuen Figur wiederum so, so erzeugt man ein *geometrisches Netz*.<sup>19)</sup> Nehmen wir drei der ursprünglichen Verbindungslinien als  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$  an, so lassen sich die Gleichungen aller Geraden des *Netzes* nach Nr. 66 mit Hilfe nur dreier Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  und rationaler Zahlen als lineare Aggregate von jenen ausdrücken.

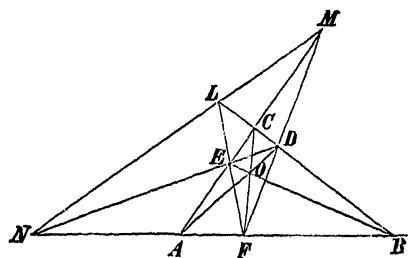


Fig. 46.

B. 1) Man untersuche die Anordnung der Schnittpunkte der Seiten des vollständigen Vierecks  $ABCO$  mit den Seiten seines Diagonaldreiecks  $DEF$  (Fig. 46).

Nehmen wir die Gleichungen der drei Seiten  $BC, CA, AB$  an als bez.  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$ , so sind die anderen Seiten die durch  $O$

gehenden Ecktransversalen, als deren Gleichungen wir wählen können (Nr. 66)

$$\begin{aligned} OA & a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0 \\ OB & a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0 \\ OC & a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0. \end{aligned}$$

Hierdurch sind aber die Gleichungen aller anderen Geraden der Figur bestimmt. Da z. B.  $EF$  durch den Schnittpunkt geht von

$s_3 = 0$ ,  $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$  und den von  $s_2 = 0$ ,  $a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$ , so ist die

Gleichung von  $EF$   $- a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ ;

ebenso die von  $FD$   $a_1 s_1 - a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ ,

und die von  $DE$   $a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$ .

Danach ergibt sich leicht, daß die Punkte  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , d. h. die Schnittpunkte von  $s_1 = 0$  mit  $- a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ , von  $s_2 = 0$  mit  $a_1 s_1 - a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  und von  $s_3 = 0$  mit  $a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$  in einer Geraden liegen, deren Gleichung ist

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0.$$

Wir nennen die Gerade  $LMN$  die *Harmonikale des Punktes O in bezug auf das Dreieck ABC*, wegen folgender Eigenschaft. Die Gleichung von  $CN$  ist  $a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0$ , denn dies ist eine durch die Ecke  $s_1 | s_2$  und durch den Schnittpunkt  $N$  von  $s_3 = 0$  mit  $a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$  gehende Gerade. Daher ist  $AB$  in  $F$ ,  $N$  harmonisch geteilt, denn die Geraden  $CA$ ,  $CB$ ;  $CF$ ,  $CN$  haben die Gleichungen

$$s_2 = 0, \quad s_1 = 0; \quad a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0, \quad a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0.$$

In derselben Weise folgen auch die Punktepaare  $B$ ,  $C$ ;  $D$ ,  $L$  und  $C$ ,  $A$ ;  $E$ ,  $M$  als harmonisch. Man kann also sagen:

Die Schnittpunkte der Harmonikale von  $O$  mit den Seiten des Dreiecks  $ABC$  werden durch die Ecken harmonisch getrennt von den Seitenschnittpunkten der durch  $O$  gezogenen Ecktransversalen.<sup>14)</sup> Offenbar gilt auch der Satz: Wird ein Punkt  $O$  in der Ebene eines Dreiecks mit den Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  durch die Geraden  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  verbunden und zieht man durch jede Ecke den vierten harmonischen Strahl zu der betreffenden Verbindungslinie und dem durch die Ecke gehenden Seitenpaar, so schneiden diese drei vierten harmonischen Strahlen die Gegenseiten des Dreiecks in drei Punkten, die in einer Geraden, der Harmonikale des Punktes  $O$  mit Bezug auf das Dreieck, liegen.

2) Die Harmonikalen des Höhenschnittpunktes  $H$  und des Schwerpunktes  $S$  in einem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  sind bez.

$$s_1 \cos A_1 + s_2 \cos A_2 + s_3 \cos A_3 = 0, \quad s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = 0.$$

Denn nach Nr. 65, 3 ist  $s_1 \cos A_1 - s_2 \cos A_2 = 0$  die Gleichung der Höhe  $HA_3$ , die nun an Stelle der Geraden  $OC$  mit der Gleichung  $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$  in Beispiel 1 tritt; man hat daher bei der Harmonikale  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  des Höhenschnittpunktes  $a_1 : a_2 = \cos A_1 : \cos A_2$ , usw. Ebenso ist  $s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 = 0$  nach Nr. 65, 4 die Gleichung der Schwerlinie  $SA_3$ , usw.

3) *Harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits* (vgl. Nr. 66). Vier Geraden und ihre sechs Schnittpunkte bilden die *Seiten* und *Ecken* eines sog. vollständigen Vierseits; die drei Verbindungslinien der nicht auf einer Seite liegenden Gegeneckenpaare heißen die *Diagonalen* und bilden das *Diagonaldreiseit*.<sup>15)</sup> In Figur 46 bildet die Gerade  $LMN$  mit  $EF$ ,  $FD$ ,  $DE$  ein solches vollständiges Vierseit von den Diagonalen  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Daher geben die dreigliedrigen Gleichungen von 1) die Seiten des Vierseits, ausgedrückt durch die Gleichungen seiner Diagonalen. Aus der Definition der Harmonikalen folgt: *In jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden die beiden Gegenecken desselben und die Ecken des Diagonaldreiseits harmonische Punktepaare* oder: *An jeder Ecke des Vierseits sind die Diagonale und die Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt der beiden anderen Diagonalen harmonisch getrennt durch das Seitenpaar*. Hier tritt besonders die vollkommene Analogie zu den Eigenschaften des vollständigen Vierecks in Nr. 66 hervor.

Übrigens enthält 1) auch den Satz: Sucht man in einem vollständigen Viereck die Harmonikalen der Ecken in bezug auf je die drei anderen, so bilden dieselben ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreiseit sich mit dem Diagonaldreieck ( $DEF$ ) des Vierecks deckt.

4) *Sind zwei Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  so gelegen, daß die Schnittpunkte  $L$ ,  $M$ ,  $N$  der Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  des einen und der entsprechenden Seiten  $EF$ ,  $FD$ ,  $DE$  des anderen in einer Geraden liegen, so gehen die Geraden  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ , die die entsprechenden Ecken beider Dreiecke verbinden, durch denselben Punkt  $O$ .*

Es ist dies der Satz von *Desargues*<sup>16)</sup> über perspektiv liegende Dreiecke. Wenn die Seiten des ersten Dreiecks durch  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$  dargestellt werden und  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  die Gleichung der Geraden ist, in der sie den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks begegnen, so müssen diese bez. durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} a'_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 &= 0, & a_1 s_1 + a'_2 s_2 + a_3 s_3 &= 0, \\ a_1 s_1 + a_2 s_2 + a'_3 s_3 &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden, und man erhält als Differenzen je zweier dieser drei Gleichungen die folgenden

$$\begin{aligned} (a_1 - a'_1) s_1 &= (a_2 - a'_2) s_2, & (a_2 - a'_2) s_2 &= (a_3 - a'_3) s_3, \\ (a_3 - a'_3) s_3 &= (a_1 - a'_1) s_1, \end{aligned}$$

die nach dieser ihrer Ableitung Geraden durch die Ecken des zweiten Dreiecks und nach ihrer Form auch Geraden durch die entsprechenden Ecken des ersten darstellen, zugleich aber augenscheinlich solche, die durch *einen* Punkt gehen.

\* 68 Bedingungen der Orthogonalität und des Parallelismus der Geraden

$$(11) \quad a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0, \quad a'_1 s_1 + a'_2 s_2 + a'_3 s_3 = 0.$$

Wenn man wie in Nr. 67 diese Gleichungen in entwickelter Form schreibt, so kann man die Kriterien (19) und (18) in Nr. 36 anwenden. Danach besteht unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten Orthogonalität, wenn die aus dem Produkt der Koeffizienten von  $x$  und dem Produkt der Koeffizienten von  $y$  gebildete Summe gleich Null ist. Man findet also dafür die Bedingung

$$a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + (a_3 a'_1 + a_1 a'_3) \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + (a_1 a'_2 + a_2 a'_1) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Da aber  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  die Winkel sind, die die Normalen auf die Geraden  $s_2, s_3$  mit der  $x$ -Achse bilden, so ist  $\cos(\alpha_2 - \alpha_3)$  gleich dem Kosinus des Winkels dieser Normalen, der gleich oder supplementär dem Winkel der Geraden selbst ist. Liegt der Anfangspunkt der Koordinaten innerhalb des Dreiecks, und bezeichnen wir durch  $A_1, A_2, A_3$  seine Winkel, so ist  $\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = \cos(\pi - A_1) = -\cos A_1$ . Die Bedingung der Orthogonalität beider Geraden ist also

$$(12) \quad a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 - (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) \cos A_1 - (a_3 a'_1 + a_1 a'_3) \cos A_2 - (a_1 a'_2 + a_2 a'_1) \cos A_3 = 0.$$

Als ein besonderer Fall des vorigen ergibt sich die Bedingung, unter der die Gerade  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  zur Seite  $s_3 = 0$  normal ist als  $a_3 = a_2 \cos A_1 + a_1 \cos A_2$ .

Auf demselben Wege finden wir, indem wir Proportionalität der Koeffizienten von  $x$  und  $y$  in beiden Gleichungen verlangen, das Kriterium des Parallelismus der Geraden (11):

$$(13) \quad (a_2 a'_3 - a_3 a'_2) \sin A_1 + (a_3 a'_1 - a_1 a'_3) \sin A_2 + (a_1 a'_2 - a_2 a'_1) \sin A_3 = 0$$

oder, wenn wir  $l_1, l_2, l_3$  als die Längen der den Winkeln  $A_1, A_2, A_3$  bez. gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks  $s_1, s_2, s_3$  einführen:

$$(14) \quad (a_2 a'_3 - a_3 a'_2) l_1 + (a_3 a'_1 - a_1 a'_3) l_2 + (a_1 a'_2 - a_2 a'_1) l_3 = 0.$$

Die beiden Funktionen, deren Verschwinden Parallelismus, bez. Orthogonalität nach sich zieht, treten daher als Zähler, bez. Nenner auf in dem Ausdruck der *Tangente des von den beiden Geraden gebildeten Winkels* (Nr. 36),  $\operatorname{tg} \delta =$

$$\frac{\pm \{ (a_2 a'_3 - a_3 a'_2) \sin A_1 + (a_3 a'_1 - a_1 a'_3) \sin A_2 + (a_1 a'_2 - a_2 a'_1) \sin A_3 \}}{a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 - (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) \cos A_1 - (a_3 a'_1 + a_1 a'_3) \cos A_2 - (a_1 a'_2 + a_2 a'_1) \cos A_3}$$

Endlich liefert die Anwendung der Formel (31) in Nr. 42 auf die explizite Form der Gleichung  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  die Länge der Normale von dem Punkte  $x' | y'$  auf die Gerade. Falls wir das Ergebnis der Substitution von  $x' | y'$  in eine Funktion  $s$  abkürzend mit  $-(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p) = s'$  bezeichnen, wird die Formel für den Abstand

$$(15) \frac{a_1 s'_1 + a_2 s'_2 + a_3 s'_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos A_1 - 2a_3 a_1 \cos A_2 - 2a_1 a_2 \cos A_3)}}$$

Wenn der Zähler dieses Ausdrucks verschwindet, so liegt der Punkt  $x' | y'$  in der Geraden selbst (Nr. 42). Das Verschwinden des Nenners erscheint nach (12) als die Form der Bedingung der Orthogonalität für zwei Geraden, die sich decken, oder für eine Gerade mit sich selbst. Diese Eigenschaft charakterisiert, wie wir in Nr. 61 gefunden haben, die imaginären Geraden absoluter Richtung; von diesen haben in der Tat auch die im Endlichen gelegenen Punkte unendlich großen Abstand.

**B.** 1) Die Gleichung einer Normalen zu  $s_3 = 0$  im Endpunkte  $A_2$  ist  $s_1 + s_3 \cos A_2 = 0$  (vgl. Nr. 65, 6).

Denn sie ist notwendig von der Form  $a_1 s_1 + a_3 s_3 = 0$ , und die Bedingung (12) gibt  $a_3 = a_1 \cos A_2$ .

2) Die Gleichungen der in den Mitten der Dreiecksseiten errichteten Lote.

Da der Mittelpunkt von  $A_1 A_2$  nach Nr. 65, 4 der Schnittpunkt von  $s_3 = 0$  mit  $s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 = 0$  ist, so hat eine durch ihn gehende Gerade die Gleichung  $s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 + a_3 s_3 = 0$ , und die Bedingung (12) gibt  $a_3 = \sin (A_1 - A_2)$ . Also sind die Gleichungen der Mittellote

$$s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 + s_3 \sin (A_1 - A_2) = 0$$

$$s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 + s_1 \sin (A_2 - A_3) = 0$$

$$s_3 \sin A_3 - s_1 \sin A_1 + s_2 \sin (A_3 - A_1) = 0.$$

3) Die Mittellote der Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkte.

Indem man je zwei der drei Gleichungen in B. 2 zueinander addiert und hierdurch je eine der Größen  $s_1, s_2, s_3$  eliminiert, bestimmt man die Verbindungslinien des Schnittpunktes zweier Mittellote mit dem Schnittpunkt der zugehörigen Seiten des Dreiecks. Die Gleichungen dieser drei Verbindungslinien lassen sich zusammenziehen in

$$\frac{s_1}{\cos A_1} = \frac{s_2}{\cos A_2} = \frac{s_3}{\cos A_3},$$

und die vollkommene Symmetrie dieser drei Gleichungen in bezug auf  $s_1, s_2, s_3$  usw. zeigt, daß auch das dritte Lot durch denselben Punkt geht. In der Tat ist die Summe der Produkte der drei Gleichungen der Mittellote mit bez.  $\sin^2 A_3, \sin^2 A_1, \sin^2 A_2$  identisch gleich Null.

4) Man beweise, daß die Geraden

$s_1 \cos A_1 + s_2 \cos A_2 + s_3 \cos A_3 = 0$  und  $s_1 \sin 2A_1 \sin (A_2 - A_3) + s_2 \sin 2A_2 \sin (A_3 - A_1) + s_3 \sin 2A_3 \sin (A_1 - A_2) = 0$  zueinander rechtwinklig sind.

5) Die Gleichung der Normalen durch den Punkt  $s'_1, s'_2, s'_3$  zur Geraden  $s_3 = 0$  ist

$s_1(s'_2 + s'_3 \cos A_1) - s_2(s'_1 + s'_3 \cos A_2) + s_3(s'_2 \cos A_2 - s'_1 \cos A_1) = 0$ ; hierbei bedeutet der Punkt  $s'_1, s'_2, s'_3$  denjenigen Punkt, für dessen Koordinaten die Ausdrücke  $s_1, s_2, s_3$  die Werte  $s'_1, s'_2, s'_3$  annehmen.

6) Die Gleichung der Normalen durch den Punkt  $s'_1, s'_2, s'_3$  zur Geraden  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  ist

$$\begin{vmatrix} s_1 & s'_1 & -a_1 + a_2 \cos A_3 + a_3 \cos A_2 \\ s_2 & s'_2 & a_1 \cos A_3 - a_2 + a_3 \cos A_1 \\ s_3 & s'_3 & a_1 \cos A_2 + a_2 \cos A_1 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

\* 69. **Homogene Normalkoordinaten des Punktes.** Wir haben in Nr. 67 gesehen, daß in Beziehung auf drei beliebige feste Geraden  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$  die Gleichung jeder vierten Geraden in der Form  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  ausgedrückt werden kann, und daß es möglich ist, Aufgaben zu lösen durch eine Reihe von Gleichungen, die ohne direkte Beziehung auf  $x, y$  nur Glieder mit  $s_1, s_2, s_3$  enthalten. Daraus entspringt für das im vorigen ausführlich erläuterte Prinzip ein neuer Gesichtspunkt. Anstatt  $-s_i$  nur als ein Symbol für die Größe  $x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$  anzusehen, nehmen wir an (Nr. 64), daß  $s_i$  den senkrechten Abstand eines Punktes von der Ge-



raden  $s_i = 0$  bezeichne. Wir können die Lage eines Punktes durch seine Entfernungen von *drei* festen Geraden bestimmen und diese Entfernungen als Koordinaten des Punktes bezeichnen. Wir nennen die Abstände  $s_1, s_2, s_3$  eines Punktes von drei festen Fundamentallinien  $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$  die Normalkoordinaten desselben in dem gegebenen Fundamentaldreieck (Koordinatendreieck). Im System der Normalkoordinaten wird eine Gerade durch eine homogene Gleichung ersten Grades dargestellt:

$$(16) \quad a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0.$$

In dieser Homogenität liegt, wie die weitergehenden Untersuchungen lehren werden, der hauptsächlichste Vorzug des neuen Koordinatensystems. An dieser Stelle erkennt man nach dem Vorhergehenden einen Vorzug desselben vor dem System der Cartesischen Koordinaten darin, daß in diesem die höchstmögliche Vereinfachung der Gleichungen eines Problems durch die Wahl *zweier* der merkwürdigsten Geraden der Figur zu Koordinatenachsen erlangt wird, während bei der Anwendung von Normalkoordinaten zugunsten der Einfachheit über *drei* Fundamentallinien verfügt werden kann. Daraus vornehmlich entspringt die größere Kürze der in Nr. 65f. erhaltenen Ausdrücke, verglichen mit den entsprechenden des zweiten Kapitels.

Die drei Fundamentallinien zerlegen die Ebene in sieben Felder, die wiederum durch die Vorzeichen der Koordinaten unterschieden sein müssen, da sie durch die Orte der Nullwerte je einer Koordinate getrennt werden. Wir wollen stets die Normalkoordinaten eines Punktes  $O$  im Inneren des Fundamentaldreiecks positiv annehmen, d. h. zur Einführung der in  $x|y$  expliziten Werte von  $s_i$  jeweiligen den Nullpunkt *innerhalb* voraussetzen. Dann sind in den Scheitelwinkeln des Dreiecks zwei, in den übrigen äußeren Feldern ist eine der Koordinaten negativ.

**\*70. Identische Fundamentalrelation.** Die Maßzahlen der Abstände eines Punktes von den drei Fundamentallinien können wir nicht ganz willkürlich wählen, denn schon zwei reichen zur Bestimmung aus. Es muß also eine Beziehung zwischen ihnen bestehen.

Wenn  $l_1, l_2, l_3$  die Längen der Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  bezeichnen, so drücken  $l_1s_1, l_2s_2, l_3s_3$  bez. die doppelten Inhalte der Dreiecke  $OA_2A_3, OA_3A_1, OA_1A_2$  aus, die von einem willkürlich gewählten Punkte  $O$  der Ebene mit je zwei Fundamentalpunkten gebildet werden. Für jeden im Inneren des Dreiecks gewählten Punkt  $O$  sind die Abstände positiv und die Teildreiecke gleichstimmig, können also auch positiv genommen werden. Für einen außerhalb gewählten Punkt wechselt nicht nur ein Abstand das Vorzeichen, sondern auch der Sinn des zugehörigen Dreiecks. Daher folgt (Nr. 7) für jede Lage von  $O$ :

$$l_1s_1 + l_2s_2 + l_3s_3 = 2(OA_2A_3 + OA_3A_1 + OA_1A_2) = 2A_1A_2A_3.$$

Somit ist, wie auch der Punkt  $O$  genommen sei, die besondere lineare Funktion

$$(17) \quad l_1s_1 + l_2s_2 + l_3s_3 = M$$

konstant und dem doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks gleich. Da die Größen  $\sin A_i$  den  $s_i$  proportional sind, so ist auch, mit  $R$  als Radius des umgeschriebenen Kreises

$$(18) \quad s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = \frac{M}{2R}$$

eine Konstante. Dies kann man auch direkt nachweisen, indem man nach Nr. 68 die mit  $\sin(\alpha_2 - \alpha_3), \sin(\alpha_3 - \alpha_1), \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$  bez. multiplizierten trinomischen Werte von  $s_1, s_2, s_3$  addiert; denn in der Summe verschwinden die Koeffizienten von  $x$  und  $y$  und es bleibt die oben angegebene Konstante.

Die Abstände  $s_i$  irgend eines Punktes von den Fundamentallinien genügen einer linearen Identität und sind daher schon durch ihre Verhältnisse bestimmt. Sind  $x_1, x_2, x_3$  drei zu den wirklichen Abständen  $s_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) proportionale Zahlen und bedeutet  $\varrho$  einen Proportionalitätsfaktor, so daß  $s_1 = \varrho x_1, s_2 = \varrho x_2, s_3 = \varrho x_3$ , so ist  $\varrho$  durch die Gleichung bestimmt

$$(19) \quad \varrho(l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3) = M.$$

Solange wir nun homogene Gleichungen zwischen den  $s_i$  betrachten, können wir diese wirklichen Abstände, ohne die Bedeutung der Gleichung zu ändern, durch proportionale

Größen ersetzen. Denn ist  $f(s_1, s_2, s_3)$  eine homogene Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades, so ist bekanntlich  $f(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3) = \varrho^n f(x_1, x_2, x_3)$ . Daher ändern wir die Definition in Nr. 69 dahin ab, daß wir *trimetrische Normalkoordinaten eines Punktes* drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  nennen, deren Verhältnisse gleich sind den Verhältnissen der Abstände  $s_1, s_2, s_3$  des Punktes von drei Fundamentallinien, oder kurz, *Proportionalzahlen zu diesen Abständen*. Diese Verhältniskoordinaten eines Punktes bezeichnen wir späterhin mit  $x_1, x_2, x_3$  und den Punkt selbst als  $x_1 | x_2 | x_3$  oder  $x_i$ .

Damit finden wir die früher gewonnene Einsicht bestätigt, daß zur Bestimmung des Punktes nur zwei unabhängige Größen bekannt sein müssen. Denn drei Proportionalzahlen  $x_1, x_2, x_3$  sind angebbar, sobald wir nur zwei ihrer Verhältnisse z. B.  $x_1 : x_3, x_2 : x_3$  kennen, und  $\varrho$  kann dann so bestimmt werden, daß  $\varrho x_i$  die Abstände selbst sind.

\*71. Die Gleichung jeder Geraden muß sich durch die Gleichungen der Fundamentallinien als lineares homogenes Aggregat darstellen lassen. Die Identität (17) in Nr. 70 erlaubt uns aber, überhaupt jede lineare Gleichung in trimetrischen Koordinaten, auch der Form nach, homogen zu machen; denn, wäre z. B. eine formell nicht homogene Gleichung gegeben wie  $s_1 = 3$  (offenbar eine Parallele zu  $s_1 = 0$ ), so kann sie in der homogenen Form geschrieben werden  $Ms_1 = 3(l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3)$ .

Überhaupt sind in Cartesischen Koordinaten die Gleichungen aller zu  $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$  parallelen Geraden von der Form  $c_1 x + c_2 y + c_3 + k = 0$ , da sie sich nur im konstanten Gliede unterscheiden (Nr. 32).

Ist also die Gleichung der gegebenen Geraden in Normalkoordinaten  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ , so ist nach Nr. 70

(20)  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + k(s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3) = 0$   
die Gleichung einer Parallelen in Normalkoordinaten.

Sind umgekehrt  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0, b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0$  irgend zwei Parallelen, so muß sich unter den Geraden ihres Büschels eine mit der Gleichung

$$(21) \quad s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = 0$$

befinden. In der Tat wird gerade dies durch das Kriterium des Parallelismus in Nr. 68 ausgesagt, wenn man dasselbe nach Nr. 37 deutet.

Da die Gerade (21) die Schnittpunkte aller Parallelen (Nr. 31 Schluß) enthält, so ist sie *der Ort aller unendlich fernen Punkte oder die unendlich ferne Gerade der Ebene*. In diesen Überlegungen können an Stelle der  $s_i$  auch die  $x_i$  gesetzt werden.

B. 1) Haben zwei Gleichungen  $S = 0$ ,  $S' = 0$  solche Koeffizienten, daß  $S - S' = \text{const.}$ , so stellt  $S + S' = 0$  ihre Mittelparallele dar.

2) Die Gleichung der Parallelen zur Seite  $s_3$  eines Dreiecks durch die Gegenecke desselben ist  $s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 = 0$ ; denn diese Gerade geht durch den Punkt  $s_1 | s_2$  und ist  $s_3$  parallel, weil man sie in der Form schreiben kann

$$s_3 \sin A_3 - (s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3) = 0.$$

Die vier Geraden  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_1 \sin A_1 \pm s_2 \sin A_2 = 0$ , deren letzte nach Nr. 65, 4 die von der Spitze  $A_3$  ausgehende Mittellinie des Dreiecks ist, bilden ein harmonisches Büschel. Der Mittelpunkt einer Strecke und der unendlich ferne Punkt ihrer Geraden sind in bezug auf die Endpunkte der Strecke harmonisch konjugiert (vgl. 1).

3) Die Gerade, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist zur dritten Seite parallel.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten  $s_1 = 0$  und  $s_2 = 0$  hat nach Nr. 65, 4 eine Gleichung von der Form  $s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 - \lambda s_1 = 0$ , sowie von der Form  $s_1 \sin A_1 - s_3 \sin A_3 - \mu s_2 = 0$ ; daher muß  $\lambda = -\sin A_1$  und  $\mu = -\sin A_2$  sein, d. h. man erhält

$$s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 = 0$$

$$\text{oder} \quad 2 s_3 \sin A_3 = s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3.$$

4) Die Gerade  $l_1 s_1 - l_2 s_2 + l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$  in Nr. 65, 5 geht durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte  $s_1 | s_3, s_2 | s_4$ .

Denn  $(l_1 s_1 + l_3 s_3) - (l_2 s_2 + l_4 s_4)$  ist eine konstante Größe, nämlich offenbar das Doppelte der Fläche des Vierecks. Infolgedessen sind

$$l_1 s_1 + l_3 s_3 = 0, \quad l_2 s_2 + l_4 s_4 = 0$$

parallele Geraden, und  $(l_1 s_1 + l_3 s_3) - (l_2 s_2 + l_4 s_4) = 0$  ist ihre Mittelparallele (1), halbiert also auch die Verbindungslinie der

Punkte  $s_1 | s_3$  und  $s_2 | s_4$ , von denen der eine der ersten, der andere der zweiten Geraden angehört.

✱ 72. **Verbindungsgerade zweier Punkte.** Die Punkte  $x' | y'$ ,  $x'' | y''$  haben die Normalkoordinaten  $s_i', s_i''$ , wenn diese die Substitutionsergebnisse von  $x' | y'$ ,  $x'' | y''$  in  $-(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i)$  bezeichnen. Eine Gerade von der Gleichung  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  enthält beide Punkte, wenn die Koeffizienten so gewählt werden, daß zugleich  $a_1 s_1' + a_2 s_2' + a_3 s_3' = 0$  und  $a_1 s_1'' + a_2 s_2'' + a_3 s_3'' = 0$ . Die Elimination der  $a_1, a_2, a_3$  ergibt für die Verbindungsgerade der Punkte  $s_i', s_i''$  die Gleichung

$$(22) \quad s_1(s_2' s_3'' - s_3' s_2'') + s_2(s_3' s_1'' - s_1' s_3'') + s_3(s_1' s_2'' - s_2' s_1'') = 0.$$

Sie ist zugleich die Bedingung dafür, daß drei Punkte von den Koordinaten  $s_i, s_i', s_i''$  in einer Geraden liegen (vgl. Nr. 40).\*)

Andererseits finden wir, daß für einen Teilpunkt  $s_i$ , der die Strecke zwischen  $s_i'$  und  $s_i''$  im Verhältnis  $n' : n''$  teilt, die Abstände von den Fundamentallinien wegen  $n' : n'' = (s_i - s_i') : (s_i'' - s_i)$  wie in Nr. 14 durch  $s_i = \frac{n'' s_i' + n' s_i''}{n' + n''}$  ausgedrückt sind. Daher können wir als die trimetrischen Normalkoordinaten des Punktes, der die Strecke  $x'_1 | x'_2 | x'_3, x''_1 | x''_2 | x''_3$  im Verhältnis  $n' : n''$  teilt, nehmen

$$(23) \quad n'' x'_1 + n' x''_1 | n'' x'_2 + n' x''_2 | n'' x'_3 + n' x''_3.$$

Offenbar haben (Nr. 15) zwei in bezug auf  $x_i'$  und  $x_i''$  konjugiert harmonische Punkte die Koordinaten  $n'' x_i' \pm n' x_i''$ .

✱ 73. Wenn eine Gleichung  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  oder  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$  gegeben ist, so kann die durch sie dargestellte Gerade bei gegebenem Fundamentaldreieck  $A_1 A_2 A_3$  leicht konstruiert werden. Ihre Schnittpunkte  $L, M, N$ , mit den Fundamentallinien  $BC, CA, AB$  oder  $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$  (vgl. Fig. 46) sind bez. durch die Gleichungspaare bestimmt

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 0 & x_3 = 0 \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0; & a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0; & a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0. \end{array}$$

\*) Dabei wird wieder die Gleichung nicht geändert, wenn wir sie in den  $x_i, x_i', x_i''$  schreiben.

Die Geraden  $A_1L$ ,  $A_2M$ ,  $A_3N$  teilen aber die Dreieckswinkel  $A_2A_1A_3$ ,  $A_3A_2A_1$ ,  $A_1A_3A_2$  so, daß das Sinusverhältnis der Teilwinkel gleich  $-a_2:a_3$ ,  $-a_3:a_1$ ,  $-a_1:a_2$  ist, denn es ist in  $A_1L$   $x_3:x_2=s_3:s_2=-a_2:a_3$ , usw. Vollzieht man also einfach diese durch die Koeffizienten der Gleichung bestimmte Teilung der Winkel des Fundamentaldreiecks, so liegen die drei Punkte, in denen die Teilstrahlen die Gegenseiten schneiden, in der durch die Gleichung dargestellten Geraden.\*)

Ganz ebenso finden wir einen Punkt von gegebenen trimetrischen Normalkoordinaten  $a_1|a_2|a_3$ . Seine Verbindungsgeraden mit den Fundamentalpunkten  $1|0|0$ ,  $0|1|0$ ,  $0|0|1$  haben nach Nr. 72 die Gleichungen  $a_3x_2 - a_2x_3 = 0$ ,  $a_1x_3 - a_3x_1 = 0$ ,  $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$  oder

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} \quad \text{oder} \quad \frac{s_1}{a_1} = \frac{s_2}{a_2} = \frac{s_3}{a_3} (= \rho).$$

Diese Geraden teilen also die Winkel  $A_2A_1A_3$ ,  $A_3A_2A_1$ ,  $A_1A_3A_2$  bez. nach den Sinusverhältnissen  $a_3:a_2$ ,  $a_1:a_3$ ,  $a_2:a_1$  und können demgemäß konstruiert werden. Dabei bemerken wir nach Nr. 67, 1, daß der Punkt mit den Koordinaten  $a_1:a_2:a_3$  die Gerade

$$(24) \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

zur Harmonikale in bezug auf das Fundamentaldreieck hat. Aus den Koordinaten  $a_1:a_2:a_3$  folgen die Abstände des Punktes von den Fundamentallinien durch Multiplikation mit  $M: (l_1a_1 + l_2a_2 + l_3a_3)$  (Nr. 70).

Die trimetrischen Normalkoordinaten der veränderlichen Punkte im Fundamentaldreieck kann man durch Anwendung der Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte (vgl. Nr. 65, 1–4) oder mit Hilfe der soeben gemachten Bemerkung direkt bestimmen. So ist

---

\*) Wendet man insbesondere diese Konstruktion auf die Gleichung  $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$  (Nr. 71) an, so findet man die Teilstrahlen den Gegenseiten parallel, also drei Punkte des definierten Ortes in unendlicher Entfernung. Somit ist wiederum diese besondere lineare Gleichung als Ausdruck der unendlich fernen Geraden der Ebene erkannt.

$\frac{1}{\sin A_1} : \frac{1}{\sin A_2} : \frac{1}{\sin A_3}$  der Schwerpunkt,

$\frac{1}{\cos A_1} : \frac{1}{\cos A_2} : \frac{1}{\cos A_3}$  der Höhenschnittpunkt,

$\cos A_1 : \cos A_2 : \cos A_3$  der Mittelpunkt des umgeschriebenen,

$1 : 1 : 1$  der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises,

$\sin A_1, \sin A_2, \sin A_3$  der Schnittpunkt von drei Geraden,  
die in bezug auf die Winkelhalbierenden zu den Schwer-  
linien symmetrisch liegen,

$-1 : 1 : 1, 1 : -1 : 1, 1 : 1 : -1$  bestimmen die Mittelpunkte  
der äußerlich eingeschriebenen Kreise, usw.

B. 1) Die Gleichung der Verbindungsgeraden des Höhen-  
schnittpunktes mit dem Schwerpunkt ist (vgl. Nr. 68, 4)

$$x_1 \sin 2A_1 \sin (A_2 - A_3) + x_2 \sin 2A_2 \sin (A_3 - A_1) \\ + x_3 \sin 2A_3 \sin (A_1 - A_2) = 0.$$

2) Die Gleichung der Geraden, die die Mittelpunkte des ein-  
geschriebenen und des umgeschriebenen Kreises verbindet, ist

$$x_1 (\cos A_2 - \cos A_3) + x_2 (\cos A_3 - \cos A_1) + x_3 (\cos A_1 - \cos A_2) = 0.$$

3) Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Mittel-  
punkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises liegen in einer  
Geraden.

Die Koordinaten dieser Punkte sind  $\cos A_2 \cos A_3$ , usw.;  
 $\sin A_2 \sin A_3$ , usw. und  $\cos A_1$ , usw. Zum Beweis genügt die Be-  
merkung, daß die Koordinaten des zuletzt genannten Punktes die  
Differenzen der vorher erwähnten sind, denn es ist

$$\cos A_1 = \sin A_2 \sin A_3 - \cos A_2 \cos A_3, \text{ usw.}$$

Der Punkt mit den Koordinaten  $\cos(A_2 - A_3)$ ,  $\cos(A_3 - A_1)$ ,  
 $\cos(A_1 - A_2)$  liegt offenbar gleichfalls in derselben Geraden und  
ist ein vierter harmonischer Punkt zu den drei vorigen. Wir  
werden weiterhin sehen, daß er der Mittelpunkt des (sog. Feuer-  
bachschen) Kreises ist, der die Seitenmitten des Dreiecks enthält.

\* 74. Entfernung zweier Punkte  $P', P''$  oder  $s'_i, s''_i$   
in Normalkoordinaten.

Setzt man  $a_1 = s'_2 s''_3 - s''_2 s'_3$ ,  $a_2 = s'_3 s''_1 - s''_3 s'_1$ ,  
 $a_3 = s'_1 s''_2 - s''_1 s'_2$ , so ist  $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$  die Gleichung  
der Verbindungsgeraden  $P' P''$ . Zudem gelten nach Nr. 70  
die Beziehungen

$$(25) \quad l_1 s'_1 + l_2 s'_2 + l_3 s'_3 = M = l_1 s''_1 + l_2 s''_2 + l_3 s''_3,$$

aus denen man durch sukzessive Elimination von  $l_1, l_2, l_3$  erhält

$$(26) \quad \begin{aligned} l_2 a_3 - l_3 a_2 &= M(s'_1 - s''_1), & l_3 a_1 - l_1 a_3 &= M(s'_2 - s''_2), \\ l_1 a_2 - l_2 a_1 &= M(s'_3 - s''_3). \end{aligned}$$

Verbindet man nun die Punkte  $P', P''$  mit der Ecke  $A_1$  des Fundamentaldreiecks und schneidet  $A_1 A_2$  durch die Gerade  $P'P''$  in  $P$ , so ist bei strenger Beachtung der in Nr. 7 gegebenen Vorzeichenregel

$$\triangle A_1 P' P'' = A_1 P P'' - A_1 P P'.$$

Da die letzten beiden Dreiecke die gemeinschaftliche Basis  $A_1 P$  und die zugehörigen Höhen  $s''_3, s'_3$  haben, folgt für die Entfernung  $d$  der Punkte  $P', P''$  und den Abstand  $p$  der Geraden  $P'P''$  vom Punkte  $A_1$  die Beziehung  $p d = A_1 P \cdot (s''_3 - s'_3)$ . Nun ergibt sich für den Abstand der Seite  $A_1 A_3$  vom Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $-a_2 | a_1 | 0$  einerseits

$$\frac{a_1 M}{l_2 a_1 - l_1 a_2} = \frac{a_1}{s''_3 - s'_3},$$

andererseits  $A_1 P \cdot \sin A_1$ ; also ist

$$(27) \quad p d = \frac{a_1}{\sin A_1} = 2 R \frac{a_1}{l_1},$$

wo  $R$  der Radius des umgeschriebenen Kreises ist. Ferner findet man nach Nr. 68 für  $p$ , wenn man den Nenner der Abstandsformel daselbst mit  $\delta$  bezeichnet,  $p = \frac{M}{\delta} \frac{a_1}{l_1}$ . Daher ergibt sich  $d = \frac{2R}{M} \delta$  oder

$$(28) \quad d^2 = \frac{4R^2}{M^2} \delta^2 = \frac{4R^2}{M^2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos A_1 - 2a_3 a_1 \cos A_2 - 2a_1 a_2 \cos A_3).$$

Mit Hilfe der drei Gleichungen (26) findet man andere, bequemere Formeln für diese Entfernung. Quadriert man jene, multipliziert sie bez. mit  $l_1 \cos A_1, l_2 \cos A_2, l_3 \cos A_3$  und bildet die Summe der rechten und linken Seiten, so reduziert sich wegen  $l_1 = l_2 \cos A_3 + l_3 \cos A_2$ , usw. die Summe links auf  $l_1 l_2 l_3 \delta^2$ . Man erhält durch Substitution in (28):

$$(29) \quad d^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{M^2} \left\{ l_1 \cos A_1 (s'_1 - s''_1)^2 + l_2 \cos A_2 (s'_2 - s''_2)^2 + l_3 \cos A_3 (s'_3 - s''_3)^2 \right\}.$$



Multipliziert man aber dieselben Gleichungen (26) paarweise und bildet die Summe der bez. mit  $l_1, l_2, l_3$  vervielfachten Produkte, so reduziert sich wegen  $l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 = 2l_2l_3 \cos A_1$ , usw. die erste Summe auf  $-l_1l_2l_3 \delta^2$ . Folglich erhält man durch Substitution in (28):

$$(30) \delta^2 = -\frac{l_1l_2l_3}{M^2} \left\{ l_1(s'_2 - s''_2)(s'_3 - s''_3) + l_2(s'_3 - s''_3)(s'_1 - s''_1) \right. \\ \left. + l_3(s'_1 - s''_1)(s'_2 - s''_2) \right\}.$$

Für die letzte Form des Wertes sei auch eine direkte Ableitung angedeutet: Zuerst zeigt man, daß das Quadrat der Entfernung durch eine Summe von Vielfachen der Produkte der Differenzen der Koordinaten ausdrückbar sein muß, da  $\delta^2$  verschwindet, sobald irgend zwei Koordinatendifferenzen zu Null werden; dann ermittelt man durch die Spezialisierung der Formel für die Ecken des Fundamentaldreiecks die Faktoren jener Produkte.

B. Der doppelte Inhalt des durch drei Punkte  $s'_i, s''_i, s'''_i$  bestimmten Dreiecks ist  $\frac{l_1l_2l_3}{M^2} (a_1s'''_1 + a_2s'''_2 + a_3s'''_3)$ .

Mit Hilfe der zuvor benutzten Bezeichnungen hat man für die Gerade  $s'_i, s''_i$  die Gleichung  $a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 = 0$ . Vermöge des Ausdrucks (28) für die Länge der Basis und der Formel (15), S. 130 für die zugehörige Höhe des Dreiecks erhält man leicht die gewünschte Formel, in der der Klammerfaktor des Zählers als eine in den Koordinaten der drei Ecken symmetrische Determinante geschrieben werden kann.

### \* 75. Die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$(31) \quad x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$$

ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, wie wir in Nr. 71 gesehen haben. Zu derselben Einsicht führt die Bemerkung, daß die Gleichung zwar in der allgemeinen Form der Gleichung einer Geraden inbegriffen ist, aber keine endlich bestimmbaren Punkte enthalten kann, weil für die Koordinaten jedes solchen die Größe  $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3$  einer gewissen Konstanten gleich, aber nicht Null wird (Nr. 70). Sie ist daher nur als eine Grenzform möglich, der sich wirkliche Gleichungen nähern können.

In der allgemeinen Gleichung  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  bestimmen  $-a_3 : a_1$  und  $-a_3 : a_2$  die Abschnitte der Geraden

in den Koordinatenachsen; je kleiner also  $a_1$  und  $a_2$  werden, desto größer sind diese Abschnitte bei unverändertem Werte von  $a_3$ , desto weiter entfernt ist daher die Gerade vom Ursprung. Für  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  sind jene Abschnitte  $\infty$ , und alle Punkte der Geraden sind in unendlicher Entfernung gelegen.

In der Tat kann die Gleichung  $0 \cdot x + 0 \cdot y + a_3 = 0$ , wenn auch nicht für endliche Werte von  $x$  und  $y$ , so doch für unendlich große Werte erfüllt werden, weil das Produkt  $0 \cdot \infty$  einen endlichen Wert haben kann.

*Somit ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden in Cartesischen Koordinaten*

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + a_3 = 0.$$

Zur Abkürzung des Ausdrucks werden wir sie gelegentlich in der minder exakten Form  $a_3 = 0$  brauchen.

Wenn wir nun diese Gleichung homogen machen — ähnlich wie in Nr. 71 die Gleichung  $s_1 = 3$  homogen gemacht wurde —, so entspringt wirklich wieder die Gleichung

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0.$$

Überhaupt erweisen sich nun die Gleichungen paralleler Geraden  $S + k = 0$  als nach dem Prinzip von Nr. 65 gebaut, wenn man das Büschel durch  $S = 0$  und die unendlich ferne Gerade  $k = 0$  bestimmt denkt.

✱ 76. **Cartesische Koordinaten sind nur ein besonderer Fall von trimetrischen Normalkoordinaten.** Man glaubt vielleicht zuerst einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden darin zu finden, daß Gleichungen in trimetrischen Koordinaten homogen sind, während man in den Gleichungen mit Cartesischen Koordinaten ein absolutes Glied von Gliedern des ersten, zweiten,  $n^{\text{ten}}$  Grades unterscheidet. Aber eine einfache Überlegung zeigt, daß Gleichungen in Cartesischen Koordinaten in Wirklichkeit ebenfalls homogen sein müssen, wenn sie es auch nicht in der Form sind. Der Sinn der Gleichung  $x = 3$  kann beispielsweise kein anderer sein, als daß der Abstand  $x$  drei Längeneinheiten gleich ist, während die Gleichung  $xy = 9$  aussagt, daß das Rechteck  $xy$  gleich

9 Quadraten einer gewissen Längeneinheit ist; usw. Um solche Gleichungen auch der Form nach homogen zu machen, kann man die Längeneinheit durch  $z$  bezeichnen und dann die Gleichung der Geraden in der Form schreiben:

$$(32) \quad a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Vergleicht man dies mit  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$  und erinnert sich, daß die Gleichung der unendlich fernen Geraden die Form  $z = 0$  annimmt, so erkennt man, daß in (32) an die Stelle der willkürlichen Geraden  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  insbesondere  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  getreten sind.

*Also sind Gleichungen in Cartesischen Koordinaten nur die besondere Form, in der Gleichungen in trimetrischen Koordinaten erscheinen, wenn zwei der Fundamentallinien zu Koordinatenachsen gewählt werden, während die dritte die unendlich ferne Gerade ist. (Vgl. Nr. 88.)*

Es ist jedoch nicht überflüssig zu bemerken, daß wir nicht dasselbe geometrische Gebilde, dessen Gleichung in Cartesischen Koordinaten vorliegt, auch erhalten, wenn wir nun  $x$ ,  $y$ ,  $z$  als trimetrische veränderliche Koordinaten betrachten. Gerade so, wie wir mehrfach homogene Gleichungen zu rechtwinkligen Koordinaten transformierten durch die Substitutionen  $\rho x_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$  (Nr. 64), müssen wir, um gegebene nicht homogene Gleichungen in *gleichbedeutende* homogene zu verwandeln, aus diesen Substitutionen  $x$  und  $y$  als Funktionen der  $x_i$  berechnen und in sie einsetzen (vgl. Nr. 81).

\* 77. In dem Vorhergehenden ist eine wesentliche *Erweiterung des ursprünglich angenommenen Begriffs der Koordinaten* enthalten.

Man versteht hiernach leicht, *wie jeder besonderen Art, die Lage eines Punktes in bezug auf feste Punkte oder Linien zu bestimmen, deren Lage als bekannt vorausgesetzt wird, ein besonderes Koordinatensystem entsprechen muß.* Nachdem die Bestimmung eines Punktes durch Koordinaten erlangt ist, wird jede gerade oder krumme Linie als eine Reihe von Punkten aufgefaßt, und das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Koordinaten durch eine Gleichung zwischen denselben dar-

gestellt. So genügen die Cartesischen Koordinaten aller Punkte einer Geraden einer *vollständigen* Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, die trimetrischen Koordinaten derselben Punkte einer *homogenen* Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen, und umgekehrt definieren diese Gleichungen die Gerade als Ort.

*Setzt man an die Stelle des Punktes als des ursprünglichen durch Koordinaten zu bestimmenden Raumelementes irgend ein anderes geometrisches Gebilde, so erhält man dadurch in einem anderen Sinne neue Koordinatensysteme. Immer aber stellen Gleichungen zwischen den Koordinaten die aus jenen elementaren Gebilden zusammengesetzten räumlichen Formen dar.*

Nun hat in der Geometrie der Ebene neben dem Punkte kein anderes geometrisches Gebilde so viel Berechtigung, als elementar oder als Raumelement betrachtet zu werden, und kein anderes bietet so leicht die Möglichkeit, durch stetige Reihung neue Gebilde als zusammengesetzte zu erzeugen, wie die Gerade. *Indem man jede Gerade in bezug auf gewisse feste Punkte oder feste Geraden durch Koordinaten in verschiedener Weise bestimmt, erhält man die verschiedenen Systeme von Koordinaten der Geraden oder von Linienkoordinaten (Strahlen- oder Tangentialkoordinaten).*<sup>17)</sup>

*Von da an verfolgen die analytische und die reine Geometrie von demselben Prinzip aus auf verschiedenen Wegen das gleiche Ziel.*

**78. Linienkoordinaten.** Die Gleichung  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  einer Geraden hängt nur von den Verhältnissen der drei Koeffizienten, also von *zwei wesentlichen* Konstanten ab (Nr. 38). Wir können daher *die Gleichungskoeffizienten*  $a_1, a_2, a_3$  *als homogene Koordinaten der Geraden betrachten*, oder als nicht homogene zwei Quotienten derselben. Wie schon in Nr. 38 angedeutet, *verwendet man nach Plücker die negativen Reziproken der Achsenabschnitte als nicht homogene Koordinaten der Geraden*, also

$$(33) \quad a_1 : a_3 = u, \quad a_2 : a_3 = v$$

und bezeichnet die Gerade von den Plückerschen Linienkoordinaten  $u, v$  mit  $u|v$ . Somit sind die Geraden  $0|v$  der

$x$ -,  $u|0$  der  $y$ -Achse parallel und  $0|0$  ist die unendlich ferne Gerade (Nr. 75). Bei Strahlen  $a_1x + a_2y = 0$  durch den Anfangspunkt sind natürlich die reziproken Werte  $u$ ,  $v$  der Achsenabschnitte unendlich groß, das Verhältniß  $u:v = a_1:a_2$  bleibt jedoch endlich, falls nicht  $a_2 = 0$  ist.

Unter gleichzeitiger Verwendung Cartesischer und Plücker-scher Koordinaten erhält man die sog. *Gleichung des Ineinanderliegens*

$$(34) \quad ux + vy + 1 = 0$$

als die Bedingung dafür, daß der Punkt  $x|y$  in der Geraden  $u|v$  liege oder die Gerade  $u|v$  durch den Punkt  $x|y$  gehe. *Diese Bedingung vereiniger Lage eines Punktes und einer Geraden ist in den Koordinaten beider Elemente symmetrisch.* Darin liegt die Zweckmäßigkeit der Plückerschen Wahl der Linienkoordinaten begründet (vgl. unten Nr. 88).

Außerdem findet nun eine gewisse Reziprozität in folgender Weise ihren Ausdruck: Haben  $u$ ,  $v$  bestimmte Zahlenwerte  $u = u_0$ ,  $v = v_0$ , so stellt die Gleichung

$$(35) \quad u_0x + v_0y + 1 = 0$$

in den laufenden Punktkoordinaten  $x$ ,  $y$  die Gerade mit den Koordinaten  $u_0|v_0$  dar. Haben  $x$ ,  $y$  bestimmte Zahlenwerte  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  so stellt die Gleichung

$$(36) \quad x_0u + y_0v + 1 = 0$$

in den laufenden „Linienkoordinaten“  $u$ ,  $v$  den Punkt mit den Koordinaten  $x_0|y_0$  dar, denn die Gleichung (36) drückt die Bedingung aus, daß alle Geraden, deren Koordinaten  $u$   $v$  ihr genügen, durch den gegebenen Punkt  $x_0|y_0$  gehen; wir nennen sie daher die *Gleichung des Punktes in Linienkoordinaten*. Dieser neue Begriff ist bereits in Nr. 53 enthalten; denn hiernach ist  $A_1u + A_2v + A_3 = 0$ , wenn  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  Konstanten,  $u$ ,  $v$  Veränderliche sind\*), diejenige Gleichung in  $u$ ,  $v$ , die alle durch einen festen Punkt gehenden Geraden

---

\*) Es ist für die dortigen  $k_i$ ;  $\frac{a_1}{a_2}$ ,  $\frac{a_2}{a_3}$  gesetzt  $A_i$ ;  $u$ ,  $v$ .

$ux + vy + 1 = 0$  bestimmt. Jede Gleichung ersten Grades in Linienkoordinaten

$$(37) \quad A_1 u + A_2 v + A_3 = 0$$

stellt einen Punkt dar, und zwar den Punkt  $\frac{A_1}{A_3} \mid \frac{A_2}{A_3}$ , genau so, wie die Gerade mit der Gleichung  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$  die Koordinaten  $\frac{a_1}{a_3} \mid \frac{a_2}{a_3}$  hat.

Man übersieht sofort, wie sich von dieser Gleichung des Punktes aus eine zur bisherigen Untersuchung der Geraden ganz analoge Behandlung der analytischen Geometrie des Punktes durchführen läßt. Man kann leicht in die Ausdrücke für den Abstand zwischen Punkt und Gerade, für den Winkel statt der Gleichungskoeffizienten die Strahlenkoordinaten einführen. So sind z. B. die Koordinaten aller Strahlen des durch zwei Geraden  $u_1 \mid v_1$  und  $u_2 \mid v_2$  bestimmten Büschels in der Form  $\frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda}, \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda}$  darstellbar, wobei  $\lambda$  das Sinusteilverhältnis bedeutet. Offenbar haben auch die direkten analytischen Entwicklungen hier und dort große Ähnlichkeit. So ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden hinsichtlich der analytischen Operationen nicht verschieden von der der Verbindungslinie zweier Punkte. Sind gegeben

die Geraden

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 = 0,$$

so sind die Koordinaten ihres Schnittpunktes (Nr. 37)

$$\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \mid \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Oder: der Schnittpunkt der Geraden  $u_1 \mid v_1, u_2 \mid v_2$  hat die Gleichung

$$\frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} u - \frac{u_1 - u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + 1 = 0.$$

die Punkte

$$A_1 u + A_2 v + A_3 = 0$$

$$B_1 u + B_2 v + B_3 = 0,$$

so sind die Koordinaten ihrer Verbindungsgeraden

$$\frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \mid \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Oder: die Verbindungsgerade der Punkte  $x_1 \mid y_1, x_2 \mid y_2$  hat die Gleichung (Nr. 40)

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} x - \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} + 1 = 0.$$

**B. 1.** Der Winkel zweier Geraden mit den Koordinaten  $u_1|v_1$ , resp.  $u_2|v_2$  ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 u_2 + v_1 v_2}. \quad (\text{Nr. 36.})$$

**2.** Die Transformation der rechtwinkligen Linienkoordinaten folgt aus der der Punktkoordinaten mit Hilfe der Beziehung  $ux + vy + 1 = 0$ . Substituieren wir in dieselbe die durch eine Drehung  $\vartheta$  transformierten  $x'|y'$  vermöge der Formeln 58 in Nr. 12, so folgen die neuen Koordinaten aus

$$(u \cos \vartheta + v \sin \vartheta) x' + (-u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) y' + 1 = 0$$

$$\text{als} \quad u' = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta, \quad v' = -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta.$$

Die Punkt- und die Linienkoordinaten erleiden also durch Drehung umgekehrte Transformationen.

Dagegen wird bei der Paralleltransformation  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$  die Gleichung (34) zu

$$ux' + vy' + ux_0 + vy_0 + 1 = 0,$$

$$\text{so daß} \quad u' = \frac{u}{ux_0 + vy_0 + 1}, \quad v' = \frac{v}{ux_0 + vy_0 + 1}.$$

Diese Formeln haben einen von den übrigen abweichenden Charakter, da in ihnen ein Nenner auftritt, der im neuen Anfangspunkt verschwindet.

**79. Hüllkurven oder Enveloppen.** Wie die Wertepaare  $x, y$ , die einer Gleichung  $f(x, y) = 0$  genügen, als Koordinaten von Punkten gedeutet, in ihrer Gesamtheit die Kurve  $f(x, y) = 0$  als eine Aufeinanderfolge von Punkten darstellen (Nr. 24), so liefern die Wertepaare  $u, v$ , die einer Gleichung  $F(u, v) = 0$  genügen, als Koordinaten von Geraden gedeutet, in ihrer Gesamtheit eine Aufeinanderfolge von Geraden, die *Tangenten* der Kurve  $F(u, v) = 0$  heißen sollen. Der Inbegriff dieser sämtlichen Tangenten ist die geometrische Bedeutung der Gleichung  $F(u, v) = 0$ ; diese stellt eine Kurve als Eingehüllte oder Enveloppe von Geraden dar. Denn wie in Nr. 24 die Aufeinanderfolge aller der eine Gleichung in Punktkoordinaten befriedigenden Punkte ein Vieleck und durch die statthafte unbegrenzte Annäherung der benachbarten Punkte aneinander eine umgeschriebene Kurve bildete, so entsteht hier aus der Aufeinanderfolge aller der der Gleichung  $F(u, v) = 0$  genügenden Geraden mit Hilfe eines umgeschriebenen Vielecks eine eingeschriebene Kurve.

Eine Gleichung  $f(x, y) = 0$  vom  $n^{\text{ten}}$  Grade bestimmt für jeden gegebenen Wert  $x'$  von  $x$  die zugehörigen  $y'$  der  $n$  Punkte, die die Kurve mit der Geraden  $x = x'$  gemein hat; die Gleichung  $F(u, v) = 0$  bestimmt für jeden gegebenen Wert  $u'$  von  $u$  die zugehörigen  $v$  der  $n$  Geraden d. h. Tangenten, die die Kurve mit dem Punkte  $u = u'$  gemein hat. Und allgemein: wenn man zwischen einer Gleichung vom  $n^{\text{ten}}$  Grade in Punktkoordinaten  $x|y$  und einer Gleichung ersten Grades in  $x|y$  die gemeinschaftlichen Wertepaare der Unbekannten  $x, y$  bestimmt, so erhält man die Koordinatenpaare der  $n$  Punkte, die die Kurve mit der Geraden gemein hat; wenn man aber zwischen einer Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in Linienkoordinaten  $u|v$  und einer Gleichung ersten Grades in  $u|v$  die gemeinschaftlichen Wertepaare der Unbekannten  $u, v$  bestimmt, so erhält man die Koordinatenpaare der  $n$  Tangenten, die die Kurve mit dem Punkte gemein hat.

Jede Kurve kann man sowohl als Ort ihrer Punkte, wie auch als Hüllkurve ihrer Tangenten betrachten, also durch eine Gleichung in  $x|y$  oder in  $u|v$  definieren. Man versteht unter *Ordnung* einer Kurve den Grad ihrer Gleichung in Punktkoordinaten und unter *Klasse* der Kurve den Grad ihrer Gleichung in Linienkoordinaten. Demnach bezeichnet die *Ordnungszahl* der Kurve die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, die *Klassenzahl* derselben die Zahl ihrer Tangenten aus einem Punkte; denn jene stimmt mit dem Grade ihrer Gleichung in Punktkoordinaten  $x|y$ , diese mit dem Grade ihrer Gleichung in Linienkoordinaten  $u|v$  überein. Ordnung und Klasse sind im allgemeinen verschiedene Zahlen. Dazu nehmen die Elemente Gerade und Punkt selbst Ausnahmestellungen ein. *Die Gerade ist der einzige Ort erster Ordnung und nullter Klasse, der Punkt die einzige Eingehüllte nullter Ordnung und erster Klasse.* Bei der Übertragung metrischer Ausdrücke in Linienkoordinaten, z. B. in der Formel (31), S. 76 für den Abstand eines Punktes  $x|y$  von einer Geraden  $u|v$

$$s = - \frac{ux + vy + 1}{-\sqrt{u^2 + v^2}},$$

tritt im Nenner die Quadratsumme der Linienkoordinaten auf.



Die durch Verschwinden des Nenners dargestellte *besondere Eingehüllte*

$$u^2 + v^2 = 0$$

*bestimmt die beiden absoluten Richtungen* (wie Nr. 61 verlangt), denn die linke Seite der Gleichung zerfällt in das Produkt der beiden linearen Ausdrücke  $u \pm iv = 0$  und diese stellen, gleich Null gesetzt, die unendlich fernen Punkte von den Richtungskoeffizienten  $\pm i$  dar. Überhaupt zerfallen Hüllkurven  $n^{\text{ter}}$  Klasse, deren Gleichungen in  $u - \alpha | v - \beta$  homogen sind, in  $n$  Punkte der Geraden  $\alpha | \beta$  (vgl. Nr. 56).

**80. Punktreihen.** Ganz so allgemein wie in Nr. 64 gilt hier das Parameterprinzip: Sind  $\Sigma_1 = 0$  und  $\Sigma_2 = 0$  die Gleichungen von zwei Hüllkurven in Linienkoordinaten, so hat die durch  $\Sigma_1 - \lambda \Sigma_2 = 0$  dargestellte Hüllkurve — für  $\lambda$  als einen beliebigen Parameter — jede Gerade zur Tangente, die für die durch  $\Sigma_1 = 0$  und  $\Sigma_2 = 0$  dargestellten Kurven gleichzeitig Tangente ist. Denn Koordinatenwerte  $u | v$ , die gleichzeitig den Gleichungen  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = 0$  genügen, erfüllen notwendig für jeden Wert von  $\lambda$  auch die Gleichung  $\Sigma_1 - \lambda \Sigma_2 = 0$ .

Sind insbesondere  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = 0$  linear (also  $\Sigma_1 \equiv \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1$ ,  $\Sigma_2 \equiv \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2$ ), oder sind die beiden gegebenen Eingehüllten Punkte  $x_1 | y_1$ ,  $x_2 | y_2$ , so ist ihre Verbindungslinie ihre einzige gemeinsame Tangente, und  $\Sigma_1 - \lambda \Sigma_2 = 0$  kann als Gleichung eines Punktes nur die Gleichung eines Punktes dieser Geraden sein.

Wir untersuchen die Bedeutung des veränderlichen Parameters  $\lambda$ , der alle Werte von  $+\infty$  bis  $-\infty$  durchläuft, während der dargestellte Punkt die ganze Gerade beschreibt. Man hat  $\lambda = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{\gamma_1(x_1 u + y_1 v + 1)}{\gamma_2(x_2 u + y_2 v + 1)}$  und wenn  $s_1$ ,  $s_2$  die senkrechten Abstände der gegebenen Punkte von irgend einer durch den dargestellten Punkt gehenden Geraden sind, so ist (Nr. 42)

$$s_1 = \frac{\Sigma_1}{\gamma_1 \sqrt{u^2 + v^2}}, \quad s_2 = \frac{\Sigma_2}{\gamma_2 \sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\Sigma_1 \gamma_2}{\Sigma_2 \gamma_1} = \lambda \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

wo  $\gamma_2 : \gamma_1$  eine für alle durch den Punkt gehenden Strahlen unveränderliche Konstante ist. Die Größe  $\lambda$  wird also ganz wie in den Betrachtungen von Nr. 65 proportional dem Ver-

hältnis der Abstände und folglich dem Teilverhältnis (Nr. 14), nach dem der betrachtete Punkt die Strecke zwischen den beiden festen Punkten teilt. Daher bilden z. B. die vier Punkte

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_1 - \lambda \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$$

derselben Geraden eine harmonische Gruppe.

Geht man zur Betrachtung von *drei* Punkten  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = 0$ ,  $\Sigma_3 = 0$  weiter, die nicht in einer Geraden liegen, so knüpfen sich daran eine Reihe von Entwicklungen, die ganz denen von Nr. 67 analog sind. Ein Beispiel gibt die Betrachtung der Schnittpunkte einer geraden Transversalen mit den Seiten des durch jene bestimmten Dreiecks. Drei Punkte in den Seiten des Dreiecks sind

$$\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_2 + \mu \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_3 + \nu \Sigma_1 = 0.$$

Damit die Koordinaten einer Geraden diese Gleichungen gleichzeitig erfüllen, muß die Beziehung bestehen  $\lambda\mu\nu = -1$ ; diese gibt aber nach der Bedeutung von  $\lambda, \mu, \nu$  genau die Relation von Nr. 54, 1 unter den Teilverhältnissen wieder, die die drei Schnittpunkte in den Seiten des Dreiecks bestimmen.

Ebenso läßt sich die Gleichung jedes beliebigen vierten Punktes  $\alpha_4 u + \beta_4 v + \gamma_4 = 0$  durch die von drei festen Punkten seiner Ebene  $\Sigma_1 \equiv \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 \equiv \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 = 0$ ,  $\Sigma_3 \equiv \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 = 0$  in der Form  $k_1 \Sigma_1 + k_2 \Sigma_2 + k_3 \Sigma_3 = 0$  ausdrücken. Man hat dazu nur den Bedingungen

$$\begin{aligned} k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 &= \alpha_4, & k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3 &= \beta_4, \\ k_1 \gamma_1 + k_2 \gamma_2 + k_3 \gamma_3 &= \gamma_4 \end{aligned}$$

zu genügen, die die  $k_i$  bestimmen, sobald jene drei Punkte nicht in einer Geraden liegen (vgl. Nr. 67).

Man erhält nun offenbar entsprechend dem trimetrischen Punktkoordinatensystem auf ganz analogem Wege ein *trimetrisches Linienkoordinatensystem* (Nr. 78) und kann dieses in den Untersuchungen mit den nämlichen Vorteilen verwenden wie jenes; denn es teilt mit ihm den Vorzug der Homogenität der Gleichungen. Wir wollen diese homogenen Koordinaten in der Folge durch  $u_1, u_2, u_3$  und die aus ihnen bestimmte Gerade mit  $u_i$  oder  $u_1 | u_2 | u_3$  bezeichnen. Nach dem Vorhergehenden ist die geometrische Bedeutung dieser

Koordinaten die, daß sie die *Abstände der Geraden*  $u_i$  von den *Fundamentalpunkten*  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  oder *allgemeiner Proportionalzahlen zu denselben* bedeuten (*baryzentrische* Linienkoordinaten genannt mit Rücksicht auf die später, in Nr. 88 folgenden Betrachtungen). Man erkennt dies unmittelbar, wenn man sich die drei unabhängigen linearen Funktionen in der Form

$$(38) \quad \rho u_i = x_i u + y_i v + 1, \quad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben denkt.

B. 1) Wenn man mit  $l_1, l_2, l_3$  wie früher die Seiten und mit  $A_1, A_2, A_3$  die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet, so sind  $u_2 + u_3 = 0$ , usw. die Mittelpunkte der Seiten;  $l_2 u_2 \pm l_3 u_3 = 0$ , usw. sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Gegenseiten bez. im Falle des Minuszeichens die Schnittpunkte der Halbierungslinien der Außenwinkel mit den Gegenseiten. Ferner sind  $u_2 \operatorname{tg} A_2 + u_3 \operatorname{tg} A_3 = 0$ , usw. die Ausdrücke für die Fußpunkte der Höhen.

Es ist  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$  der Schwerpunkt des Dreiecks,  $u_1 \operatorname{tg} A_1 + u_2 \operatorname{tg} A_2 + u_3 \operatorname{tg} A_3 = 0$  der Höhenschnittpunkt,  $u_1 \sin 2A_1 + u_2 \sin 2A_2 + u_3 \sin 2A_3 = 0$  der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises,  $l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 = 0$  der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, usw. Wie ein durch die allgemeine homogene Gleichung angegebener Punkt konstruiert werden kann, zeigt 2); die Konstruktion entspricht vollständig der in Nr. 73 für eine durch die allgemeine homogene Gleichung gegebene Gerade.

2) Man deute die in Nr. 67,1 angewendeten Gleichungen nach dem System der trimetrischen Linienkoordinaten. Sind  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  die Gleichungen der Punkte  $A, B, C$ , so können  $k_2 u_2 - k_3 u_3 = 0$ ,  $k_3 u_3 - k_1 u_1 = 0$ ,  $k_1 u_1 - k_2 u_2 = 0$  die Gleichungen der Punkte  $L, M, N$  sein; alsdann sind

$$\begin{aligned} k_2 u_2 + k_3 u_3 - k_1 u_1 &= 0, & k_3 u_3 + k_1 u_1 - k_2 u_2 &= 0, \\ k_1 u_1 + k_2 u_2 - k_3 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Ecken des durch die Geraden  $LA, MB, NC$  gebildeten Dreiecks, und  $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$  stellt den Punkt  $O$  dar, in dem sich auch die Verbindungslinien der Ecken dieses neuen Dreiecks mit den entsprechenden des alten schneiden. Die Gleichungen  $k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$ ,  $k_3 u_3 + k_1 u_1 = 0$ ,  $k_1 u_1 + k_2 u_2 = 0$  bezeichnen die Punkte  $D, E, F$ , die zu  $L, M, N$  bez. in bezug auf  $BC, CA, AB$  harmonisch konjugiert sind.

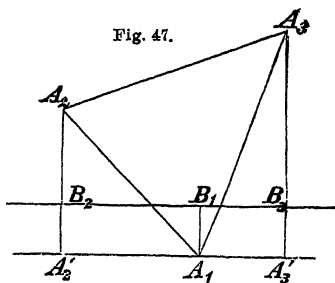
3) Wenn die Koordinaten der Geraden die Abstände derselben von den drei Fundamentalpunkten sind, so soll man die

Beziehung zwischen ihnen und den Seiten oder Winkeln des Fundamentaldreiecks entwickeln.

Sind  $A_1, A_2, A_3$  die Fundamentalphunkte und  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  die Koordinaten  $u_1, u_2, u_3$  der Geraden  $B_2B_3$  (Fig. 47), so hat man  $A_2A'_2 = u_2 - u_1$ ,  $A_3A'_3 = u_3 - u_1$  und, für

$$\sphericalangle A'_2A_1A_2 = \alpha_2, \quad \sphericalangle A'_3A_1A_3 = \alpha_3$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{l_3}, \quad \sin \alpha_3 = \frac{u_3 - u_1}{l_2}.$$



Nun ist die Summe dieser Winkel gleich  $\pi - A_1$ , also

$$(39) \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3 = \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 - \cos A_1 = \frac{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}{l_2 l_3} - \cos A_1.$$

Bestimmt man nun aus

$$-\cos \alpha_2 = \cos (A_1 + \alpha_3) = \cos A_1 \cos \alpha_3 - \frac{u_3 - u_1}{l_2} \sin A_1$$

$$\text{und} \quad -\cos \alpha_3 = \cos A_1 \cos \alpha_2 - \frac{u_2 - u_1}{l_3} \sin A_1$$

$$\text{die Werte } \sin A_1 \cos \alpha_2 = \frac{u_3 - u_1}{l_2} - \frac{u_2 - u_1}{l_3} \cos A_1,$$

$$\sin A_1 \cos \alpha_3 = \frac{u_2 - u_1}{l_3} - \frac{u_3 - u_1}{l_2} \cos A_1,$$

so erhält man durch Substitution in (39)

$$l_2^2 (u_2 - u_1)^2 + l_3^2 (u_3 - u_1)^2 - 2 l_2 l_3 (u_2 - u_1)(u_3 - u_1) \cos A_1 = l_2^2 l_3^2 \sin^2 A_1.$$

Setzt man  $2 l_2 l_3 \cos A_1 = l_2^2 + l_3^2 - l_1^2$  ein, so erhält man die verlangte Beziehung in der Form

$$l_1^2 (u_1 - u_2)(u_1 - u_3) + l_2^2 (u_2 - u_3)(u_3 - u_1) + l_3^2 (u_3 - u_1)(u_3 - u_2) = M^2$$

für  $M$  als den doppelten Inhalt des Dreiecks  $A_1A_2A_3$ . Die Auflösung der Klammern gibt ihr mittelst derselben Umformung und der Einführung der Höhen  $h_i = \frac{M}{l_i}$  die Gestalt

$$(40) \frac{u_1^2}{h_1^2} + \frac{u_2^2}{h_2^2} + \frac{u_3^2}{h_3^2} - \frac{2 u_1 u_2 \cos A_3}{h_1 h_2} - \frac{2 u_2 u_3 \cos A_1}{h_2 h_3} - \frac{2 u_3 u_1 \cos A_2}{h_3 h_1} = 1.$$

Dieselbe Beziehung läßt sich auch nach der Analogie von Nr. 70 ableiten, indem man von Plückerschen Koordinaten ausgeht.

✱ 81. Das Charakteristische und Wichtige in den vorhergehenden Entwicklungen ist die große Analogie, die zwischen den beiden Systemen der homogenen oder trimetrischen Koor-

dinaten für den Punkt und für die Gerade stattfindet. Diese Analogie vervollständigt sich zu klarer Ausprägung bei einer Begründung dieser Systeme, die zum Ausgangspunkt den Umstand macht, daß die Koordinaten nicht sowohl die Abstände selbst, als vielmehr zu denselben proportionale Größen bedeuten.

Wir nehmen in einem Dreieck die Seiten als Fundamentallinien der Punktkoordinaten und die Ecken als Fundamentalpunkte der trimetrischen Linienkoordinaten. Haben die Seiten die Gleichungen

(41)  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ ,  $b_1x + b_2y + b_3 = 0$ ,  $c_1x + c_2y + c_3 = 0$ ,  
so finden wir nach Nr. 37 als die Gleichungen der Eckpunkte

(42)  $A_1u + A_2v + A_3 = 0$ ,  $B_1u + B_2v + B_3 = 0$ ,  $C_1u + C_2v + C_3 = 0$ ,  
wenn wir die Abkürzungen einführen

$$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2, \quad A_2 = b_3c_1 - b_1c_3, \quad A_3 = b_1c_2 - b_2c_1;$$

$$B_1 = c_2a_3 - c_3a_2, \text{ usw. } \dots; \quad C_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \text{ usw.}$$

Umgekehrt müssen wir von den letzten Gleichungen aus die ersten finden, indem wir nach Nr. 78 zur Bestimmung der Koordinaten der Verbindungslinien dieselben Formeln anwenden, wie vorhin zur Berechnung der Schnittpunkte. Daher muß notwendig

$$(43) \quad B_2C_3 - B_3C_2 = \Delta \cdot a_1, \text{ usw.}, \quad C_2A_3 - C_3A_2 = \Delta \cdot b_1, \text{ usw.}, \\ A_2B_3 - A_3B_2 = \Delta \cdot c_1, \text{ usw.}$$

sein, und in der Tat findet man durch Ausrechnung den gemeinsamen Faktor  $\Delta$  gleich der nun nicht verschwindenden Determinante (39) in Nr. 45.

Jetzt kann man leicht beide Koordinatensysteme mit fast denselben Worten begründen.

Setzt man

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}$$

$$y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}$$

so sind  $x'$ ,  $y'$  die Parameter von zwei Strahlenbüscheln, die durch die dritte Seite mit den

Setzt man

$$u' = \frac{A_1u + A_2v + A_3}{C_1u + C_2v + C_3}$$

$$v' = \frac{B_1u + B_2v + B_3}{C_1u + C_2v + C_3}$$

so sind  $u'$ ,  $v'$  die Parameter von zwei Punktreihen, die durch die dritte Ecke mit den

beiden anderen bestimmt werden. Wählen wir also drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  so, daß  $x' = \frac{x_1}{x_3}, y' = \frac{x_2}{x_3}$ , so verhalten sich dieselben wie die Abstände  $p_i$  des Punktes  $x|y$  von den Seiten, multipliziert mit gewissen Konstanten  $r_i$ , nämlich mit  $r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, r_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, r_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  (Nr. 65). Also gelten bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\mu$  die Beziehungen

$$(44) \begin{cases} \mu x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ \mu x_2 = b_1 x + b_2 y + b_3 \\ \mu x_3 = c_1 x + c_2 y + c_3 \end{cases}$$

und umgekehrt folgt durch Auflösung dieser Gleichungen nach  $x, y$ :

$$(45) \begin{cases} x = \frac{A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3}{A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3} \\ y = \frac{A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3}{A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3} \end{cases}$$

Man sieht daraus, daß

$$(46) A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = 0$$

die unendlich ferne Gerade der Ebene darstellt.

beiden anderen bestimmt werden. Wählen wir also drei Zahlen  $u_1, u_2, u_3$  so, daß  $u' = \frac{u_1}{u_3}, v' = \frac{u_2}{u_3}$ , so verhalten sich dieselben wie die Abstände  $\pi_i$  der Geraden  $u|v$  von den Ecken, multipliziert mit gewissen Konstanten  $\varrho_i$ , nämlich mit  $\varrho_1 = A_3, \varrho_2 = B_3, \varrho_3 = C_3$  (Nr. 80). Also gelten bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\nu$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \nu u_1 &= A_1 u + A_2 v + A_3 \\ \nu u_2 &= B_1 u + B_2 v + B_3 \\ \nu u_3 &= C_1 u + C_2 v + C_3 \end{aligned}$$

und umgekehrt folgt durch Auflösung dieser Gleichungen nach  $u, v$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3}{a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3} \\ v &= \frac{a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3}{a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3} \end{aligned}$$

(mit Rücksicht auf die Beziehungen (43)).

Man sieht daraus, daß

$$a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

die Gleichung des Nullpunkts darstellt.

In Übereinstimmung mit der früheren Definition gebrauchen wir die Bezeichnung als trimetrische oder Dreieckskoordinaten vorzugsweise für die Fälle, wo die Konstanten  $r_i$  untereinander gleich sind und ebenso die  $\varrho_i$ , wo also die linearen Funktionen in der Normalform gedacht werden.

Für den allgemeinsten Fall werden wir eine andere Bezeichnung einführen (Nr. 87).

Die Ausdrücke für  $x|y$  bez.  $u|v$  zeigen, daß durch ihre Substitution eine vollständige Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in Cartesischen bez. Plückerschen Koordinaten in eine homogene Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $x_1|x_2|x_3$ , bez.  $u_1|u_2|u_3$  übergeht. Übrigens läßt sich auch die Gleichung vereinigter Lage  $ux + vy + 1 = 0$  dazu benutzen, um aus den Substitutionen in Punktkoordinaten die in Linienkoordinaten abzuleiten, indem man in diese Gleichung für  $x$  und  $y$  die Ausdrücke (45) links einführt, alsdann mit dem Nenner  $A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3$  multipliziert und neu ordnet (vgl. Nr. 78 B. 2).

82. Die vorigen Entwicklungen begründen das wichtige *Prinzip der Dualität (Korrelation)*.<sup>18)</sup> Die analytische Geometrie entwickelt geometrische Sätze durch analytische Operationen; diese Sätze sind die geometrischen Deutungen ihrer Rechnungsergebnisse. Nach der vollständigen Analogie der beiden hier begründeten Koordinatensysteme wird überall bei Anwendung der homogenen Gleichungen jede analytische Untersuchung mit einem *Rechnungsergebnisse* wesentlich zwei geometrische Sätze liefern: der eine ist die Deutung dieses Ergebnisses nach dem System der Punktkoordinaten, der andere die Deutung desselben Ergebnisses nach dem System der Linienkoordinaten.

Wo in dem einen Satze Punkte und Geraden, Kurven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung oder Klasse, Punktreihen oder Strahlenbüschel usw. auftreten, da werden im anderen bez. Geraden und Punkte, Kurven  $n^{\text{ter}}$  Klasse oder Ordnung, Strahlenbüschel oder Punktreihen usw. erscheinen. *Jedem Satze, jedem Problem, jeder Figur entspricht so im allgemeinen ein dualistisches (duales, korrelatives) Gegenbild*, und die analytische Arbeit ist für beide nur einmal zu leisten. Geometrisch gesprochen heißt dies: *die Geometrie der Ebene kann ebensowohl auf die Gerade wie auf den Punkt als Element des Raumes gegründet werden*; die Ebene ist als Gesamtheit ihrer Punkte oder Geraden ein zwei-dimensionales Gebilde (Nr. 23), da beide Elemente Repräsentanten je zweier unabhängiger Veränderlichen sind.

Beispiele für dualistische geometrische Wahrheiten sind in dem Bisherigen schon zahlreich enthalten und werden auch im Folgenden in großer Zahl auftreten. Unmittelbar und rein prägt sich der duale Charakter in den Sätzen aus, die sich nur auf die sog. *deskriptiven (projektiven) Eigenschaften* beziehen, d. h. auf solche, die daraus entspringen, daß gewisse Punkte und gewisse Strahlen ineinander liegen. Der eine folgt aus dem anderen, wenn man die Ausdrücke „Verbindungsgerade zweier Punkte“ und „Schnittpunkt zweier Geraden“ miteinander vertauscht (Nr. 78). Sobald dagegen *metrische Eigenschaften* auftreten, d. h. Längen und Winkel dafür zu messen sind, sind die dualen Aussprüche nicht mehr so einfach und enthalten in der Regel Beziehungen der Figur zu den Fundamentelementen der Koordinaten. Legen wir in diesen Fällen nicht-homogene Koordinaten zugrunde, so ergibt sich als Grund jenes Umstandes, daß für die unendlich ferne Gerade  $(0|0)$  dualistisch der Nullpunkt eintritt. Indessen werden wir auf Grund der Entwicklungen im nächsten Kapitel später auch in diesen Beziehungen die Allgemeingültigkeit des Dualitätsprinzips erkennen.



## Fünftes Kapitel.

### Von der Projektivität und den kollinearen Gebilden.

83. **Doppelverhältnis von vier Elementen.** Sind vier Punkte  $A, B, C, D$  einer geraden Linie gegeben und bestimmt man die Teilverhältnisse

$$k_1 = \frac{AC}{CB}, \quad k_2 = \frac{AD}{DB},$$

so nennt man nach *Möbius* den Quotienten dieser beiden Verhältnisse:

$$\lambda = \frac{k_1}{k_2} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

das Doppelverhältnis  $\lambda$  der vier Punkte<sup>19)</sup>, und zwar des Punktepaares  $C, D$  zu dem Punktepaare  $A, B$ . Man bezeichnet dieses Doppelverhältnis kurz durch das Symbol

$$(1) \quad (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \lambda.$$

Offenbar bleibt  $\lambda$  unverändert, wenn man die beiden Punktepaare miteinander vertauscht, d. h. es besteht die Beziehung

$$(2) \quad \lambda = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = (CDAB).$$

Ferner ändert  $\lambda$  seinen Wert nicht, wenn man in (1) oder in (2) die beiden Punkte in beiden Paaren miteinander vertauscht, es ist daher

$$(3) \quad \lambda = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = (BADC) \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \lambda = \frac{DB}{CB} : \frac{DA}{CA} = (DCBA), \quad \text{also}$$

$$(5) \quad (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA) = \lambda.$$

Die Vertauschung der Punkte nur *eines* Paares verwandelt den Wert  $\lambda$  des Doppelverhältnisses in den reziproken Wert, es ist

$$(ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und}$$

$$(BACD) = \frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ebenso folgt  $(DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}$ , es ist somit

$$(6) \quad (ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}.$$

Bei den Gleichungen (5) und (6) sind die vier Punkte  $A, B, C, D$  in die Paare  $A, B$  und  $C, D$  getrennt. Dieser Trennung entsprechen acht Doppelverhältnisse, von denen vier den Wert  $\lambda$ , die vier übrigen den Wert  $1:\lambda$  haben. Nun ist aber auch eine Trennung der vier Punkte  $A, B, C, D$  in die Paare  $A, C$  und  $B, D$  oder in die Paare  $A, D$  und  $B, C$  möglich; die zugehörigen Doppelverhältnisse  $(ACBD)$  und  $(ADBC)$  lassen sich leicht berechnen. Aus den beiden Identitäten

$$AB + BC = AC \quad \text{und} \quad AD = AB + BD$$

folgt nämlich durch Multiplikation

$$AB \cdot AD + BC \cdot AD = AC \cdot AB + AC \cdot BD$$

und hieraus

$$AB(AD - AC) + BC \cdot AD - AC \cdot BD = 0 \quad \text{oder}$$

$$(7) \quad AB \cdot CD + BC \cdot AD - AC \cdot BD = 0.$$

Nach Division mit  $AD \cdot BC$  erhält man

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} + 1 - \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = 0 \quad \text{oder}$$

$$-\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} + 1 - \lambda = 0, \quad \text{daher}$$

$$(8) \quad -(ACBD) + 1 - \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad (ACBD) = 1 - \lambda.$$

Durch Division der Gleichung (7) mit  $BD \cdot AC$  erhält man

$$\frac{AB \cdot CD}{BD \cdot AC} + \frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC} - 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} + \frac{1}{\lambda} - 1 = 0, \quad \text{daher}$$

$$(9) \quad (ADBC) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Ähnlich wie aus (1) die Gleichungen (5) und (6) folgten, ergeben sich aus (8) und (9) die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} (ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \lambda \\ (ACDB) = (DBAC) = (CABD) = (BDCA) = 1 : (1 - \lambda) \\ (ADBC) = (BCAD) = (DACB) = (CBDA) = (\lambda - 1) : \lambda \\ (ADCB) = (CBAD) = (DABC) = (BCDA) = \lambda : (\lambda - 1). \end{cases}$$

Die Gleichungen (5), (6) und (10) zeigen, daß unter den 24 Doppelverhältnissen, die man aus den Abschnitten zwischen vier Punkten bilden kann, je vier einander gleich sind.

Vier Punkte bestimmen daher sechs verschiedene Doppelverhältniswerte; durch einen derselben  $\lambda$  sind die übrigen mitbestimmt, die sechs Werte sind nämlich

$$(11) \quad \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Deswegen dürfen wir schlechthin von dem Doppelverhältnis der vier Punkte sprechen.

Sind drei Punkte  $A, B, C$  fest gewählt, so definiert nicht nur jeder vierte Punkt  $D$  der Geraden einen Wert des Doppelverhältnisses  $(ABCD) = \lambda$ , sondern der Punkt  $D$  ist auch umgekehrt durch den Wert  $\lambda$  eindeutig bestimmt, da dann

$$BD:DA = \lambda \cdot (BC:CA) \quad (\text{Nr. 14}).$$

Das Doppelverhältnis des Punktes  $D$  bezüglich der drei Punkte  $A, B, C$  ist also gleich dem Teilverhältnis desselben bezüglich zweier  $B, A$ , multipliziert mit einer durch  $C$  bestimmten Konstanten.

Also durchläuft  $D$  die ganze Gerade, wenn  $\lambda$  der Reihe nach alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annimmt. Negativ ist der Wert des Doppelverhältnisses nur, wenn  $C$  und  $D$  durch einen der Punkte  $A$  oder  $B$  getrennt werden. Für  $\lambda = \infty$ ,  $0$ ,  $1$  fällt  $D$  bez. mit  $A, B, C$  zusammen. Der besondere Wert  $(ABCD) = -1$  ergibt die harmonische Lage der Paare  $AB, CD$ ; denn er führt zu  $AC:CB = -AD:DB$ , also zu dem Kriterium von Nr. 15. Daher heißt der allgemeine Wert  $\lambda$  auch das anharmonische Verhältnis von vier Punkten.<sup>20)</sup>

Das Doppelverhältnis von vier Punkten reduziert sich auf ein einfaches Teilverhältnis, wenn ein Punkt des zweiten der Mittelpunkt  $M$  des ersten Paares oder der unendlich ferne Punkt der Geraden ist:

$$(12) \quad (ABCM) = \frac{AC}{CB}, \quad (ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Insbesondere kann auch die Maßzahl einer Strecke als ein Doppelverhältniswert definiert werden; ist nämlich  $OE = 1$ , so ist

$$(13) \quad OA = (\infty OEA).$$

Denkt man sich die vier Punkte  $A, B, C, D$  auf einer Abszissenachse gelegen und haben sie die Abszissen

$$OA = x_1, \quad OB = x_2, \quad OC = x_3, \quad OD = x_4,$$

so ist  $AC = x_3 - x_1$ ,  $BC = x_3 - x_2$ , usw.; daher wird

$$(14) \quad (ABCD) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)},$$

und ähnlich lassen sich die übrigen Doppelverhältnisse durch  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ausdrücken.

Das Doppelverhältnis  $(ABCD)$  läßt sich auch in dem Fall leicht berechnen, wo die auf der Abszissenachse gelegenen Punkte  $A, B, C, D$  nicht durch ihre Abszissen gegeben sind, sondern durch die Teilverhältnisse  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , in denen sie die durch zwei Punkte  $O', O''$  bestimmte Strecke der Abszissenachse teilen. Für den Punkt  $A$  ist alsdann  $\lambda_1 = O'A : AO''$ , und Entsprechendes gilt für  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Haben  $O', O''$  die Abszissen  $OO' = x', OO'' = x''$ , so gelten für die oben mit  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bezeichneten Abszissen der Punkte  $A, B, C, D$  die Beziehungen (vgl. Nr. 14):

$$x_i = \frac{x' + \lambda_i x''}{1 + \lambda_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Zur Berechnung von  $(ABCD)$  sind die Werte  $x_i$  in die Gleichung (14) einzuführen; zunächst erhält man

$$x_1 - x_3 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(x' - x'')}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_3)}, \quad x_2 - x_3 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(x' - x'')}{(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)},$$

und da die Differenzen  $x_1 - x_4$  und  $x_2 - x_4$  analoge Werte haben, folgt schließlich

$$(15) \quad (ABCD) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_3 - x_4)(x_1 - x_2)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)},$$

der Wert des Doppelverhältnisses ist also völlig unabhängig von den Abszissen  $x', x''$  der zwei Punkte  $O', O''$  und drückt sich durch die Teilverhältnisse  $\lambda_i$  in derselben Weise aus wie durch die Abszissen  $x_i$ .

Wenn man fragt, in welchen Fällen unter den sechs in (11) angegebenen Werten der Doppelverhältnisse von vier Punkten gleiche Werte vorkommen, so folgt leicht, daß es drei solche Fälle gibt. Im ersten Fall ( $\lambda = 1$ ) hat man die Werte

$$1, 1, 0, \infty, 0, \infty;$$

im zweiten Fall ( $\lambda = -1$ , harmonische Lage der Paare  $A, B$  und  $C, D$ ) hat man die Werte

$$-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}.$$

Im dritten Fall ist  $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$  und zugleich  $\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ , also  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$  oder  $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}$ , wo  $i = \sqrt{-1}$ . Hier ist  $\lambda$  eine komplexe Kubikwurzel aus der negativen Einheit, denn nach Absonderung des reellen Faktors  $\lambda + 1$  aus der linken Seite der Gleichung  $\lambda^3 + 1 = 0$  bleibt  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ . Von den sechs Werten (11) des Doppelverhältnisses sind nun drei gleich der einen komplexen Kubikwurzel aus  $-1$ , die anderen drei gleich der konjugiert komplexen Wurzel. Man sagt in diesem Falle, daß sich die vier Punkte  $A, B, C, D$  in *äquianharmonischer Lage* befinden; aber diese Punkte können nun nicht sämtlich reell sein.

84. Die große Wichtigkeit des Doppelverhältnisses beruht auf dem *Satze des Pappus*<sup>21)</sup>: Wenn vier Geraden  $a, b, c, d$  eines Büschels  $O$  von einer beliebigen geraden Transversalen  $t$  in den Punkten  $A, B, C, D$  geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis  $(ABCD)$  der Reihe der vier Schnittpunkte unabhängig von der Lage der Transversale, also konstant. Man beweist diesen Satz, indem man den senkrechten Abstand  $p$  des Scheitels  $O$  von der Transversale  $t$  einführt und bemerkt, daß die Flächen der Dreiecke  $AOC, BOD, AOD, BOC$  die Gleichungen liefern

$$p \cdot AC = OA \cdot OC \cdot \sin(ac), \quad p \cdot BD = OB \cdot OD \cdot \sin(bd),$$

$$p \cdot AD = OA \cdot OD \cdot \sin(ad), \quad p \cdot BC = OB \cdot OC \cdot \sin(bc).$$

Denn aus diesen entspringen durch Multiplikation

$$p^2 \cdot AC \cdot BD = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin(ac) \cdot \sin(bd),$$

$$p^2 \cdot AD \cdot BC = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin(ad) \cdot \sin(bc),$$

und als Quotient dieser letzten

$$(16) \quad \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

wo die rechte Seite von der Lage von  $t$  unabhängig ist.

Den Quotienten der Sinusteilverhältnisse werden wir aber, da diese im Büschel überhaupt an die Stelle der Teilverhält-

nisse in der Reihe treten (vgl. Nr. 30), als das Doppelverhältnis der vier Strahlen  $a, b, c, d$  des Büschels  $O$  und mit dem früheren Symbol bezeichnen

$$(17) \quad (abcd) = \{\sin(ac) : \sin(bc)\} : \{\sin(ad) : \sin(bd)\}.$$

Je vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade vier Strahlen eines Büschels schneidet, haben das gleiche Doppelverhältnis wie diese Strahlen\*); und nach demselben Beweis: Je vier Strahlen, die einen beliebigen Punkt mit vier Punkten einer Reihe verbinden, haben das gleiche Doppelverhältnis wie diese Punkte. Bezeichnen wir das Doppelverhältnis eines über der Reihe  $A, B, C, D$  stehenden Büschels aus  $O$  mit  $(O \cdot ABCD)$  und das einer durch  $t$  aus dem Büschel  $a, b, c, d$  geschnittenen Reihe mit  $(t \cdot abcd)$ , so sind die obigen Sätze auszudrücken durch

$$(abcd) = (t \cdot abcd), \quad (ABCD) = (O \cdot ABCD).$$

Infolgedessen gelten die Sätze von Nr. 83 über das Symbol  $(ABCD)$  auch von  $(abcd)$ , nur ist bei den besonderen Fällen statt des unendlich fernen Punktes der rechte Winkel einzuführen. Unter der Voraussetzung

$$\sphericalangle(ab) = (xy) = \frac{1}{2}\pi$$

geht das Doppelverhältnis in das einfache Tangentenverhältnis

$$(xycd) = \frac{\operatorname{tg}(xc)}{\operatorname{tg}(xd)} = \frac{\cot(yc)}{\cot(yd)}$$

über, und ist  $d$  die Halbierungslinie  $h$  des rechten Winkels, also  $\operatorname{tg}(xh) = 1$ , so ist die Winkelmessung zu gründen auf

$$(xych) = \operatorname{tg}(xc) = \cot(yc).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes dieser Nummer kann man zu drei Punkten  $A, B, C$  einer Reihe oder zu drei Strahlen  $a, b, c$  eines Büschels den Punkt  $D$  oder den Strahl  $d$  bestimmen, der mit jenen ein gegebenes Doppelverhältnis  $\lambda$  bildet. Schneidet man das gegebene oder über der Reihe  $ABC$  gebildete Büschel  $abc$  mit einer durch  $A$  parallel zu  $c$

\*) Für harmonische Gruppen ist dieser Satz schon in Nr. 60 abgeleitet.

gezogenen Geraden in  $A, B', \infty$ , so ist  $D'$  als Schnittpunkt mit  $d$ , wegen

$$\lambda = (abcd) = (AB' \infty D') = B'D' : AD',$$

durch sein Teilverhältnis  $-\lambda = B'D' : D'A$  auf jener Parallelen gegeben.

85. In Nr. 83 wurde das Doppelverhältnis von vier auf der Abszissenachse gelegenen Punkten  $A, B, C, D$  berechnet, und zwar waren diese Punkte durch die Teilverhältnisse  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) gegeben, in denen sie die durch zwei Punkte  $O', O''$  bestimmte Strecke der Abszissenachse teilen. Es ergab sich für das Doppelverhältnis der Wert

$$(18) \quad (ABCD) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

Sind nun vier Punkte  $A, B, C, D$  auf einer beliebigen Geraden  $O'O''$  gelegen und haben  $O', O''$  die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten  $x', y'$  bez.  $x'', y''$ , die Punkte  $A, B, C, D$  die Koordinaten

$$x_i = \frac{x' + \lambda_i x''}{1 + \lambda_i}, \quad y_i = \frac{y' + \lambda_i y''}{1 + \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so hat das Doppelverhältnis  $(ABCD)$  wieder den in Gleichung (18) angegebenen Wert. Dies ist selbstverständlich, denn der Ausdruck (18) hängt nur von den Teilverhältnissen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  ab; ob die vier Punkte auf der Abszissenachse oder auf einer beliebigen Geraden liegen, ist daher gleichgültig. Außerdem folgt die erwähnte Tatsache aus dem Satze von

*Pappus*, wenn man die Punkte  $A, B, C, D$  durch Parallelen zur  $y$ -Achse auf die Abszissenachse projiziert, denn nach diesem Satze haben die Projektionen  $A_1, B_1, C_1, D_1$  dasselbe Doppelverhältnis wie  $A, B, C, D$  (Fig. 48).

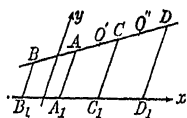


Fig. 48.

Die beiden Punkte  $O', O''$  seien nun durch ihre Gleichungen  $\Sigma' = 0, \Sigma'' = 0$  gegeben, wobei die Symbole  $\Sigma', \Sigma''$  die Abkürzungen

$$\Sigma' \equiv \alpha' u + \beta' v + \gamma', \quad \Sigma'' \equiv \alpha'' u + \beta'' v + \gamma''$$

bedeuten. Alsdann haben die vier Punkte  $A, B, C, D$  der Geraden  $O'O''$  der Reihe nach Gleichungen von der Form

$$\Sigma' - k_i \Sigma'' = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und wir behaupten, daß das Doppelverhältnis  $(ABCD)$  nun durch

$$(19) \quad (ABCD) = \frac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_4)}{(k_2 - k_3)(k_1 - k_4)}$$

gegeben ist.

Zum Beweis sei daran erinnert, daß die Größe  $k_i$  nach S. 148 dem Teilverhältnis proportional ist, in dem der betreffende Punkt die Strecke  $O'O''$  teilt; es ist z. B.\*)

$$(20) \quad k_1 = -\frac{O'A}{AO''} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

und wenn man wieder wie oben (S. 159) das Verhältnis  $O'A : AO''$  gleich  $\lambda_1$  setzt, erhält man

$$k_1 = -\lambda_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \lambda_1 = -\frac{k_1 \gamma_2}{\gamma_1}.$$

Analog folgt für die Punkte  $B, C, D$ :

$$\lambda_2 = -\frac{k_2 \gamma_2}{\gamma_1}, \quad \lambda_3 = -\frac{k_3 \gamma_2}{\gamma_1}, \quad \lambda_4 = -\frac{k_4 \gamma_2}{\gamma_1}.$$

Bei Einführung dieser Werte in den Ausdruck (18), der, wie wir sahen, auch für das Doppelverhältnis von vier Punkten einer beliebigen Geraden gilt, hebt sich  $\gamma_2 : \gamma_1$  weg und man erhält die Gleichung (19).

Wir bestimmen nun noch das Doppelverhältnis von vier Strahlen  $a, b, c, d$  eines Büschels, die der Reihe nach durch ihre Gleichungen

$$(21) \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_1 - kS_2 = 0, \quad S_1 - lS_2 = 0$$

gegeben sind, wobei die Symbole  $S_1, S_2$  die Abkürzungen

$$S_1 \equiv a_1 x + a_2 y + a_3, \quad S_2 \equiv b_1 x + b_2 y + b_3$$

bedeuten.

Nach (4), S. 121, ist nun

$$k = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{b_1^2 + b_2^2}}, \quad l = \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{b_1^2 + b_2^2}},$$

\*) An Stelle der Größen  $\lambda, s_1, s_2$  auf S. 148 stehen in Gleichung (20) der Reihe nach die Größen  $k_1, O'A, O''A$ .



daher hat das Doppelverhältnis der vier durch (21) gegebenen Strahlen  $a, b, c, d$  den Wert

$$(22) \quad (abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = k : l.$$

Haben ferner die vier Strahlen  $a, b, c, d$  die Gleichungen  $S' - k_1 S'' = 0$ ,  $S' - k_2 S'' = 0$ ,  $S' - k_3 S'' = 0$ ,  $S' - k_4 S'' = 0$ , wo  $S', S''$  wieder Symbole für lineare Ausdrücke in  $x, y$  sind, so hat das Doppelverhältnis  $(abcd)$  den Wert

$$(23) \quad (abcd) = \frac{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)}{(k_2 - k_3)(k_1 - k_4)}.$$

Zum Beweis führt man zunächst die Abkürzungen ein:

$$S_1 \equiv S' - k_1 S'', \quad S_2 \equiv S' - k_2 S'';$$

alsdann müssen die Gleichungen  $S' - k_3 S'' = 0$  und  $S' - k_4 S'' = 0$  der Strahlen  $c$  und  $d$  in die Form  $S_1 - k S_2 = 0$  und  $S_1 - l S_2 = 0$  gebracht werden können, weil die Strahlen  $c$  und  $d$  mit  $a$  und  $b$  einem und demselben Büschel angehören, und der Quotient  $k:l$  ist alsdann nach dem soeben bewiesenen Satze der Wert des Doppelverhältnisses  $(abcd)$ . In der Tat ist

$$\begin{aligned} S_1 - k S_2 &\equiv S' - k_1 S'' - k(S' - k_2 S'') \\ &\equiv (1 - k)S' - (k_1 - k k_2)S'' \\ &\equiv (1 - k) \left\{ S' - \frac{k_1 - k k_2}{1 - k} S'' \right\}; \end{aligned}$$

die Gleichung  $S_1 - k S_2 = 0$  ist daher gleichbedeutend mit  $S' - \frac{k_1 - k k_2}{1 - k} S'' = 0$ , und wenn jede dieser Gleichungen den Strahl  $c$  darstellen soll, muß  $(k_1 - k k_2) : (1 - k) = k_3$  sein, also

$$k = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3}.$$

In derselben Weise findet man bei dem Strahl  $d$  für den oben mit  $l$  bezeichneten Parameter den Wert

$$l = \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4},$$

so daß für das Doppelverhältnis  $(abcd) = k:l$  der in (23) angegebene Wert hervorgeht.

**86. Projektive Büschel und Reihen.** Schneidet man ein Strahlenbüschel  $a, b, c, d, \dots$  vom Scheitel  $O$  mit Transversalen  $t$  und  $t'$  in  $A, B, C, D, \dots$  und  $A', B', C', D', \dots$  so heißen

diese Punktreihen perspektiv für das Zentrum  $O$ . Jede ist die Zentralprojektion der anderen aus  $O$ , und zwei Punkte  $P, P'$  der Reihen sind *entsprechende Punkte*, wenn ihre Verbindungsgerade  $PP'$  durch das Zentrum  $O$  geht. Die dualistischen Begriffsbildungen lauten: Projiziert man eine Punktreihe  $A, B, C, D, \dots$  vom Träger  $t$  durch Strahlen  $a, b, c, d, \dots$  und  $a', b', c', d', \dots$  aus den Punkten  $O$  und  $O'$ , so heißen diese *Strahlenbüschel perspektiv für die Achse  $t$* , und zwei Strahlen  $p, p'$  der Büschel sind *entsprechende Strahlen* derselben, wenn ihr Schnittpunkt  $pp'$  auf der Achse  $t$  liegt.\*) Endlich heißen in beiden Fällen auch das Büschel  $a, b, c, d, \dots$  und die Reihe  $A, B, C, D, \dots$  perspektiv. Nun folgt aus Nr. 84 ferner

$$(t \cdot abcd) = (t' \cdot abcd), (O \cdot ABCD) = (O' \cdot ABCD),$$

d. h. in perspektiven Reihen und Büscheln haben je vier entsprechende Elemente dasselbe Doppelverhältnis.

Daher haben auch noch in drei Reihen (bez. Büscheln)  $A, B, C, D, \dots; A', B', C', D', \dots; A'', B'', C'', D'', \dots$ , von denen zwei zur dritten Reihe (bez. zum dritten Büschel) zugleich perspektiv sind (Fig. 49), je vier entsprechende Elemente dasselbe Doppelverhältnis,

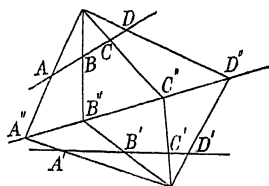
$$(ABCD) = (A''B''C''D'') = (A'B'C'D'),$$


Fig. 49.

obwohl die Reihen  $A, B, C, D, \dots; A', B', C', D', \dots$  im allgemeinen nicht auch zueinander perspektiv sind. Umgekehrt können wir aber, wenn in zwei Reihen oder Büscheln drei Paare von Elementen  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  einander entsprechen, zu jedem Element  $D$  des einen Gebildes ein einziges entsprechendes  $D'$  des anderen so finden, daß die Doppelverhältnisse  $(ABCD)$  und  $(A'B'C'D')$  gleich sind. Reihen, bez. Büschel, deren Elemente einander eindeutig so zugeordnet sind, daß das Doppelverhältnis von je vier entsprechenden gleich ist, heißen *projektive Elementargebilde erster Stufe*. Man nennt projektive Reihen, bez. Büschel auch *kollinear (homographisch)* und entsprechende Elemente *homolog*. In solchen

\*) Solche perspektive Gebilde liegen schon in Nr. 50, 51, 67 vor.

projektiven Gebilden sind nach der Definition die homologen zu vier harmonischen Elementen ebenfalls in harmonischer Lage, doch geht die Halbierung einer Strecke oder eines Winkels in die allgemeinere harmonische Teilung über.

Die Definition zeigt, daß projektive Gebilde durch drei Paare homologer Elemente eindeutig bestimmt sind. Daher sind projektive Gebilde insbesondere perspektiv, sobald ihr gemeinsames Element mit sich selbst homolog oder ihnen entsprechend gemein ist. Denn

<p>entspricht in zwei Reihen <math>A, B, C, \dots, A, B', C', \dots</math> der Schnittpunkt <math>A</math> ihrer Träger sich selbst, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Paare <math>BB', CC'</math> in <math>O</math> so, daß wegen</p> <p><math>(O \cdot ABCD) = (O \cdot AB'C'D')</math></p> <p>auch <math>DD'</math> durch <math>O</math> geht.</p>	<p>entspricht in zwei Büscheln <math>a, b, c, \dots, a, b', c', \dots</math> die Verbindungsgerade <math>a</math> ihrer Scheitel sich selbst, so werden die Schnittpunkte zweier Strahlenpaare <math>bb', cc'</math> in <math>t</math> so verbunden, daß wegen</p> <p><math>(t \cdot abcd) = (t \cdot ab'c'd')</math></p> <p>auch <math>dd'</math> auf <math>t</math> liegt.</p>
--	--

Somit können zwei projektive Gebilde stets durch bloße Lagenänderung des einen zueinander perspektiv gemacht werden, denn dazu ist nur ein Element mit seinem homologen zur Deckung zu bringen.

Der analytische Ausdruck für projektive Gebilde gestaltet sich sehr einfach. Da die Gleichheit der Doppelverhältnisse nur eine Beziehung zwischen den Parametern sein kann (Nr. 85), so sind die Büschel  $S_1 - kS_2 = 0$ ,  $S'_1 - kS'_2 = 0$  und die Reihen  $\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0$ ,  $\Sigma'_1 - k\Sigma'_2 = 0$  projektiv, wenn homologe Elemente zu demselben Parameterwert gehören. Dabei ist also gleichgültig, wie die Träger und die festen Elementenpaare gewählt wurden, doch sind alsdann diese offenbar in den Paaren  $S_1, S'_1$ ;  $S_2, S'_2$ ;  $\Sigma_1, \Sigma'_1$ ;  $\Sigma_2, \Sigma'_2$  selbst homolog. Insbesondere können perspektive Gebilde, wenn ihr entsprechend gemeinsames Element  $S = 0$ , bez.  $\Sigma = 0$  ist, stets durch die Gleichungspaare  $S_1 - kS = 0$ ,  $S'_1 - kS = 0$ , bez.  $\Sigma_1 - k\Sigma = 0$ ,  $\Sigma'_1 - k\Sigma = 0$  dargestellt werden. Als dann ist offenbar  $S_1 - S'_1 = 0$  die perspektive Achse, bez.  $\Sigma_1 - \Sigma'_1 = 0$  das perspektive Zentrum. Selbstverständlich sind auch das Büschel

$S_1 - kS_2 = 0$  und die Reihe  $\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0$  durch die Parametergleichheit projektiv aufeinander bezogen.

Schließlich sei bemerkt, daß diese Zuordnung durch gleiche Parameter in bezug auf zwei feste Elementenpaare in der Tat die Angabe eines dritten implizite voraussetzt. Denn  $S_1, S_2, S'_1, S'_2$  sind nur bis auf konstante Faktoren bekannt und erst, wenn noch  $S_3 = 0, S'_3 = 0$  homologe Elemente sein sollen, werden jene Faktoren durch die Identitäten  $S_3 \equiv S_1 - kS_2, S'_3 \equiv S'_1 - kS'_2$  bestimmt.

**87. Projektive Koordinaten.** In der geraden Punktreihe und im Strahlenbüschel können wir jedes Element durch sein Doppelverhältnis in bezug auf drei feste Elemente bestimmen. Offenbar genügt in der Ebene eine zweimalige Anwendung dieses neuen Koordinatenprinzips, um einen Punkt  $P$  zu bestimmen als Schnittpunkt der zu gegebenen Doppelverhältnisswerten gehörigen vierten Strahlen in zwei Büscheln, und eine Gerade  $p$  als Verbindungslinie in gleicher Weise bestimmter vierten Punkte in zwei Reihen. Wir können so völlig allgemeine und rein dualistische Systeme homogener Koordinaten  $x_i$  und  $u_i$  direkt geometrisch begründen, die wir wegen der grundlegenden Bedeutung des Doppelverhältnisses für die Projektivität *projektive Koordinaten* nennen.<sup>23)</sup> Auch der Name Dreieckskoordinaten oder trimetrische Koordinaten ist gebräuchlich, da, wie wir sofort sehen werden, ein festes Dreieck die Basis dieser Koordinaten bildet. Sie sind eine Verallgemeinerung der schon früher (in Nr. 70 und 80) betrachteten trimetrischen Punkt- und Linienkoordinaten.

Nehmen wir vier feste Punkte  $A_1, A_2, A_3, E$  an, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so bestimmen die Verbindungsgeraden jedes Punktes  $A_i$  mit den drei übrigen und einem beliebigen Punkt  $P$  Büschel mit drei festen Strahlen. Also sind die Strahlen  $A_1P, A_2P, A_3P$ , und damit  $P$  als

Nehmen wir vier feste Geraden  $a_1, a_2, a_3, e$  an, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so bestimmen die Schnittpunkte jeder Geraden  $a_i$  mit den drei übrigen und einer beliebigen Geraden  $p$  Reihen mit drei festen Punkten. Also sind die Punkte  $a_1p, a_2p, a_3p$ , und damit  $p$  als ihre Verbin-

ihr Schnittpunkt, durch die Doppelverhältnisse bestimmt

$$(25) \begin{aligned} (A_1 \cdot A_2 A_3 EP) &= m_1, \\ (A_2 \cdot A_3 A_1 EP) &= m_2, \\ (A_3 \cdot A_1 A_2 EP) &= m_3. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch  $e_i$  und  $p_i$  die Abstände der Punkte  $E$  und  $P$  von den Geraden  $A_j A_k$  (Fig. 50), gemessen in ihren Normalen oder in Schiefen gleicher Neigung, so sind die Werte der Doppelverhältnisse

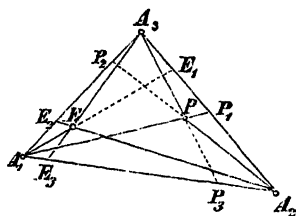


Fig. 50.

$$(26) \begin{aligned} m_1 &= \frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3}, \\ m_2 &= \frac{e_1}{e_3} : \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1}, \\ m_3 &= \frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} \end{aligned}$$

und wir finden  $m_1 m_2 m_3 = 1$ . Setzt man mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors  $\varrho$

$$(27) \quad \varrho x_i = p_i : e_i,$$

so sind  $x_1, x_2, x_3$  drei algebraische Zahlen, deren Verhältnisse  $x_j : x_k = m_i$  jene Doppelverhältnisse bestimmen und daher aus den festen Punkten den Punkt  $P$  zu konstruieren erlauben (Nr. 84).

dungsgerade, durch die Doppelverhältnisse bestimmt

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot a_2 a_3 ep) &= \mu_1, \\ (a_2 \cdot a_3 a_1 ep) &= \mu_2, \\ (a_3 \cdot a_1 a_2 ep) &= \mu_3. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch  $\varepsilon_i$  und  $\pi_i$  die Abstände der Geraden  $e$  und  $p$  von den Punkten  $a_j a_k$  (Fig. 51), gemessen in ihren Normalen oder in Schiefen gleicher Neigung, so sind die Werte der Doppelverhältnisse

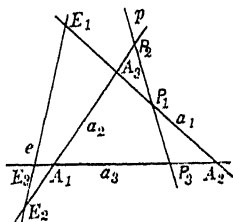


Fig. 51.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3}, \\ \mu_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1}, \\ \mu_3 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} \end{aligned}$$

und wir finden  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$ . Setzt man mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors  $\sigma$

$$\sigma u_i = \pi_i : \varepsilon_i,$$

so sind  $u_1, u_2, u_3$  drei algebraische Zahlen, deren Verhältnisse  $u_j : u_k = \mu_i$  jene Doppelverhältnisse bestimmen und daher aus den festen Geraden die Gerade  $p$  zu konstruieren erlauben (Nr. 84).

Wir nennen die Zahlen  $x_i$  die trimetrischen Punktkoordinaten, Dreieckskoordinaten oder projektiven Koordinaten des Punktes  $P$ ; erst ihre Verhältnisse sind völlig bestimmt.

Fällt  $P$  nach  $E$ , so hat man

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1,$$

und wir bezeichnen daher  $E$  als den *Einheitspunkt*, die  $A_i$  als die Fundamentalpunkte des projektiven Koordinatensystems der  $x_i$ , das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  als das Fundamentaldreieck (Koordinatendreieck).

Die Ecke  $A_i$  hat die Koordinaten  $x_j = x_k = 0$  und  $\varrho x_i = h_i : e_i$  für  $h_i$  als die zugehörige Höhe des Fundamentaldreiecks;  $\varrho$  ist ein Proportionalitätsfaktor.

Für die Punkte der Fundamentalgeraden  $A_j A_k$  ist  $x_i = 0$ .

Damit ergeben sich auch die *Vorzeichen der Quotienten*  $p_i : e_i$  und  $\pi_i : \varepsilon_i$  für die Punkte und Geraden der Ebene nach der Wahl der Einheitspunkte aus ihrer Lage in bezug auf die Fundamentelemente (vgl. Nr. 3).

Wenn z. B. der Einheitspunkt *im Inneren* des Fundamentaldreiecks liegt, so haben alle Punkte dieses Inneren drei positive Quotienten  $p_i : e_i$ .

Tritt  $P$  über die Seite  $a_i$  aus dem Inneren heraus, so wird  $\varrho x_i$  negativ.

Wir nennen die Zahlen  $u_i$  die trimetrischen Linienkoordinaten, Dreieckskoordinaten oder projektiven Koordinaten der Geraden  $p$ ; erst ihre Verhältnisse sind völlig bestimmt.

Liegt  $p$  in  $e$ , so hat man

$$u_1 : u_2 : u_3 = 1,$$

und wir bezeichnen daher  $e$  als die *Einheitslinie*, die  $a_i$  als die Fundamentallinien des projektiven Koordinatensystems der  $u_i$ , das durch die Geraden  $a_1, a_2, a_3$  gebildete Dreieck als Fundamentaldreieck (Koordinatendreieck).

Die Seite  $a_i$  hat die Koordinaten  $u_j = u_k = 0$  und  $\sigma u_i = h_i : \varepsilon_i$  für  $h_i$  als zugehörige Höhe des Fundamentaldreiecks;  $\sigma$  ist ein Proportionalitätsfaktor.

Für die Geraden durch den Fundamentalpunkt  $a_j a_k$  ist  $u_i = 0$ .

Wenn die Einheitslinie *nicht in das Innere* des Fundamentaldreiecks hineingeht, so haben alle Geraden, die dies nicht tun, drei positive Quotienten  $\pi_i : \varepsilon_i$ .

Tritt  $p$  über die Ecke  $A_i$  in das Innere hinein, so wird  $\sigma u_i$  negativ.

Nun vereinigen wir das Dreieck der Fundamentalpunkte mit dem Dreieck der Fundamentallinien derart, daß der Ecke  $A_i$  die Seite  $a_i$  gegenüberliegt. Seien dann  $E_i$  und  $P_i$  die Schnittpunkte von  $a_i$  mit  $A_iE$  und  $A_iP$ , ferner  $E_i$  und  $P_i$  die Schnittpunkte  $a_ie$  und  $a_ip$  (Fig. 52). Dann lauten (Nr. 84) die Koordinatendefinitionen auch

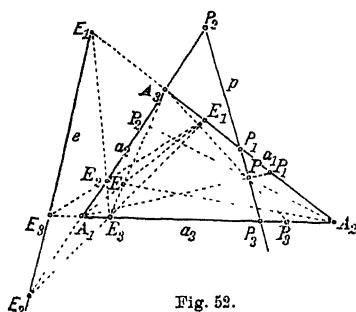


Fig. 52.

$$(28) \quad \frac{x_2}{x_3} = (A_2 A_3 E_1 P_1), \quad \frac{x_3}{x_1} = (A_3 A_1 E_2 P_2), \quad \frac{x_1}{x_2} = (A_1 A_2 E_3 P_3);$$

$$(29) \quad \frac{u_2}{u_3} = (A_3 A_2 E_1 P_1), \quad \frac{u_3}{u_1} = (A_1 A_3 E_2 P_2), \quad \frac{u_1}{u_2} = (A_2 A_1 E_3 P_3).$$

Zur Bestimmung der Lage von  $E$  gegen  $e$  können wir aber offenbar setzen

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = (A_2 A_3 E_1 E_1), \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = (A_3 A_1 E_2 E_2), \quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (A_1 A_2 E_3 E_3),$$

denn die Teilverhältnisse der  $E_i$ , bez. der  $E_i$  in den Seiten haben (Nr. 54) das Produkt  $+1$ , bez.  $-1$ , so daß das Produkt der drei Doppelverhältnisse  $-1$  sein muß.

Die Multiplikation der untereinander stehenden Ausdrücke ergibt wegen

$$(A_j A_k E_i P_i) (A_j A_k E_i E_i) (A_k A_j E_i P_i) = (A_j A_k P_i P_i)$$

die drei Gleichungen

$$-\frac{\lambda_2 u_2 x_2}{\lambda_3 u_3 x_3} = (A_2 A_3 P_1 P_1), \quad -\frac{\lambda_3 u_3 x_3}{\lambda_1 u_1 x_1} = (A_3 A_1 P_2 P_2), \\ -\frac{\lambda_1 u_1 x_1}{\lambda_2 u_2 x_2} = (A_1 A_2 P_3 P_3).$$

Wir betrachten weiter das Paar — eines von drei analogen —

$$(30) \quad -\frac{\lambda_2 u_2 x_2}{\lambda_3 u_3 x_3} = (A_2 A_3 P_1 P_1), \quad -\frac{\lambda_1 u_1 x_1}{\lambda_3 u_3 x_3} = (A_3 A_1 P_2 P_2).$$

Unter der besonderen Voraussetzung, daß  $P$  in  $p$  liegt, wie in der Figur, ist

$$(31) \quad (A_2 A_3 P_1 P_1) + (A_3 A_1 P_2 P_2) = 1.$$

Denn (Nr. 84)  $(A_3 A_1 P_2 P_3) = (P \cdot A_3 A_1 P_2 P_3) = (P \cdot A_3 P_1 A_2 P_1) = (A_3 P_1 A_2 P_1) = (A_2 P_1 A_3 P_1)$ , und nach Gleichung (8) in Nr. 83 ist

$$(A_2 A_3 P_1 P_1) + (A_2 P_1 A_3 P_1) = 1.$$

Liegt also  $P$  in  $p$  oder geht  $p$  durch  $P$ , so besteht nach (31) mit Rücksicht auf (30) zwischen den Koordinaten  $x_i$  von  $P$  und  $u_i$  von  $p$  die *Bedingung des Ineinanderliegens*

$$(32) \quad \lambda_1 u_1 x_1 + \lambda_2 u_2 x_2 + \lambda_3 u_3 x_3 = 0,$$

wo die Konstanten  $\lambda_i$  nur von der Lage des Einheitspunktes und der Einheitslinie abhängig sind. Diese Konstanten werden einander gleich, also ihre Verhältnisse gleich Eins, wenn  $e$  die *Harmonikale* von  $E$  in bezug auf das Fundamentaldreieck ist (Nr. 67,1); diese Wahl soll weiterhin stets vorausgesetzt sein. Dann ist

$$(33) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

bei konstanten  $u_i$  die Gleichung in Punktkoordinaten für die Gerade mit den Koordinaten  $u_i$ , und bei konstanten  $x_i$  die Gleichung in Linienkoordinaten für den Punkt mit den Koordinaten  $x_i$ .

88. Diese auf den Begriff des Doppelverhältnisses gestützte Auffassung der allgemeinen homogenen Koordinatenbestimmung ist ihrem Ergebnis nach von der in Nr. 81 nicht verschieden. Offenbar stimmen die  $x_i$  bez.  $u_i$  hier und dort überein, sobald wir die Reziproken der Abstände  $e_i$  bez.  $\varepsilon_i$  als die in jener Entwicklung auftretenden Konstanten  $r_i$  bez.  $\varrho_i$  ansehen, mit denen die Abstände  $p_i$  bez.  $\pi_i$  zu multiplizieren waren.

Das durch das Fundamentaldreieck und die Einheitsselemente definierte Koordinatensystem umfaßt eine große Anzahl wichtiger besonderer Fälle. Lassen wir das Dreieck der  $A_i$  allgemein, so können wir als  $E$  einen der besonderen Punkte desselben wählen und dadurch oft Vereinfachungen der Untersuchung erzielen. So erhalten wir nach der obigen Bemerkung die *Normalkoordinaten* von Nr. 70, d. h. die  $x_i$  proportional den Abständen des Punktes von den Fundamentallinien  $\alpha_i$ , sobald wir die  $e_i$  einander gleich annehmen, also zum *Einheitspunkt* den *Mittelpunkt* des eingeschriebenen Kreises wählen.



Jedoch sind dann nicht auch ohne weiteres die  $u_i$  die *trimetrischen Linienkoordinaten* von Nr. 80, wenn die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

gelten soll. Dazu müssen vielmehr die  $\varepsilon_i$  gleich groß sein, und dies kann nur eintreten, wenn die *unendlich ferne Gerade* die *Einheitslinie*  $e$  ist; in der Tat sind dann die Verhältnisse der  $u_i$  gleich denen der Abstände  $\pi_i$  der Geraden von den Fundamentalpunkten  $A_i$ . In diesem Falle ist aber die Einheitslinie, also die unendlich ferne Gerade, nicht die Harmonikale des Einheitspunktes.

Die unendlich ferne Gerade gehört vielmehr als Harmonikale zum *Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks als Einheitspunkt*. Dann sind die  $e_i = \frac{1}{3} h_i$ , und die  $x_i$  können als Zahlen aufgefaßt werden, die zu den Flächeninhalten der Dreiecke  $A_j A_k P$  proportional sind; denn es ist, wegen

$$(34) \quad \varrho x_i = p_i : \frac{1}{3} h_i = \triangle A_j A_k P : \frac{1}{3} \triangle A_1 A_2 A_3,$$

$$(35) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \triangle A_2 A_3 P : \triangle A_3 A_1 P : \triangle A_1 A_2 P.$$

Daher kann man diese Koordinaten, die öfter vorteilhaft zu verwenden sind, als *Flächenkoordinaten des Punktes* bezeichnen. Sie heißen auch *baryzentrische Koordinaten*; man kann bei ihrer Anwendung die  $x_1, x_2, x_3$  als Ausdrücke für Massen ansehen, die in den Ecken des Fundamentaldreiecks anzubringen sind, wenn der Punkt  $x_1 | x_2 | x_3$  in den Schwerpunkt des Dreiecks fallen soll.

Man findet leicht, daß die *unendlich ferne Gerade* als Harmonikale des Schwerpunktes des Fundamentaldreiecks bei *beliebiger Lage des Einheitspunktes E* die Gleichung hat

$$(36) \quad \frac{e_1}{h_1} x_1 + \frac{e_2}{h_2} x_2 + \frac{e_3}{h_3} x_3 = 0.$$

Weitere wichtige besondere Fälle liefert die *Annahme unendlich ferner Fundamentelemente*. Wird eine Ecke des Dreiecks, z. B.  $A_3$ , als unendlich fern gedacht, so erhält man die einfachen Teilverhältnisse

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{A_1 E_2}{A_1 P_2}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{A_2 E_1}{A_2 P_1}, \quad \frac{u_1}{u_3} = \frac{A_1 P_2}{A_1 E_2}, \quad \frac{u_2}{u_3} = \frac{A_2 P_1}{A_2 E_1}.$$

Ist ferner  $E$  äquidistant von den parallelen Fundamental-  
linien, somit  $e$  parallel zur dritten (Fig. 53), so lauten, mit  
 $A_1 E_2 = A_2 E_1 = -A_1 E_3 = -A_2 E_1 = 1$ , die  
Definitionen der Koordinaten

$$(37) \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{A_1 P_2} = X, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{A_2 P_1} = Y,$$

$$(38) \quad \frac{u_1}{u_3} = -A_1 P_2 = U, \quad \frac{u_2}{u_3} = -A_2 P_1 = V.$$

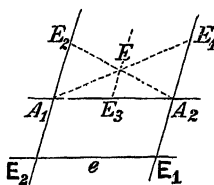


Fig. 53.

Endlich liegen der Punkt  $X|Y$  und die Gerade  $U|V$  vereinigt,  
wenn

$$(39) \quad UX + VY + 1 = 0$$

ist. Wir können diese nicht-homogenen Koordinaten etwa  
*Streifenkoordinaten* nennen und insbesondere den Fundamental-  
streifen rechtwinklig und auch  $A_1 E_3 = E_3 A_2 = 1$  nehmen.

Denken wir aber eine *Seite* des Fundamentaldreiecks, z. B.  
 $A_1 A_2$  oder  $a_3$ , unendlich fern, so daß  $PP_1$ ,  $EE_1$  und  $PP_2$ ,  
 $EE_2$  zu  $a_2$ , bez.  $a_1$  parallel sind, so folgt für die Punktkoor-  
dinaten

$$\frac{x_1}{x_3} = (\infty A_3 E_2 P_2) = \frac{A_3 P_2}{A_3 E_2}, \quad \frac{x_2}{x_3} = (\infty A_3 E_1 P_1) = \frac{A_3 P_1}{A_3 E_1}.$$

Nehmen wir  $A_3 E_1 = A_3 E_2 = 1$  als Längeneinheit, also  $E$  in einer  
Halbierungslinie des Winkels  $(a_1 a_2)$ , so sind  $x_1 : x_3 = A_3 P_2 = x$ ,  
 $x_2 : x_3 = A_3 P_1 = y$  Abszisse und Ordinate von  $P$  in einem System  
von Cartesischen Koordinaten (vgl. Nr. 76). Und ist  $e$  die  
Harmonikale von  $E$ , also  $A_3 E_1 = A_3 E_2 = -1$ , so haben wir  
für die Linienkoordinaten

$$\frac{u_1}{u_3} = (A_3 \infty E_2 P_2) = \frac{-1}{A_3 P_2}, \quad \frac{u_2}{u_3} = (A_3 \infty E_1 P_1) = \frac{-1}{A_3 P_1}.$$

Somit hat man  $u_1 : u_3 = u$ ,  $u_2 : u_3 = v$  als die Plückerschen  
Linienkoordinaten (Nr. 78). Damit wird der Übergang von  
homogenen zu elementaren Koordinaten (Nr. 76) klar und es  
erhellet, daß die Wahl der Längeneinheit und des positiven  
Sinnes in den Achsen die Bestimmung des Einheitspunktes  
und der Einheitsgeraden elementar vertritt.

Man erkennt nun leicht, wie die Achsenkoordinaten und  
die Streifenkoordinaten dualistisch entsprechende, metrische  
Sonderfälle sind. Diese letzten sind übrigens, wenn man die

Achsen durch die beiden Parallelen ersetzt, die Reziproken der Cartesischen und Plückerschen Koordinaten. Als gleichbedeutend mit den Doppelverhältnisswerten  $\frac{x_3}{x_1}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{u_3}{u_1}, \frac{u_2}{u_3}, \frac{u_2}{u_1}$  von Nr. 87 liefern uns die allgemeinen Definitionen  $\frac{1}{x}, y, \frac{y}{x}; \frac{1}{u}, v, \frac{v}{u}$ , bez.  $\frac{1}{X}, Y, \frac{Y}{X}; \frac{1}{U}, V, \frac{V}{U}$ , womit z. B. das bedeutsame Auftreten der Richtungskoeffizienten neben den Koordinaten erklärt ist.

B. 1) Wiederholt man die Untersuchungen in Beispiel 1 von Nr. 67 unter der Annahme, daß  $ABC$  das Koordinatendreieck ist und der Einheitspunkt sich in  $O$  befindet, so sind  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  zu setzen.

2) Zieht man durch die Schnittpunkte der Fundamentallinien  $a_i$  mit der Einheitslinie  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  Geraden  $a'_i$ , so haben diese die Gleichungen

$$(1 + \lambda_1)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + (1 + \lambda_2)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda_3)x_3 = 0.$$

Somit haben die Verbindungsgeraden  $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$  die Gleichungen  $\lambda_2x_2 = \lambda_3x_3, \lambda_3x_3 = \lambda_1x_1, \lambda_1x_1 = \lambda_2x_2$ ; diese Geraden schneiden sich also in einem Punkte  $S$ , und zwar ist für diesen  $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} : \frac{1}{\lambda_3}$ . Je zwei Ecken  $A_i, A'_i$  bilden mit  $S$  und dem Schnittpunkt von  $A_iA'_i$  mit der Einheitslinie  $e$  das Doppelverhältnis  $\frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}}$ . (Vgl. Nr. 67, 4.)

3) Die Flächenkoordinaten sind für den Höhenschnittpunkt  $\operatorname{tg} A_1 : \operatorname{tg} A_2 : \operatorname{tg} A_3$ , für den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises  $\sin 2A_1 : \sin 2A_2 : \sin 2A_3$ , für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises  $l_1 : l_2 : l_3$ , wo  $l_1, l_2, l_3$  die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten. Dabei ist  $l_1 : l_2 : l_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3$ .

89. Das bisherige empfiehlt offenbar, als das zweckmäßigste Bezeichnungsprinzip für die in den analytisch-geometrischen Untersuchungen auftretenden Konstanten und Veränderlichen, gleichartigen Größen denselben Buchstaben als gemeinsames Symbol beizulegen und die einzelnen durch hinzugefügte Indizes zu unterscheiden. Alsdann lassen sich homogene Ausdrücke allgemeiner Art, bezogen auf willkürlich

gewählte Fundamentelemente, schon durch ein einzelnes Glied völlig charakterisieren, da sie gewissen Symmetriegesetzen unterliegen (vgl. Nr. 48). So gehen in Ausdrücken, die in bezug auf jede Reihe gleichartiger Größen linear sind, die Glieder durch zyklische Permutation aller Indizes auseinander hervor (vgl. S. 71 Anm.). Wir bezeichnen eine derartige dreigliedrige Summe dadurch, daß wir  $\Sigma$  vor ihr allgemeines Glied setzen. So ist  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$  gleich  $\Sigma a_ix_i$ , also  $\Sigma a_ix_i = 0$  die allgemeine Gleichung einer Geraden; die der Verbindungsgeraden der Punkte  $x'_i, x''_i$  (Nr. 72) ist  $\Sigma x_i(x'_jx''_k - x'_kx''_j) = 0$ ; die Verbindungsgerade des Schwerpunkts und des Höhenschnittpunkts (Nr. 73, 1) hat in trimetrischen Normalkoordinaten die Gleichung  $\Sigma x_i \sin 2A_i \sin (A_j - A_k) = 0$  usw. Ferner wird bei Benutzung der Koordinaten in Nr. 68 der Ausdruck für den Abstand des Punktes  $x'_i$  von der Geraden  $\Sigma a_ix_i = 0$ :

$$\Sigma a_ix'_i : \sqrt{(\Sigma a_i^2 - 2\Sigma a_ja_k \cos A_i)};$$

die Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden  $\Sigma a_ix_i = 0$ ,  $\Sigma a'_ix_i = 0$  ist  $\Sigma a_ia'_i - \Sigma (a_ja'_k + a_ka'_j) \cos A_i = 0$  und die ihres Parallelismus  $\Sigma (a_ja'_k - a_ka'_j) \sin A_i = 0$ , usw.

Eine noch weiter gehende Abkürzungssymbolik für allgemeine lineare Funktionen hat die neuere Algebra<sup>23)</sup> eingeführt. Danach setzen wir

$$(40) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_x, \quad \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 = \alpha_u,$$

und  $a_x = 0$  ist also die Gleichung einer Geraden von den Koordinaten  $a_i$ ,  $\alpha_u = 0$  die Gleichung eines Punktes von den Koordinaten  $\alpha_i$ ; die Gleichung vereinigter Lage von  $x_i$  und  $u_i$  ist sowohl  $u_x = 0$  als  $x_u = 0$ . Ein Punkt  $x'_i$  bez.  $y_i$  gehört der Geraden  $a_x = 0$  an, wenn  $a'_x = 0$  bez.  $a_y = 0$ . Zwei Geraden  $a_x = 0$ ,  $b_x = 0$  bestimmen das Büschel  $a_x - kb_x = 0$  von dem Scheitel  $C_u = 0$  (Nr. 81).

Dieses Prinzip führte weiter auch zu der symbolischen Darstellung der homogenen Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades durch die  $n^{\text{te}}$  Potenz einer linearen Funktion  $a_x^n$ . Vergleichen wir z. B. die allgemeinste homogene Funktion zweiten Grades mit dem Ausdruck  $a_x^2$ , so können wir diesen an die Stelle jener Funktion setzen, wenn wir nur annehmen, die  $a_1, a_2, a_3$  seien

bloße Symbole von der Eigenschaft, daß erst ihre Produkte zu zweien wirkliche Zahlen bedeuten:  $a_i a_k = a_{ik} = a_{ki}$ . Hier- nach eignen sich für Funktionen zweiten Grades Koeffizienten  $a_{ik}$  mit doppelten Indizes  $i, k$ , die mit den Indizes der beiden Veränderlichen des Gliedes  $x_i x_k$  übereinstimmen, so daß  $a_x^2$  gleich ist mit

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2.$$

90. Das wichtigste Mittel zur vollen Verwertung des Vor- teils der Homogenität und Symmetrie bei Benutzung der homo- genen Koordinaten bietet aber *die für das ganze Gebiet der homogenen Funktionen fundamentale Theorie der Determinanten*.

Schon in Nr. 8 wurden einige Sätze aus den Elementen der Determinantentheorie abgeleitet; wir lassen hier einen Satz über das Produkt zweier Determinanten dritten Grades folgen, da er weiterhin benutzt wird. Der Satz lautet:

*Das Produkt  $A \cdot B$  der beiden Determinanten*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

*läßt sich als eine Determinante dritten Grades  $C$  schreiben, deren Elemente  $c_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) durch*

$$(41) \quad c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + a_{i3} b_{k3}$$

*gegeben sind.*

Zum Beweis dieses Satzes beachte man, daß die Gleichung  $C = 0$  nach S. 81 als das Ergebnis der Elimination von  $x, y, z$  aus den drei in  $x, y, z$  homogenen Gleichungen

$$(42) \quad \begin{cases} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13}) x + (a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{23}) y \\ \quad + (a_{11} b_{31} + a_{12} b_{32} + a_{13} b_{33}) z = 0, \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13}) x + (a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23}) y \\ \quad + (a_{21} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{23} b_{33}) z = 0, \\ (a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12} + a_{33} b_{13}) x + (a_{31} b_{21} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{23}) y \\ \quad + (a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}) z = 0 \end{cases}$$

angesehen werden kann, denn die in (42) auftretenden Koeffi- zienten von  $x, y, z$  sind die durch (41) definierten  $c_{ik}$ . Nun lassen sich die Gleichungen (42) nach Einführung von

$$(43) \quad \begin{aligned} b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z &= X, & b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z &= Y, \\ & & b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z &= Z \end{aligned}$$

auch in der Form

$$(44) \quad \begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, & a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z &= 0 \end{aligned}$$

schreiben, und diese bestehen nach Nr. 45 nebeneinander, wenn die aus den Koeffizienten  $a_{ik}$  gebildete Determinante  $A$  verschwindet. Hieraus geht hervor, daß  $A$  in  $C$  als Faktor enthalten sein muß. Ein zweiter Faktor von  $C$  ergibt sich, wenn man beachtet, daß ein die Gleichungen (42) erfüllendes Wertsystem  $x, y, z$  jedenfalls dann gefunden werden kann, wenn es ein System gibt, das die Gleichungen  $X=0, Y=0, Z=0$  erfüllt, und die Bedingung hierfür ist  $B=0$ . Daher ist auch  $B$  ein Faktor von  $C$  und es kann somit  $C$  von  $AB$  höchstens um einen Zahlenfaktor verschieden sein. Indem man  $C$  mit  $AB$  vergleicht, findet man diesen Faktor gleich 1 und hat daher

$$C = AB.$$

Das Produkt  $AB$  kann noch in drei anderen Arten als eine Determinante dritten Grades geschrieben werden. Dänämlich  $A$  und  $B$  bei Vertauschung der Zeilen mit den Spalten ihre Werte nicht ändern, lassen sich die Elemente der das Produkt  $AB$  darstellenden Determinante auch durch die Gleichungen

$$(45) \quad \begin{cases} c'_{ik} = a_{1i}b_{k1} + a_{2i}b_{k2} + a_{3i}b_{k3} & \text{oder} \\ c''_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} & \text{oder} \\ c'''_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + a_{3i}b_{3k} \end{cases}$$

definieren.

Für Determinanten zweiten Grades gilt die Formel

$$(46) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix},$$

deren Beweis dem Leser überlassen werden möge. Auch hier lassen sich die Elemente der Determinante rechts noch in drei anderen Formen schreiben.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß auch das Produkt zweier Determinanten  $n^{\text{ten}}$  Grades durch eine einzige

Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades dargestellt werden kann. Ihre Elemente  $c_{ik}$  sind durch  $n$ gliedrige Summen von der Form (41) oder (45) definiert; man hat  $i$  und  $k$  die Werte  $1, 2 \dots n$  zu erteilen.

Ein weiterer wichtiger Satz, der später mehrfach benutzt wird, lautet: *Die aus den Unterdeterminanten  $A_{ik}$  der Elemente  $a_{ik}$  von  $A$  gebildete Determinante ist gleich dem Quadrat der Determinante  $A$ .*

Zum Beweis dieses Satzes bilden wir das Produkt aus

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Dieses läßt sich als eine Determinante dritten Grades  $C$  darstellen, deren Elemente nach (41) durch

$$c_{ik} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3}$$

gegeben sind. Nach S. 20 sind also nun sämtliche  $c_{ik}$  gleich Null, bei denen die Indizes  $i$  und  $k$  verschieden sind, während  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = A$  wird. Somit reduziert sich das Produkt  $C$  oder  $A \cdot A'$  jetzt auf  $c_{11}c_{22}c_{33} = A^3$ , man hat daher die Gleichung

$$A \cdot A' = A^3 \quad \text{oder} \quad A' = A^2.$$

Der Satz über das Produkt zweier Determinanten ist auch auf das Produkt zweier sogenannter *Matrizes* ausgedehnt worden. Es sind dies solche mit Elementen  $a_{ik}$  ausgefüllte rechteckige Schemata, bei denen die Anzahl  $m$  der Zeilen von der Anzahl  $n$  der Spalten *verschieden* ist. Wir wollen zunächst annehmen, bei einer solchen Matrix sei  $m < n$ . Unter dem Produkt

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{array} \right\|$$

versteht man alsdann die Determinante  $m^{\text{ten}}$  Grades, deren Elemente  $c_{ik}$  durch (41) definiert sind und also dadurch entstehen, daß man die Summe der Produkte aus den Elementen einer *Zeile* der einen Matrix und einer *Zeile* der anderen Matrix bildet. So ist z. B.

$$(7) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} \end{vmatrix},$$

und hierfür kann, wie man leicht einsieht, gesetzt werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}.$$

Eigenartig ist der Fall, wo die Anzahl der Zeilen die der Spalten übertrifft ( $m > n$ ). Auch hier versteht man unter dem Produkt der beiden Matrices die Determinante der zeilenweise gebildeten  $c_{ik}$ ; sie ist vom Grade  $m$  und man hat

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn}.$$

Aber diese Determinante der  $c^{ik}$  hat den Wert Null, denn man würde sie auch erhalten haben, wenn man jede der beiden Matrices durch Beifügen von  $m - n$  aus Nullen bestehenden Spalten zu eigentlichen, allerdings identisch verschwindenden, Determinanten erweitert hätte, und das Produkt dieser Determinanten ist natürlich Null. So ist z. B.

$$(48) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32} \end{vmatrix};$$

denselben Ausdruck würde man aber durch Multiplikation der beiden verschwindenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

erhalten.

Auch manche nicht aus der Theorie der linearen Gleichungen stammende Ausdrücke können in Determinantenform gebracht werden, z. B. das Quadrat der Entfernung zweier Punkte mit den trimetrischen Normalkoordinaten  $x_i$  bez.  $x'_i$  (Nr. 74):

$$d^2 = \frac{(l_1 l_2 l_3)^2}{l_x^2 \cdot l_{x'}^2} \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & x'_1 & x_1 \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & x'_2 & x_2 \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & x'_3 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$



B. 1) Die Fläche  $F$  des Dreiecks dreier Geraden ist durch die Koeffizienten ihrer Gleichungen für trimetrische Normalkoordinaten in Determinantenform auszudrücken. Sind  $a_x' = 0$ ,  $a_x'' = 0$ ,  $a_x''' = 0$  die Gleichungen der Geraden und bezeichnen  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  die Werte, die ihre linken Seiten durch Substitution der Koordinaten der Gegenecken  $x_i'$ ,  $x_i''$ ,  $x_i'''$  annehmen, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{x'}' &= h_1, & a_{x'}'' &= 0, & a_{x'}''' &= 0, \\ a_{x''}' &= 0, & a_{x''}'' &= h_2, & a_{x''}''' &= 0, \\ a_{x'''}' &= 0, & a_{x'''}'' &= 0, & a_{x'''}''' &= h_3. \end{aligned}$$

Bildet man aus den neun links stehenden Trinomen die Determinante, so muß ihr Wert der Determinante der rechten Seite gleich, d. i. gleich  $h_1 h_2 h_3$  sein. Sie ist aber andererseits nach S. 176 gleich dem Produkt der beiden Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix},$$

und da  $B$  nach dem Ergebnis von Nr. 74 gleich  $\frac{2FM^2}{l_1 l_2 l_3}$  ist, so folgt  $\frac{AM^2}{l_1 l_2 l_3} 2F = h_1 h_2 h_3$ . Nun ist  $l_x' = l_x'' = l_x''' = M$ , und man kann zwischen je einer von diesen Gleichungen und je drei bezüglichen Gleichungen oben die Koordinaten  $x_i'$ ,  $x_i''$ ,  $x_i'''$  bez. eliminieren. Dies ergibt

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & h_1 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & 0 \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & M \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & 0 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & h_2 \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & M \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & 0 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & 0 \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' & h_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & M \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{MA}{h_1} = \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}, \quad \frac{MA}{h_2} = - \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}, \quad \frac{MA}{h_3} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix};$$

daher durch Substitution in  $2F = \frac{h_1 h_2 h_3 l_1 l_2 l_3}{AM^2}$  endlich  $\frac{2F'}{l_1 l_2 l_3 M}$

$$= \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix}^2 : \left\{ \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1''' & a_2''' & a_3''' \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} \right\}.$$

Man hätte diese Gestalt des Ausdrucks nach Nr. 37, 5 erwarten dürfen; denn die Determinante des Zählers verschwindet

wie dort für drei Geraden, die durch einen Punkt gehen, und eine Determinante des Nenners verschwindet, wenn zwei unter den drei Geraden parallel sind.

2) Die linke Seite der quadratischen Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

ist das Produkt von zwei linearen Faktoren, wenn in der mit ihr identischen Form

$$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

die drei linearen Funktionen

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ ,  $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$ ,  $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$  zueinander in konstantem Verhältnis, etwa wie  $m_1:m_2:m_3$ , stehen; denn dann ist sie das Produkt von zwei zu  $\sum a_{1i}x_i$ ,  $\sum m_i x_i$  proportionalen Faktoren. Die zu erfüllende Bedingung ist also die Erfüllung der Gleichheiten

$$\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{m_1} = \frac{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{m_2} = \frac{a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3}{m_3}$$

für alle Werte von  $x_1, x_2, x_3$  oder die Existenz solcher Werte von  $x_1, x_2, x_3$ , für die gleichzeitig  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ ,  $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$ ,  $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$  sind. Die Elimination von  $x_1, x_2, x_3$  zwischen diesen Gleichungen gibt die gesuchte Bedingung in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Vgl. (11) und (12) in Nr. 62.

3) Die Bedingung des gleichzeitigen Bestehens der Gleichungen

$$u_1x + a_2y + a_3 = b_1x + b_2y + b_3 = c_1x + c_2y + c_3 = d_1x + d_2y + d_3$$

lautet

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } A + C = B + D,$$

wenn  $A, B, C, D$  die Schemata der zu den Elementen der ersten Zeile gehörigen Unterdeterminanten bedeuten.

Die Bedingung ist erfüllt, wenn die linearen Funktionen, gleich Null gesetzt, die Gleichungen von vier Tangenten desselben Kreises in der Normalform sind und  $x|y$  der Mittelpunkt ist.

Und zwar stellen dann die Unterdeterminanten die Produkte je einer Seite des Tangentenvierecks in die Sinus der beiden anliegenden Winkel dar.

91. Wir behandeln mit Hilfe der Determinantentheorie hauptsächlich die *Lehre von den linearen Substitutionen*. Bei Beschränkung auf drei Veränderliche versteht man darunter die Einführung von drei linearen homogenen Funktionen der Veränderlichen als neue Veränderliche. Es ist hier zweckmäßig, die Substitutionskoeffizienten durch Doppelindizes zu unterscheiden. Wir setzen unter Benutzung eines Proportionalitätsfaktors  $\mu$ :

$$(49) \quad \begin{cases} \mu x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_{13} x'_3 = \Sigma \alpha_{1k} x'_k, \\ \mu x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{23} x'_3 = \Sigma \alpha_{2k} x'_k, \\ \mu x_3 = \alpha_{31} x'_1 + \alpha_{32} x'_2 + \alpha_{33} x'_3 = \Sigma \alpha_{3k} x'_k, \end{cases}$$

also allgemein, wenn sich  $\Sigma$  auf den Index der Veränderlichen bezieht,

$$(50) \quad \mu x_i = \Sigma \alpha_{ik} x'_k.$$

Der erste Index  $i$  von  $\alpha_{ik}$  stimmt mit dem Index der ungestrichenen Veränderlichen überein, in deren Gleichung  $\alpha_{ik}$  vorkommt, der zweite Index  $k$  mit dem Index der gestrichenen Veränderlichen, zu der  $\alpha_{ik}$  als Koeffizient gehört. Die Determinante der Koeffizienten

$$(51) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

heißt *der Substitutionsmodul*; ihr Wert sei immer von Null verschieden vorausgesetzt.

Ist wieder  $A_{ik}$  die zu  $\alpha_{ik}$  in  $\Delta$  gehörige Unterdeterminante, so heißt die Determinante der  $A_{ik}$  die *Reziprokaldeterminante* zu  $\Delta$  oder die *Determinante der adjungierten Elemente*; sie ist nach S. 178 gleich  $\Delta^2$ ,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

und die zu  $A_{ik}$  gehörigen Unterdeterminanten sind gleich  $\Delta \cdot \alpha_{ik}$ , wie man leicht durch Ausrechnen bestätigen kann (vgl. auch S. 81). Die Auflösung der Substitutionsgleichungen liefert die *umgekehrten Substitutionen*

$$(52) \quad \frac{\Delta}{\mu} x_i' = \Sigma A_{ki} x_k,$$

wobei nun der zweite Index die Gleichung charakterisiert.

Unter dem Gesichtspunkt einer linearen Substitution in ein System linearer Gleichungen hat besondere Wichtigkeit für die analytische Geometrie der schon in Nr. 90 abgeleitete Satz über das Produkt zweier Determinanten. Dieser lautet dann so: *Wenn ein System von linearen homogenen Gleichungen durch lineare Substitutionen für die Veränderlichen transformiert wird, so ist die Determinante des transformierten Systems gleich dem Produkt aus der Determinante des ursprünglichen Systems in den Substitutionsmodul.*

Sind die Gleichungen  $a_x = 0$ ,  $b_x = 0$ ,  $c_x = 0$  gegeben, so werden sie durch die Substitutionen (49) zu neuen Veränderlichen  $x_i'$  transformiert in

$$(53) \quad \begin{cases} a'_x = x'_1 \Sigma a_i \alpha_{i1} + x'_2 \Sigma a_i \alpha_{i2} + x'_3 \Sigma a_i \alpha_{i3} = 0, \\ b'_x = x'_1 \Sigma b_i \alpha_{i1} + x'_2 \Sigma b_i \alpha_{i2} + x'_3 \Sigma b_i \alpha_{i3} = 0, \\ c'_x = x'_1 \Sigma c_i \alpha_{i1} + x'_2 \Sigma c_i \alpha_{i2} + x'_3 \Sigma c_i \alpha_{i3} = 0, \end{cases}$$

und die Determinante der transformierten Koeffizienten  $a_i'$ ,  $b_i'$ ,  $c_i'$  wird

$$(54) \quad \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Hat nun die ursprüngliche Determinante den Wert Null, gehen also die Geraden  $a_x$ ,  $b_x$ ,  $c_x = 0$  durch einen Punkt oder liegen die Punkte  $a_u$ ,  $b_u$ ,  $c_u = 0$  in einer Geraden, so verschwindet gleichzeitig auch die Resultante der transformierten Gleichungen, d. h. auch die Geraden  $a'_x$ ,  $b'_x$ ,  $c'_x = 0$  bez. die Punkte  $a'_u$ ,  $b'_u$ ,  $c'_u = 0$  gehören einem Büschel bez. einer Reihe an.

Man nennt aber *Invariante* jede Funktion der Koeffizienten, die der Forderung genügt: Bildet man einerseits aus den Koef-

fizienten der gegebenen Gleichungen, andererseits aus den Koeffizienten der linear transformierten Gleichungen dieselbe Funktion, so soll der Quotient der beiden Funktionen gleich einer Potenz  $\Delta^k$  des Substitutionsmoduls sein. Dafür sagt man kürzer: *eine Invariante gegebener Gleichungen ändert sich bei linearer Transformation derselben nur um eine Potenz des Substitutionsmoduls als Faktor.\*)* Daher ist die Determinante der Koeffizienten von drei linearen Gleichungen eine Invariante derselben.

Die Koeffizienten einer transformierten linearen Gleichung sind ferner selbst lineare Funktionen der gegebenen. Wird  $u_x = 0$  durch die Substitution der  $x'_i$  in  $u'_x = \Sigma(x'_k \Sigma \alpha_{ik} u_i) = 0$  verwandelt, so ist

$$(55) \quad v u'_i = \alpha_{1i} u_1 + \alpha_{2i} u_2 + \alpha_{3i} u_3 = \Sigma \alpha_{ik} u_k,$$

$$(56) \quad \frac{\Delta}{v} u_i = A_{i1} u'_1 + A_{i2} u'_2 + A_{i3} u'_3 = \Sigma A_{ik} u'_k.$$

Man nennt diese Substitutionen, deren Koeffizienten mit denen der ursprünglichen (50) und (52) identisch sind, nur daß die Zeilen und die Reihen derselben vertauscht erscheinen, die zu den gegebenen *inversen (transponierten) Substitutionen*. Veränderliche  $u_i$  und Veränderliche  $x_i$ , die miteinander gleichzeitig inverse Substitutionen erleiden, werden als untereinander *kontragredient* bezeichnet. Also sind *Punkt- und Linienkoordinaten kontragredient*, denn bei gleichzeitiger Anwendung der Substitutionen (50) auf  $x_i$  und (56) auf  $u_i$  geht  $\mu u_x$  über in  $v u_{x'}$  also  $u_x = 0$  in  $u'_{x'} = 0$ .

Aus den linearen homogenen Substitutionen gehen für nicht-homogene Veränderliche *lineargebrochene Substitutionen* hervor (vgl. Nr. 81):

$$(57) \quad x = \frac{\alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13}}{\alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33}}, \quad y = \frac{\alpha_{21} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{23}}{\alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33}},$$

$$(58) \quad u = \frac{A_{11} u' + A_{12} v' + A_{13}}{A_{31} u' + A_{32} v' + A_{33}}, \quad v = \frac{A_{21} u' + A_{22} v' + A_{23}}{A_{31} u' + A_{32} v' + A_{33}}.$$

**92. Geometrische Bedeutung linearer Substitutionen.**  
Die homogenen Punktkoordinaten  $x_i$  und  $x'_i$  können wir im

\*) Ändert sich die Funktion gar nicht oder ist der Faktor  $\Delta^k = 1$ , so nennt man sie eine *absolute Invariante*.

allgemeinen auf zwei ganz beliebige, voneinander unabhängige Systeme von festen Elementen beziehen; wir können aber auch die besondere Annahme machen, daß diese Systeme identisch seien. Zunächst in der allgemeinen Voraussetzung denken wir zugleich die Linienkoordinaten  $u_i$  und  $u'_i$  so eingeführt, daß  $u_x = 0$  und  $u'_x = 0$  in den beiden Systemen Geraden darstellen.

Die linearen Substitutionen (50) ordnen nun jedem bestimmten Punkt  $x'_i$  einen einzigen bestimmten Punkt  $x_i$  zu, aber vermöge der linearen Umkehrungen (52) entspricht auch jedem Punkt  $x_i$  ein und nur ein Punkt  $x'_i$ . *Die Punkte beider Systeme entsprechen einander eindeutig.* Der Grad einer Gleichung in Punktkoordinaten, also die Ordnung der durch sie dargestellten Ortskurve, wird durch lineare Substitution nicht geändert (S. 55). Somit entsprechen den Punkten einer geraden Reihe im System der  $x'_i$  auch die Punkte einer geraden Reihe im System der  $x_i$  und umgekehrt. Daraus folgerten wir aber, daß auch die Linienkoordinaten  $u_i$ ,  $u'_i$  entsprechender Geraden durch lineare Substitutionen (55) und (56) verbunden sind. *Also entsprechen sich die Geraden ebenfalls eindeutig.* Somit bleibt auch die Klasse jeder Hüllkurve bei linearer Substitution ungeändert, insbesondere gehen Strahlenbüschel wieder in Strahlenbüschel über.

Man nennt dies ausnahmslos eindeutige Entsprechen von Punkten  $x_i$  und  $x'_i$ , von Geraden  $u_i$  und  $u'_i$  zweier ebenen Gebilde eine *lineare Verwandtschaft* derselben. Und diese ausnahmslose Eindeutigkeit fordert als analytischen Ausdruck umgekehrt die *lineare* Substitution zwischen den Koordinaten. Alle rein deskriptiven Beziehungen (Nr. 82) zwischen Elementen eines Gebildes finden sich wiederum vor zwischen den entsprechenden Elementen eines linear verwandten Gebildes, wie in Nr. 82 die korrelativen Beziehungen bei den dualistisch entsprechenden. Infolge des Invariantencharakters der Resultante von drei linearen Gleichungen ist eben die Eigenschaft der Geraden bez. des Punktes, einem Büschel oder einer Reihe anzugehören, invariant.

Eine mehr geometrische Benennung gründet sich auf eine noch wichtigere Invariante der linearen Substitutionen:

das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Büschels und einer Reihe ist absolut invariant. Denn, sind die Strahlen eines Büschels, bez. Punkte einer Reihe  $a_x - kb_x = 0$ ,  $a_u - k\beta_u = 0$ , so sind die entsprechenden Strahlen, bez. Punkte  $a'_x - kb'_x = 0$ ,  $a'_u - k\beta'_u = 0$ . Also haben nach Nr. 86 in entsprechenden Büscheln bez. Reihen infolge der Parametergleichheit je vier homologe Elemente  $k_1, k_2, k_3, k_4$  gleiches Doppelverhältnis (Nr. 85). In jeder linearen Verwandtschaft sind entsprechende Strahlenbüschel und Punktreihen projektiv aufeinander bezogen; daher heißt die durch lineare Substitution darstellbare geometrische Abhängigkeit Projektivität, Kollineation<sup>24)</sup> oder Homographie der ebenen Systeme, und entsprechende Elemente derselben heißen homolog. Homologe oder kollineare Kurven stimmen in Ordnung und Klasse überein. Zwei Systeme sind kollinear, wenn sie zu demselben dritten kollinear sind, denn  $x_i$  und  $x'_i$  sind durch eine lineare Substitution verbunden, wenn  $x_i$  und  $x'_i$ ,  $x'_i$  und  $x''_i$  es sind.

Die beiden Fundamenteigenschaften der Projektivität sind *Eindeutigkeit des Entsprechens* und *Gleichheit homologer Doppelverhältnisse*. In der allgemeinen projektiven Verwandtschaft sind zahlreiche besondere Formen enthalten.

93. Die Untersuchung der Projektivität ebener Gebilde erfordert eine *nähere Betrachtung der projektiven Zuordnung in den beiden Elementargebilden*: Punktreihen und Strahlenbüscheln (Nr. 86). Sind zwei Reihen, bez. Büschel projektiv, so sind es auch die zu ihnen perspektiven Reihen von den Trägern  $x_2 = 0$  und  $x'_2 = 0$ , bez. Büschel von den Scheiteln  $u_2 = 0$  und  $u'_2 = 0$ . Den Ausdruck der Verwandtschaft bilden also die Substitutionen zweier Veränderlichen

$$(59) \quad \varrho x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{13} x'_3 \text{ bez. } \sigma u'_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{31} u_3$$

$$(60) \quad \varrho x_3 = \alpha_{31} x'_1 + \alpha_{33} x'_3 \quad \sigma u'_3 = \alpha_{13} u_1 + \alpha_{33} u_3.$$

Hierbei sind  $\varrho$  und  $\sigma$  Proportionalitätsfaktoren.

Setzen wir

$$(61) \quad x_1 : x_3 = \lambda, x'_1 : x'_3 = \lambda', \text{ bez. } u_1 : u_3 = \mu, u'_1 : u'_3 = \mu',$$

so sind diese Quotienten nach der Koordinatendefinition (Nr. 87)

Doppelverhältnisse, zwischen denen eine Abhängigkeit besteht vermöge der lineargebrochenen Substitution

$$(62) \quad \lambda = \frac{\alpha_{11}\lambda' + \alpha_{13}}{\alpha_{31}\lambda' + \alpha_{33}}, \quad \text{bez. } \mu' = \frac{\alpha_{11}\mu + \alpha_{31}}{\alpha_{13}\mu + \alpha_{33}}.$$

Die Doppelverhältnisse homologer Elemente mit je drei willkürlichen festen Elementen oder Grundelementen sind untereinander in linearer Abhängigkeit; Doppelverhältnis-Gleichheit (Nr. 86) entsteht erst, wenn sich auch die festen Elemente der Reihe nach entsprechen.

Nun ist das Doppelverhältnis eines Elementes mit drei festen sein allgemeiner Parameter in bezug auf zwei derselben, der durch geeignete Wahl des dritten mit dem Teilverhältnis identisch wird (Nr. 83). Die folgenden Betrachtungen büßen nichts an Allgemeinheit ein, wenn wir den Parameter  $\lambda$  als das Teilverhältnis selbst voraussetzen. Dann lautet das Ergebnis: *zwischen den Parametern  $\lambda, \lambda'^*$  homologer Elemente in projektiven Elementargebilden besteht eine bilineare, d. h. sowohl in  $\lambda$  als in  $\lambda'$  lineare Gleichung*

$$(63) \quad a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0;$$

denn aus derselben folgen die Parametersubstitutionen

$$(64) \quad \lambda' = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}, \quad \lambda = -\frac{c\lambda' + d}{a\lambda' + b}.$$

Hierbei ist noch vorausgesetzt, daß  $ad - bc \neq 0$  sei, denn im Falle  $ad - bc = 0$  und  $a \neq 0$  wäre (63) mit  $\frac{(a\lambda + c)(a\lambda' + b)}{a} = 0$  gleichbedeutend, die bilineare Gleichung würde in zwei Faktoren zerfallen.

Die Gleichung (63) ist durch die Angabe von drei Paaren homologer Elemente mit den Parametern  $\lambda_1, \lambda'_1; \lambda_2, \lambda'_2; \lambda_3, \lambda'_3$  bestimmt, z. B. in der Determinantenform

$$(65) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda & \lambda' & 1 \\ \lambda_1 & \lambda'_1 & \lambda_1 & \lambda'_1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda'_2 & \lambda_2 & \lambda'_2 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda'_3 & \lambda_3 & \lambda'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

\*) Die duale Betrachtung ist bis auf die Bezeichnung identisch. An Stelle der Parameter kann man sich auch Abszissen  $x, x'$  eingeführt denken.



Diese ergibt sich auch durch Entwicklung des Ausdrucks für die Gleichheit homologer Doppelverhältnisse

$$(66) \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda} = \frac{\lambda'_1 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_3} : \frac{\lambda'_1 - \lambda'}{\lambda'_2 - \lambda'}.$$

*Umgekehrt ist die allgemeinste bilineare Gleichung*

$$(67) \quad a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

*die Parametergleichung der Projektivität.* Denn man bestätigt sofort die Doppelverhältnis-Gleichheit durch Ausführung der Substitutionen, z. B. von  $\lambda_i$  an Stelle von  $\lambda$ : die Differenzen im Doppelverhältnis der ungestrichenen  $\lambda$  sind alsdann den mit dem Faktor  $ad - bc$  multiplizierten entsprechenden Differenzen der gestrichenen  $\lambda$  proportional. Damit erhält völlig allgemein: *Zwei Reihen von Punkten oder zwei Büschel von Strahlen oder eine Reihe von Punkten und ein Büschel von Strahlen, die in einer algebraisch-geometrischen Abhängigkeit stehen, sind projektiv, sobald einem Element des einen Gebildes eindeutig ein Element des anderen entspricht, und umgekehrt.*

Den Elementen  $\lambda = \infty, -\frac{c}{a}, 0, -\frac{d}{b}$  entsprechen im Falle  $ad - bc \neq 0$  bez. die Elemente  $\lambda' = -\frac{b}{a}, \infty, -\frac{d}{c}, 0$ ; also bestimmen diese Koeffizientenverhältnisse die den beiden festen Elementen oder Grundelementen jedes Gebildes entsprechenden Elemente des anderen, und umgekehrt. Wird daher das erste, bez. das zweite Paar der Grundelemente einander entsprechend gedacht, ist also für  $\lambda = 0$  auch  $\lambda' = 0$ , bez. für  $\lambda = \infty$  auch  $\lambda' = \infty$ , so gelten die einfacheren Formen der Projektivitätsgleichung

$$(68) \quad a + \frac{b}{\lambda'} + \frac{c}{\lambda} = 0, \text{ bez. } b\lambda + c\lambda' + d = 0.$$

Machen wir beide Voraussetzungen zugleich, so folgt

$$(69) \quad b\lambda + c\lambda' = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda : \lambda' = \text{konst.},$$

die Gleichungsform, die wir schon in Nr. 86 gebraucht haben (vgl. Anm. S. 165). Und wenn sich die Grundelemente verkehrt entsprechen, so daß für  $\lambda = 0, \infty$ ;  $\lambda' = \infty, 0$  ist, reduziert sich die Projektivitätsgleichung auf

$$(70) \quad a\lambda\lambda' + d = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda\lambda' = \text{konst.}$$

Die zu den unendlich fernen Punkten  $\lambda = -1$ ,  $\lambda' = -1$  zweier Reihen homologen Punkte heißen die *Gegenpunkte* derselben; ihre Parameter sind  $\lambda' = \frac{b-d}{c-a}$ ,  $\lambda = \frac{d-c}{a-b}$  und sie mögen mit  $Q'$  und  $R$  bezeichnet werden. Die von ihnen gemessenen Abszissen  $x'$ ,  $x$  entsprechender Punkte erfüllen die Gleichung  $RA \cdot Q'A' = xx' = \text{konst.} = k^2$ . Da die Parameter  $\lambda$  und  $\lambda'$ , wie schon erwähnt wurde, als Teilverhältnisse angesehen werden können, entsprechen den Werten  $\lambda = -1$  und  $\lambda' = -1$  die unendlich fernen Punkte der beiden Punktreihen (vgl. S. 30, Gl. [63]). Sollen diese homolog sein, so muß zwischen den Koeffizienten von (63), S. 187 die Beziehung  $a + d = b + c$  bestehen. In diesem Fall sind die projektiven Punktreihen *ähnlich*, denn homologe Strecken sind nun proportional wegen der Reduktion von

$$(A_1 A_2 O \infty) = (A'_1 A'_2 O' \infty) \text{ auf } OA_1 : OA_2 = O'A'_1 : O'A'_2.$$

Zur Bestimmung der ähnlichen Reihen genügen zwei homologe Paare, und, insofern  $A_1 A_2$  und  $A'_1 A'_2$  homologe Strecken sind, reduziert sich die Parametergleichung auf  $\lambda = \lambda'$ . Endlich entstehen aus ähnlichen offenbar *kongruente Reihen*, sobald zwei homologe Strecken z. B.  $A_1 A_2$ ,  $A'_1 A'_2$  gleich werden.

In projektiven Büscheln können die Grundstrahlen zueinander rechtwinklig sein; dann ist das Produkt der Teilverhältnisse zueinander normaler Strahlen gleich  $-1$ . Somit schließen die zu  $\lambda$ ,  $\frac{-1}{\lambda}$  homologen Strahlen  $-\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}$ ,  $-\frac{d\lambda-b}{c\lambda-a}$  einen rechten Winkel ein, wenn  $\lambda$  der quadratischen Gleichung genügt

$$(71) \quad (ac + bd)(\lambda^2 - 1) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\lambda.$$

re Wurzeln sind offenbar stets reell und negativ reziprok: *in projektiven Strahlenbüscheln gibt es also im allgemeinen ein und nur ein Paar von homologen rechten Winkeln*. Ist  $ac + bd = 0$ , bez.  $ab + cd = 0$ , so sind die festen Strahlen selbst je das eine Rechtwinkelpaar.

Dagegen gibt es unendlich viele homologe Rechtwinkelpaare in der besonderen Projektivität, für die zugleich  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0$  und  $ac + bd = 0$  ist und außerdem, wie

die zu (71) analoge quadratische Gleichung für  $\lambda'$  ergibt,  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$  sowie  $ab + cd = 0$ . Man findet leicht  $a = \pm d$ ,  $b = \mp c$  und insbesondere  $\lambda \mp \lambda' = 0$  für homologe Grundstrahlen. Die projektiven Büschel  $\lambda = \lambda'$ , bez.  $\lambda = -\lambda'$  sind dann kongruent bez. symmetrisch gleich. So beschreiben z. B. Strahlen, die einen Winkel von konstanter Größe  $\vartheta$  einschließen, kongruente Büschel, deren Parametergleichung lautet  $(m_1 m_2 + 1) \operatorname{tg} \vartheta = m_1 - m_2$  (Nr. 36).

94. **Involution.** Wichtig ist der Fall der *Projektivität der Elementargebilde bei vereinigter Lage ihrer Träger*. Liegen zwei projektive Punktreihen in derselben Geraden, so kann jeder Punkt derselben sowohl zur ersten als zur zweiten Reihe gerechnet werden, und es entspricht ihm hiernach in der zweiten oder der ersten Reihe je ein Punkt. Ebenso gehören in zwei projektiven Büscheln von demselben Scheitel zu jedem Strahl zwei homologe Strahlen, einer in jedem der konzentrischen Büschel. Dem Element vom Teilverhältnis  $\mu$  entspricht, insofern es zum Gebilde  $\lambda$ , bez.  $\lambda'$  gehört, ein Element  $\lambda' = -\frac{b\mu + d}{a\mu + c}$ , bez.  $\lambda = -\frac{c\mu + d}{a\mu + b}$ ; diese beiden Elemente sind im allgemeinen voneinander verschieden, auch wenn wir  $\lambda$ ,  $\lambda'$  auf dieselben Grundelemente bezogen denken.

Sobald aber in diesem Falle  $b = c$  ist, entspricht jedem Werte  $\mu$  in jedem der Gebilde  $\lambda$  und  $\lambda'$  der eine Wert  $\mu' = -\frac{b\mu + d}{a\mu + b}$ . Die nach  $\lambda$  und  $\lambda'$  symmetrische Projektivitätsgleichung

$$(72) \quad a\lambda\lambda' + b(\lambda + \lambda') + d = 0$$

definiert also zwei projektive Gebilde in derselben Geraden oder um denselben Punkt, in denen *zwei homologe Elemente sich vertauschungsfähig oder involutorisch entsprechen*, d. h. unabhängig davon, zu welchem Gebilde man das eine derselben rechnen will. Betrachtet man einen Punkt  $P$  des gemeinsamen Trägers der beiden Punktreihen als Punkt der einen Reihe, so entspricht ihm in der zweiten ein Punkt  $Q$ , und ebenso erhält man  $Q$ , wenn man  $P$  als Punkt der zweiten Reihe betrachtet und zu ihm den entsprechenden in der ersten

Reihe sucht. *Projektive vereinigte Reihen oder Büschel, deren Parametergleichung symmetrisch ist, bilden eine Involution.* Da die Involution aus Paaren wechselweise homologer Elemente besteht, können wir dieselben durch quadratische Gleichungen für die Parameter (oder die Abszissen, Nr. 16) gegeben denken. Wir verweisen für die nähere Betrachtung der Involution auf Nr. 17 und 18. Allerdings wurde dort nur die durch *Punktepaare* erzeugte Involution betrachtet; die für *Strahlenpaare* gültigen Sätze sind aber den Sätzen in Nr. 17 analog. Auf einer Geraden, die die konzentrischen involutorischen Strahlenbüschel schneidet, bilden die Schnittpunkte zwei projektive Punktreihen. Diese verlaufen in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung, je nachdem der Drehungssinn der beiden Büschel gleich oder entgegengesetzt ist.

95. In konzentrischen involutorischen Strahlenbüscheln gibt es nach Nr. 93 ein Paar homologer Rechtwinkelstrahlen, das mit Rücksicht auf  $c = b$  durch die Beziehung

$$(73) \quad \lambda^2 - \frac{a-d}{b} \lambda - 1 = 0$$

bestimmt wird. Man bezeichnet diese beiden zueinander rechtwinkligen homologen Strahlen als *die Achsen*  $r, r'$  der *Involution*. Die Bedingung der Involution kann geschrieben werden  $(pqrr') = (p'q'r'r)$ , wobei  $p$  und  $p'$ , sowie  $q$  und  $q'$  homologe Strahlenpaare bedeuten. Bezeichnet  $pr$  den Winkel, den der Strahl  $p$  mit der Achse  $r$  bildet, so kann man die letzte Gleichung auch durch

$$(74) \quad \operatorname{tg} pr \cdot \operatorname{tg} p'r = \operatorname{tg} qr \cdot \operatorname{tg} q'r = \text{konst.}$$

ersetzen. Das Produkt der Teilverhältnisse, die zwei homologe Strahlen mit den Achsen bestimmen, ist konstant und heißt die *Potenz*.

Das Rechtwinkelpaar ist unbestimmt für  $a = d, b = 0$ , wodurch (72) in  $\lambda\lambda' + 1 = 0$  übergeht. Die projektiven Büschel sind dann kongruent (nicht aber symmetrisch) und kommen durch Drehung des einen um einen rechten Winkel zur Deckung. *Die Strahlen durch O und ihre Normalen in O bilden so die wichtige sogenannte Rechtwinkelinvolution, deren Achsen unbestimmt sind.*

Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Geraden absoluter Richtung  $\lambda = \pm i$ , sie sind harmonisch konjugiert zu den einzelnen Rechtwinkelpaaren (Nr. 61).

Eine andere besondere Involution konzentrischer Strahlenbüschel ist die *symmetrische* Involution, bei der in (72)  $a + d = 0$ ,  $b = 0$  ist. Auf homologe Grundstrahlen bezogen ( $b = 0$ ), ist nun  $\lambda\lambda' - 1 = 0$ , *demnach sind in der symmetrischen Involution die Doppelstrahlen  $\lambda = \pm 1$  zueinander rechtwinklig*, also die gemeinsamen Winkelhalbierenden aller ihrer Paare. Man gebraucht daher auch den Namen Gleichwinkelinvolution oder gleichseitig-hyperbolische Involution.

## Sechstes Kapitel.

### Der Kreis.

96. In den vorhergehenden Kapiteln haben wir neben der Entwicklung des Koordinatenbegriffs im wesentlichen die Geometrie der linearen Elementargebilde und Verwandtschaften behandelt. Innerhalb dieser Grenzen erscheint die analytische Geometrie als der geometrische Ausdruck der Theorie der linearen Gleichungen. Deshalb gelangten Gleichungen höheren Grades nur insofern zur Besprechung, als sie mit mehreren linearen gleichbedeutend sind, d. h. in solche zerfallen (Nr. 56 und 62f.). So wurden auch von den Gleichungen zweiten Grades nur diejenigen der Geradenpaare untersucht (Nr. 57—63). Indessen hat sich auch schon ein einfachstes Beispiel einer nicht zerfallenden Gleichung zweiten Grades dargeboten, die Gleichung des Kreises (Nr. 23).

Nach der gewöhnlichen Anschauung ist der Kreis ein der Geraden koordiniertes Konstruktionsmittel. Vor einer Untersuchung der *allgemeinen* Kurven zweiter Ordnung (Nr. 27) wird es daher zweckmäßig sein, an dem elementaren Beispiel des Kreises ausführlich zu zeigen, wie die geometrischen Eigenschaften einer Kurve aus ihrer analytischen Definition heraus zu entwickeln sind (Nr. 26). Immerhin wird dabei die genaue Kenntnis des Gebildes ein nützlicher Wegweiser für das einzuhaltende Verfahren sein. Zugleich führt dieser Weg auf gewisse Begriffsbildungen, die sich überhaupt für Probleme zweiten Grades als wichtig erweisen werden.

Die *allgemeinste Gleichung des zweiten Grades in  $x|y$*  enthält die quadratischen Glieder mit  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ , die linearen mit  $x$ ,  $y$  und ein konstantes Glied, erfordert also sechs Koeffizienten oder fünf wesentliche Konstanten (Koeffizientenverhältnisse). Wir schreiben sie (Nr. 90, 2 für  $x_3 = 1$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ )

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

97. Gleichung des Kreises. Schon in Nr. 23 wurde gezeigt, daß die Gleichung

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$

in rechtwinkligen Koordinaten einen Kreis vom Radius  $\rho$  und mit dem Mittelpunkt  $\alpha | \beta$  darstellt.

Bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel  $\omega$  ist nach Nr. 5:

$$(2) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta) \cos \omega = \rho^2$$

die Gleichung des durch die Mittelpunktskoordinaten  $\alpha | \beta$  und den Radius  $\rho$  bestimmten Kreises.

Offenbar definieren die Gleichungen (1) und (2) den Kreis als Ort eines Punktes, der von einem festen Punkt (dem Mittelpunkt [Zentrum]) eine konstante Entfernung (gleich dem Radius) hat. In der Theorie des Kreises bietet aber die Verwendung schiefwinkliger Koordinaten selten Vorteile vor dem Gebrauch der rechtwinkligen. Daher werden im folgenden rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt, wenn nichts anderes bemerkt ist.

In den Anwendungen erscheinen besonders häufig die einfachsten Formen der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

für einen Kreis um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt, und

$$x^2 + y^2 \mp 2\rho x = 0$$

für einen Kreis, der durch den Koordinatenanfang geht und dessen Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse liegt ( $\alpha = \pm \rho$ ,  $\beta = 0$ ).

Die Gleichung des Kreises ist vom zweiten Grade, aber sie hängt statt von fünf (vgl. Nr. 96) nur von den drei Konstanten  $\alpha | \beta$ ;  $\rho$  ab. In der auf rechtwinklige Achsen bezogenen Gleichung des Kreises fehlt das Glied  $xy$  und die Koeffizienten von  $x^2$  und  $y^2$  sind gleich. Daher kann die allgemeine Gleichung zweiten Grades bei rechtwinkligen Koordinaten nur dann einen Kreis darstellen, wenn von ihren Koeffizienten die Bedingungen erfüllt werden

$$(3) \quad a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Umgekehrt sind diese Bedingungen hinreichend, um eine ihnen genügende Gleichung  $a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{12}x + 2a_{22}y + a_{33} = 0$  auf die Form  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$  zu bringen. Das Verfahren ist dem bei der Auflösung quadratischer Gleichungen ganz analog. Man macht den Koeffizienten von  $x^2 + y^2$  durch Division der Gleichung mit  $a_{11}$  der Einheit gleich und bringt das absolute Glied auf die rechte Seite. Durch Addition der Quadrate der halben Koeffizienten von  $x$  und  $y$  beiderseits vervollständigt man die linke Seite zur Summe zweier Quadrate von Binomen:

$$\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}.$$

Also sind die Koordinaten des Mittelpunkts

$$(4) \quad \alpha = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \beta = -\frac{a_{22}}{a_{11}}$$

und das Quadrat des Radius ist

$$(5) \quad \rho^2 = \frac{a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}.$$

Vergleichen wir ferner die auf schiefwinklige Achsen bezogene Kreisgleichung (2) mit der allgemeinen Form, so finden wir als notwendige Bedingungen eines Kreises

$$(6) \quad a_{12} = a_{11} \cos \omega, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Sind aber diese erfüllt, so zeigt die Koeffizientenvergleichung, daß Mittelpunkt und Radius durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos \omega = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, & \beta + \alpha \cos \omega = -\frac{a_{22}}{a_{11}}, \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \omega - \rho^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}. \end{cases}$$

B. 1) Die Gleichungen

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0, \quad 3(x^2 + y^2) - 5x - 7y + 1 = 0$   
lassen sich auf die Formen bringen

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{62}{36}.$$

Die Koordinaten des Mittelpunkts und der Radius sind im ersten Falle  $1 \mid 2$  und  $5$ , im zweiten  $\frac{5}{6} \mid \frac{7}{6}$  und  $\frac{1}{6}\sqrt{62}$ .

2) Es ist irgend eine Anzahl von Punkten gegeben; man soll den Ort eines Punktes finden, der so liegt, daß die Summe der



$m_1, m_2 \dots$  fachen Quadrate seiner Entfernungen  $r_1, r_2, \dots$  vom ersten, zweiten  $\dots$  Punkte bez. eine konstante Größe ist oder (vgl. Nr. 52, 4), daß  $\sum m_i r_i^2 = \text{konst.}$ , etwa gleich  $C$  ist.

Das Quadrat der Entfernung eines Punktes  $x|y$  vom Punkt  $x_i|y_i$ , d. i.  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ , multiplizieren wir mit  $m_i$  und addieren alle Glieder, die man so bilden kann. So finden wir für die Gleichung des Ortes

$$x^2 \sum m_i + y^2 \sum m_i - 2x \sum m_i x_i - 2y \sum m_i y_i + \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = C.$$

Also ist der Ort ein Kreis mit  $\alpha = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ ,  $\beta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$ ,

d. h. sein Mittelpunkt ist (Nr. 52, 4) der Schwerpunkt der gegebenen Punkte, wenn man diesen die Massen  $m_i$  beilegt.

Für den Radius  $R$  dieses Kreises finden wir

$$R^2 \sum m_i = \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \varrho_i^2,$$

wo  $\sum m_i r_i^2 = C$  gleich der Summe der  $m_i$  fachen Entfernungsquadrate jedes der gegebenen Punkte von einem Punkt des Kreises und  $\sum m_i \varrho_i^2$  gleich der Summe der  $m_i$  fachen Entfernungsquadrate aller gegebenen Punkte von dem Schwerpunkt derselben ist.

98. Als Normalform der Kreisgleichung mit den drei wesentlichen Konstanten  $\alpha|\beta|\pi$  werde bezeichnet

$$(8) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0.$$

Der Mittelpunkt ist  $\alpha|\beta$ ; also stellen Gleichungen, die nur im konstanten Glied voneinander abweichen, *konzentrische Kreise* dar. Die dritte Konstante  $\pi$  bestimmt das Quadrat des Kreisradius durch

$$(9) \quad \varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \pi.$$

Also stellt im elementaren Sinn die Gleichung nur dann einen Kreis dar, wenn  $\varrho^2$  positiv, also  $\varrho$  reell oder  $\pi < \alpha^2 + \beta^2$  ist. Wenn hingegen  $\pi > \alpha^2 + \beta^2$ , der Radius  $\varrho$  imaginär wird, so kann der Gleichung (8) kein reelles Wertepaar  $x|y$  genügen, da  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$  für solche Wertepaare nie einen negativen Wert annimmt.

Um wiederum analytisch und geometrisch gleichwertige Begriffe zu schaffen, nennen wir *jede Gleichung von der Form (8), deren Koeffizienten  $\alpha|\beta|\pi$  reell sind, Gleichung eines Kreises*. Insbesondere stellt sie unter der Bedingung  $\pi > \alpha^2 + \beta^2$  einen *imaginären Kreis* dar; derselbe hat einen reellen Mittelpunkt und rein imaginären Radius  $\varrho = \varrho' i$ , also keine reellen Peri-

pheriepunkte. Zu ihm steht in enger Beziehung der reelle Kreis von dem nämlichen Mittelpunkt und dem Radius  $\varrho'$ ; er möge kurz der *Stellvertreterkreis* des imaginären genannt werden. Seine Gleichung ist  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi' = 0$  für

$$\pi + \pi' = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Ist endlich  $\pi = \alpha^2 + \beta^2$ , der Radius  $\varrho$  also Null, so geht die Kreisgleichung in

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$$

über und wird durch kein anderes reelles Wertepaar als  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$  erfüllt. Daher müssen wir sie als die Gleichung eines unendlich kleinen Kreises vom Mittelpunkt  $\alpha|\beta$  oder *des Nullkreises am Punkte  $\alpha|\beta$*  bezeichnen. Andererseits kennen wir sie schon (Nr. 61) als die Gleichung des imaginären Geradenpaares oder Paares von Minimalgeraden  $x - \alpha \pm i(y - \beta) = 0$ , *der Strahlen der absoluten Richtungen aus dem Punkt  $\alpha|\beta$* . So ist  $x^2 + y^2 = 0$  ebensowohl als die Gleichung des Nullkreises am Ursprung, wie als die des Geradenpaares  $x \pm iy = 0$  aufzufassen.

✱ Für die Koordinaten von Punkten, die nicht auf der Kreisperipherie liegen, hat die linke Seite der Gleichung einen positiven oder negativen Wert. Bei Einsetzung von  $\alpha|\beta$  insbesondere ist dieser Wert  $\pi - \alpha^2 - \beta^2 = -\varrho^2$ , also negativ beim reellen, positiv beim imaginären Kreis. Daher ist auch für die Koordinaten eines jeden Punktes im Inneren eines *reellen* Kreises jenes Substitutionsergebnis negativ und ist dies nur für einen solchen (Nr. 24, \*Zusatz).

99. **Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte seiner Peripherie.** Soll ein Kreis einen vorgeschriebenen Punkt enthalten, so liefert die Einsetzung seiner Koordinaten in die Gleichung  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$  eine lineare Bedingung zwischen den drei unbekannten Koeffizienten. Da also  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$  durch die drei Gleichungen bestimmt sind

$$(10) \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + \pi = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 - 2\alpha x_2 - 2\beta y_2 + \pi = 0, \\ x_3^2 + y_3^2 - 2\alpha x_3 - 2\beta y_3 + \pi = 0, \end{cases}$$

so kann durch die drei Punkte  $A_1, A_2, A_3$  oder  $x_1|y_1, x_2|y_2, x_3|y_3$  nur *ein* Kreis beschrieben werden.

Das Ergebnis der Substitution dieser Koeffizientenwerte in die allgemeine Gleichung oder der Elimination von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$  aus den vorigen vier Gleichungen wird auch in der Determinantenform erhalten

$$(11) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises. Wir können sie auch als die Bedingung deuten, unter der vier Punkte in einem Kreise liegen, indem wir statt  $x|y$  etwa  $x_4|y_4$  schreiben. Die Entwicklung der Determinante nach den Elementen der ersten Spalte erteilt ihr alsdann folgenden geometrischen Inhalt: Bilden  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ein Kreisviereck und ist  $O$  ein willkürlicher Punkt, so besteht zwischen den Flächeninhalten der vier Dreiecke aus jenen die Beziehung  $\overline{OA_1}^2 \cdot A_2 A_3 A_4 + \overline{OA_3}^2 \cdot A_1 A_2 A_4 = \overline{OA_2}^2 \cdot A_1 A_3 A_4 + \overline{OA_4}^2 \cdot A_1 A_2 A_3$ .

Die Gleichung des Kreises reduziert sich dann und nur dann auf eine lineare, wenn in (11) der Koeffizient von  $x^2 + y^2$  verschwindet. Da dieser aber den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  angibt, so ist dadurch die Lage der drei Punkte  $x_1|y_1, x_2|y_2, x_3|y_3$  in einer Geraden bedingt (Nr. 40). In der allgemeinen Form der Kreisgleichung werden mit  $a_{11} = 0$  zugleich Mittelpunktskoordinaten und Radius unendlich groß (Nr. 97). Also darf die Gerade auch als ein unendlich großer Kreis aufgefaßt werden, jedoch nur unter Hinzunahme der unendlich fernen Geraden. Denn nach dem Prinzip von Nr. 16 ist die Reduktion einer quadratischen Funktion auf eine lineare nur zu denken als ihr Zerfallen durch Absonderung eines Faktors  $0 \cdot x + 0 \cdot y + c$  (Nr. 75).

B. 1) Der Kreis durch die Punkte  $2|3, 4|5, 6|1$  ist

$$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

2) Für den Kreis durch die Punkte  $2|3, 3|4$  und den Nullpunkt ist  $a_{33} = 0, 13 + 4a_{13} + 6a_{23} = 0, 25 + 6a_{13} + 8a_{23} = 0$ , also  $2a_{13} = -23, 2a_{23} = 11$ .

3) Für die Koordinatenachsen von Nr. 50, 1 bilde man die Gleichung des Kreises durch den Nullpunkt, durch die Mitte von

$AC$ ,  $BC$  und zeige, daß der Kreis auch durch die Mitte von  $AB$  geht. Man findet als Gleichung des Kreises:

$$2p(x^2 + y^2) - p(s - s')x - (p^2 + ss')y = 0.$$

Dies ist der sogenannte *Feuerbachsche Kreis* des Dreiecks  $ABC$ ; auf ihm liegen die Mitten der Seiten des Dreiecks, die drei Höhenfußpunkte und die Mitten der auf jeder Höhe durch den Höhenschnittpunkt und eine Ecke des Dreiecks begrenzten Strecke.

4) Man entwickle die Beziehung zwischen den gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten eines Kreises. Man bildet das Produkt aus den folgenden beiden äquivalenten Schreibweisen der Determinante des Textes

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 2y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 - 2y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 - 2y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 - 2x_4 - 2y_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir die vier Punkte als 1, 2, 3, 4 und ihre Entfernungen durch 12, 13, 14, 23 usw. bezeichnen, so ist das Produkt

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{12}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{13}^2 & \overline{23}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ \overline{14}^2 & \overline{24}^2 & \overline{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden dieser Determinante gibt die entwickelte Beziehung

$$\overline{12}^4 \cdot \overline{34}^4 + \overline{23}^4 \cdot \overline{14}^4 + \overline{13}^4 \cdot \overline{24}^4 = 2\{\overline{12}^2 \cdot \overline{13}^2 \cdot \overline{24}^2 \cdot \overline{34}^2 + \overline{13}^2 \cdot \overline{14}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{24}^2 + \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{14}^2 \cdot \overline{34}^2\}.$$

Diese Gleichung ist von der Form  $A^4 + B^4 + C^4 = 2(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2)$  oder  $(A^2 - B^2 - C^2)^2 - 4B^2C^2 = 0$ , und hier kann die linke Seite leicht in ein Produkt von vier linearen Faktoren zerlegt werden. Setzt man zur Abkürzung

$$2S = 12 \cdot 34 + 13 \cdot 24 + 14 \cdot 23,$$

so folgt

$$S(S - 12 \cdot 34)(S - 13 \cdot 24)(S - 14 \cdot 23) = 0,$$

d. h. die bekannte Relation des *Ptolemäus*<sup>25)</sup>

$$12 \cdot 34 \pm 13 \cdot 24 \pm 14 \cdot 23 = 0.$$

100. **Lineare Erzeugung des Kreises.** Sind von einem Dreieck  $A_1A_2A_3$  nur die Basisecken  $A_1, A_2$  oder  $x_1|y_1, x_2|y_2$

fest gegeben und wird den übrigen Elementen desselben eine Bedingung auferlegt, so ist die Spitze  $A_3$  offenbar nur so weit bestimmt, daß sie einem gewissen Ort angehören muß.

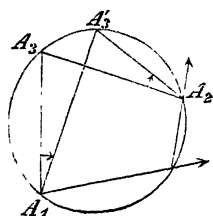


Fig. 54.

Nun sei der Ort dieser Spitze zu bestimmen, wenn sich die Seite  $A_1A_3$  um  $A_1$  und die Seite  $A_2A_3$  um  $A_2$  gleichzeitig um dieselbe Winkelgröße und in demselben Sinn dreht. Ist  $A_1A_2A'_3$  eine neue Lage des Dreiecks (Fig. 54) und sind die Richtungskoeffizienten der Geraden  $A_1A_3$ ,  $A_1A'_3$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_2A'_3$  bez.  $m_1$ ,  $m'_1$ ,  $m_2$ ,  $m'_2$ , so erfordert

$$\sphericalangle A_3A_1A'_3 = \sphericalangle A_3A_2A'_3, \text{ daß } \frac{m'_1 - m_1}{1 + m_1 m'_1} = \frac{m'_2 - m_2}{1 + m_2 m'_2} \quad (\text{S. 66}).$$

Hieraus folgt aber auch

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{m'_2 - m'_1}{1 + m'_1 m'_2} = \mu, \text{ oder } \text{tg } A_1A_3A_2 = \text{tg } A_1A'_3A_2,$$

d. h. der Winkel der Seiten ist unveränderlich.

Somit können wir nach S. 73, wenn die Geraden  $A_1A'_3$  und  $A_2A'_3$  den Winkel von der vorgeschriebenen Tangente  $\text{tg } A_1A_3A_2 = \mu$  einschließen, ihre Gleichungen schreiben

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \quad \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{m + \mu}{1 - m\mu},$$

wo  $m$  nun jeden beliebigen Wert annehmen kann. Je zwei zu demselben Wert von  $m$  gehörige Geraden schneiden sich in einem Punkt des gesuchten Ortes. Die Gleichung, der alle diese Schnittpunkte genügen, entspringt also durch Elimination von  $m$  aus jenen linearen Gleichungen in der Form

$$(13) \quad \begin{aligned} &\mu [(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)] \\ &= [(x - x_1)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1)]. \end{aligned}$$

Dieser Ort ist daher ein Kreis, der durch die beiden festen Punkte  $A_1$  und  $A_2$  geht. Die Gleichung wird mit der des Kreises durch die drei Punkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  (Nr. 99) identisch, sobald wir  $\mu$  durch den Wert ersetzen, den es bei der Substitution von  $x_3|y_3$  für  $x|y$  wirklich erhält.

Diese Erzeugung des Kreises beweist den bekannten Satz von der konstanten Größe der über einem Kreisbogen  $A_1A_2$  stehenden Peripheriewinkel. Man hat dazu nur zu bemerken,

daß der an  $A'_3$  der Basis gegenüberliegende Dreieckswinkel in das Supplement des ursprünglichen übergeht, sobald sich  $A'_3$  mit  $A_3$  nicht mehr auf derselben Seite der Basis befindet, da alsdann der in demselben Sinn von der Seite  $A_1A'_3$  zur Seite  $A_2A'_3$  gemessene Winkel  $\arctan \mu$  dem Dreieck nicht angehören kann.

Drehen sich die Strahlen durch  $A_1$  und  $A_2$  insbesondere so, daß sie zueinander rechtwinklig bleiben oder sind die Dreiecke rechtwinklig ( $\mu = \infty$ ), so erhalten wir durch Elimination von  $m$  aus

$$y - y_1 - m(x - x_1) = 0, \quad m(y - y_2) + x - x_2 = 0$$

die Gleichung des Kreises von gegebenem Durchmesser  $x_1 y_1, x_2 y_2$

$$(x - x_1)(x - x_2) - (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Vgl. Nr. 5, 6.

♣ Nach der Ausdrucksweise des fünften Kapitels sind die Schenkel eines konstanten Peripheriewinkels homologe Strahlen kongruenter Büschel. Daher ist der Kreis das Erzeugnis des Schnittes homologer Strahlen in kongruenten Büscheln.

B. 1) Man prüfe, welche Beispiele von Nr 51 auf Kreise führen, und bestimme die Mittelpunkte und Radien dieser Kreise.

2) Ort des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks aus der Basis  $AB$  und dem Winkel  $\gamma$  an der Spitze  $C$ . (Fig. 55.)

Die Gleichungen der zu den Scheitelseiten gehörigen Höhen  $BH_2$  und  $AH_1$  sind

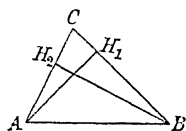


Fig. 55.

$$m(y - y'') + (x - x'') = 0 \quad \text{bez.}$$

$$(m + \tan \gamma)(y - y') + (1 - m \tan \gamma)(x - x') = 0.$$

Hierbei ist  $m$  der Richtungskoeffizient der Seite  $AC$ ;  $x', y'$  und  $x'', y''$  sind die Koordinaten von  $A$  und  $B$ .

Durch Elimination von  $m$  erhalten wir die Gleichung des Ortes

$$(14) \quad \begin{aligned} & \tan \gamma [(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'')] \\ &= -\{x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - y'x''\}; \end{aligned}$$

eine Gleichung, die von (13) nur im Vorzeichen von  $\tan \gamma$  abweicht. Sie stellt daher den Ort dar, den wir dort für die Spitze finden, wenn wir dieselbe Basis geben, aber als Winkel an der Spitze den Supplementwinkel des früheren nehmen.

3) Man soll den Ort eines Punktes  $P$  bestimmen, wenn von Parallelen durch ihn zu den Seiten  $a, b, c$  eines Dreiecks in den

anderen Seiten desselben Punkte  $B, C; C', A'; A'', B''$  so bestimmt werden, daß die Summe der drei Rechtecke

$$BP \cdot PC + C'P \cdot PA' + A''P \cdot PB''$$

konstant ist

Wenn man die Seiten  $a, b$  des Dreiecks zu Koordinatenachsen wählt, so ist die Gleichung des Ortes

$$x \left( a - x - \frac{a}{b} y \right) + y \left( b - y - \frac{b}{a} x \right) + \frac{c^2 xy}{ab} = m^2$$

oder

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma - ax - by + m^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt  $\alpha | \beta$  aus

$$2(\alpha + \beta \cos \gamma) = a, \quad 2(\beta + \alpha \cos \gamma) = b \quad (\text{vgl. Nr. 97})$$

zu bestimmen ist. Der Kreis geht, falls  $m=0$ , durch die Ecken  $0|0$ ,  $a|0$ ,  $0|b$ , er ist also *immer* mit dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreis konzentrisch.

4) Man bestimme den Ort eines Punktes  $P$  so, daß dessen Verbindungslinie mit einem festen Punkt denselben Abschnitt in der  $x$ -Achse bildet, wie die in  $P$  auf der Verbindungslinie errichtete Normale in der  $y$ -Achse.

5) Man bestimme den Ort eines Punktes so, daß die in den Ecken eines Dreiecks auf ihren Verbindungslinien mit ihm errichteten Normalen sich in einem Punkt schneiden.

#### 101. Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden.

Durch Verlegung des Anfangspunktes können wir die Gleichung eines reellen Kreises immer auf die Form bringen  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Die Gleichung einer gegebenen reellen Geraden bringen wir (Nr. 35) auf die Normalform  $x \cos \gamma + y \sin \gamma = p$ . Dann finden wir die den beiden Gleichungen genügenden Wertepaare  $x|y$  durch Gleichsetzung der aus ihnen entwickelten Werte je einer Veränderlichen

$$(15) \quad \frac{p - x \cos \gamma}{\sin \gamma} = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \quad \frac{p - y \sin \gamma}{\cos \gamma} = \sqrt{\rho^2 - y^2}.$$

In rationaler Form sind diese Gleichungen quadratisch und liefern die Wurzeln

$$(16) \quad \begin{cases} x', x'' = p \cos \gamma \pm \sin \gamma \sqrt{\rho^2 - p^2}, \\ y', y'' = p \sin \gamma \mp \cos \gamma \sqrt{\rho^2 - p^2}. \end{cases}$$

Wie die Substitution von  $x'|y'$  oder von  $x''|y''$  in die Gleichung  $x \cos \gamma + y \sin \gamma = p$  zeigt, gehören  $x'|y'$  und  $x''|y''$  so

zusammen, daß die oberen bez. unteren Vorzeichen gleichzeitig gelten. Falls ein imaginärer Kreis gegeben war, ist nur  $\varrho^2$  durch  $-\varrho'^2$  zu ersetzen. Es bleibt also, wenn die Gerade reell ist, auch dann noch Summe und Produkt der Wurzeln reell:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x' + x'') &= p \cos \gamma & \frac{1}{2}(y' + y'') &= p \sin \gamma, \\ x'x'' &= p^2 - \varrho^2 \sin^2 \gamma, & y'y'' &= p^2 - \varrho^2 \cos^2 \gamma.\end{aligned}$$

Weil wir durch *quadratische* Gleichungen die gemeinsamen Wertepaare erhalten, müssen wir (Nr. 28) sagen: *Eine Gerade und ein Kreis haben stets zwei Schnittpunkte.* Es sind aber drei Fälle zu unterscheiden.

Ist erstens der Kreis reell und  $p^2 < \varrho^2$ , d. h. der Abstand der Geraden vom Mittelpunkt des Kreises kleiner als der Radius, so sind die Wurzelpaare reell: *die Gerade schneidet den Kreis in zwei reellen und verschiedenen Punkten.*

Ist dagegen zweitens  $p^2 > \varrho^2$ , d. h. der Abstand größer als der Radius, oder ist der Kreis imaginär, so sind, anschaulich gesprochen, keine Schnittpunkte vorhanden. Weil aber die Wurzelwerte konjugiert komplexe Zahlen sind, so sagen wir: *die Gerade schneidet den Kreis in zwei konjugiert imaginären Punkten* (Nr. 19).

Ist endlich drittens  $p = \varrho$ , d. h. das vom Mittelpunkt auf die Gerade gefällte Lot gleich dem Radius, so fallen die Schnittpunkte in *einen* reellen Punkt  $x = \varrho \cos \gamma$ ,  $y = \varrho \sin \gamma$  zusammen. Man spricht dann bekanntlich von einer *Berührung des Kreises durch die Gerade*. Allgemein bezeichnet die analytische Geometrie eine Gerade als *Tangente einer Kurve*, im Unterschied von den *Sekanten*, wenn von den Schnittpunkten der Geraden und der Kurve zwei vereinigt liegen (Nr. 16).\*) Die Tangenten in imaginären Punkten eines Kreises sind ebenfalls imaginäre Geraden.

Die von zwei Punkten eines Kreises begrenzte Strecke heißt eine *Sehne*. Die Mitte  $M$  der Sehne in der gegebenen Geraden hat die Koordinaten  $p \cos \gamma | p \sin \gamma$ ; der sie ent-

\*) Dabei sind aber gewisse Punkte wie der reelle Punkt des Nullkreises vorläufig auszuschließen.



haltende Kreisdurchmesser hat die Gleichung  $y = x \operatorname{tg} \gamma$ , ist daher zur Sehne rechtwinklig. Also geht das Mittellot jeder Kreissehne durch den Mittelpunkt des Kreises, und *die Mitten aller parallelen Sehnen liegen auf dem zu ihnen rechtwinkligen Durchmesser* oder nach der Ausdrucksweise von Nr. 139: beim Kreise sind je zwei konjugierte Durchmesser zueinander rechtwinklig. Verschieben wir also eine reelle Gerade parallel mit sich selbst, so daß  $p$  von Null an wächst, so nimmt die Sehnenlänge  $2\sqrt{\varrho^2 - p^2}$  im reellen Kreis ab, wird zu Null für die Tangente  $p = \varrho$ , und bei weiterer Entfernung rein imaginär. Die Sehnenmitte bleibt reell und fällt in der Tangente mit dem Berührungspunkt zusammen. *Daher ist die Tangente in einem Punkt des Kreises die Normale zum Radius desselben und umgekehrt.*

B. 1) Die Koordinaten der Schnittpunkte von

$$x^2 + y^2 = 65 \text{ und } 3x + y = 25 \text{ sind } 7 \mid 4, 8 \mid 1.$$

2) Die Gerade  $4x + 3y = 35c$  berührt den Kreis  $(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$  im Punkte  $5c \mid 5c$ .

3) Die Abszissen der Schnittpunkte einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden  $y = mx$  mit dem Kreis

$$a_{11}(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sind gegeben durch die Gleichung

$$a_{11}(1 + 2m \cos \omega + m^2)x^2 + 2(a_{13} + a_{23}m)x + a_{33} = 0.$$

Diese hat gleiche Wurzeln, wenn man  $m$  aus der quadratischen Gleichung bestimmt

$$(a_{13} + a_{23}m)^2 = a_{11}a_{33}(1 + 2m \cos \omega + m^2).$$

4) Unter welcher Bedingung wird die durch den Kreis  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  in der Geraden  $x \cos \gamma + y \sin \gamma = p$  gebildete Sehne vom Punkt  $P_0(x_0 \mid y_0)$  aus unter rechtem Winkel gesehen?

Seien  $x' \mid y'$ ,  $x'' \mid y''$  die Koordinaten der Schnittpunkte  $P'$ ,  $P''$  der Geraden mit dem Kreis, so liefert die Einsetzung der Werte des Textes für  $x' + x''$ ,  $y' + y''$ ,  $x'x''$ ,  $y'y''$  in  $(x_0 - x')(x_0 - x'') + (y_0 - y')(y_0 - y'') = 0$  die Bedingung, unter der der Winkel  $P'P_0P''$  ein Rechter ist (Nr. 100 und Beispiel 6 zu Nr. 5). Man erhält

$$x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 \cos \gamma - 2py_0 \sin \gamma + 2p^2 - \varrho^2 = 0.$$

5) Ort des Mittelpunktes  $x|y$  der in 4) vorkommenden Sehnen.

Es ist  $p \cos \gamma = x$ ,  $p \sin \gamma = y$ ,  $p^2 = x^2 + y^2$ ; durch die Einführung dieser Werte in die in 4) gefundene Bedingung folgt

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + x^2 + y^2 = \rho^2.$$

6) Man soll einen Punkt  $x_0|y_0$  so finden, daß, wenn man durch ihn eine Sehne eines Kreises zieht, das Rechteck der senkrechten Abstände ihrer Endpunkte von einer gegebenen Geraden konstant ist.

Man nehme die Gerade als  $x$ -Achse, und als  $y$ -Achse das vom Mittelpunkt des Kreises auf sie gefällte Lot, dessen Länge  $\beta$  sei. Dann ist die Gleichung des Kreises  $x^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ . Die Gleichung einer Geraden durch  $x_0|y_0$  ist  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

Eliminiert man  $x$  aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man eine quadratische Gleichung für  $y$ , für die das Produkt der Wurzeln gleich  $\frac{(y_0 - mx_0)^2 + m^2(\beta^2 - \rho^2)}{1 + m^2}$  ist. Dies Produkt kann also nur dann von  $m$  unabhängig sein, wenn der Zähler durch  $(1 + m^2)$  teilbar ist, d. h. nur dann, wenn

$$x_0 = 0, y_0^2 = \beta^2 - \rho^2 \text{ ist.}$$

7) Wenn durch irgend einen festen Punkt in einem Durchmesser des Kreises eine Sehne gezogen und jeder ihrer Endpunkte mit einem der Endpunkte des Durchmessers verbunden wird, so schneiden diese Verbindungslinien in der Tangente des Kreises am anderen Endpunkt des Durchmessers Segmente ab, deren Rechteck konstant ist.

Man hat zunächst die Gleichung des Geradenpaares aufzustellen, das den Nullpunkt mit den Schnittpunkten des Kreises  $x^2 + y^2 - 2\rho x = 0$  und der durch den festen Punkt  $x_0|0$  gezogenen Sehne verbindet. Sind  $x'|y'$  die Koordinaten eines der beiden eben genannten Schnittpunkte, so stellt  $y'x - x'y = 0$  dessen Verbindungslinie mit dem Nullpunkt dar. Durch Elimination von  $x'|y'$  aus dieser Gleichung, aus  $x'^2 + y'^2 - 2\rho x' = 0$  und aus  $y' = m(x' - x_0)$  erhält man die gewünschte Gleichung des Geradenpaares. Man findet aus ihr die in der bezeichneten Tangente gebildeten Abschnitte als die zu  $x = 2\rho$  gehörigen Werte von  $y$ . Ihr Produkt wird als unabhängig von  $m$  gefunden, nämlich gleich  $4\rho^2 \frac{x_0 - 2\rho}{x_0}$ .

102. Die Ergebnisse von Nr. 101 gelten unmittelbar auch für die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kreises von allgemeiner Gleichung  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$  mit einer Geraden

$a_1x + a_2y + a_3 = 0$ , wenn wir diese letzte Gleichung auf die Form bringen  $(x - \alpha) \cos \gamma + (y - \beta) \sin \gamma = p$ . Alsdann ist in (15) nur  $x|y$  durch  $x - \alpha|y - \beta$  zu ersetzen.

Zur Bestimmung der Lage eines Kreises von gegebener Gleichung  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$  ist es oft ebenso zweckmäßig, die in den Achsen erzeugten Abschnitte zu bestimmen, als Mittelpunkt und Radius zu suchen. Von den vier Achsenschnittpunkten reichen dann schon drei aus (Nr. 99). Man erhält diese Abschnitte für  $y = 0$ , bez.  $x = 0$  aus den Gleichungen

$$x^2 - 2\alpha x + \pi = 0, \quad y^2 - 2\beta y + \pi = 0.$$

Daher berührt der Kreis die  $x$ -Achse oder  $y$ -Achse, je nachdem  $\pi = \alpha^2$  oder  $\pi = \beta^2$  ist.

Sind umgekehrt in der  $x$ -Achse zwei konjugiert imaginäre Punkte gegeben, so können wir sie statt nach Nr. 20 auch dadurch geometrisch definieren, daß wir einen reellen Kreis angeben, dessen Achsenschnittpunkte sie sind. So liegt das Punktpaar  $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \pi}$  auf allen Kreisen  $\alpha|\beta|\pi$ , für die  $\beta$  beliebig und  $\pi^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \pi$  gewählt wird. *Somit kann überhaupt jedes Punktpaar durch seinen reellen Träger und einen reellen Kreis definiert werden.*

B. 1) Die Achsenschnittpunkte des Kreises

$$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0 \quad \text{sind} \quad 3|0, 2|0; 0|6, 0|1.$$

2) Die Gleichung des Kreises, der die Achsen in Abständen  $= a$  vom Anfangspunkt berührt, ist

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

3) Soll man die Gleichung eines Kreises so bestimmen, daß die eine der Achsen eine Tangente ist, die andere sie im Berührungspunkt unter dem Winkel  $\omega$  schneidet, so erkennt man aus einer Figur leicht, daß der Abschnitt in der letztgenannten Achse gleich  $2r \sin \omega$  ist. Die gesuchte Gleichung lautet

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 - 2ry \sin \omega = 0.$$

\* 103. **Imaginäre Kreispunkte im Unendlichen.** Ebenso wie jede reelle Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkt größer als die Länge des Radius ist, schneidet auch die unendlich ferne Gerade jeden Kreis in zwei konjugiert imaginären Punkten oder Richtungen. Um zu erkennen, für welche unendlich großen

Wertepaare die Kreisgleichung befriedigt wird, dividieren wir sie zuerst durch  $(x - \alpha)^2$  und erhalten

$$1 + \left(\frac{y - \beta}{x - \alpha}\right)^2 \mp \left(\frac{\varrho}{x - \alpha}\right)^2 = 0.$$

Setzen wir dann  $x = \infty$ ,  $y = \infty$  voraus, so wird  $\varrho : (x - \alpha) = 0$ , dagegen behält  $(y - \beta) : (x - \alpha)$  seinen Wert als Richtungskoeffizient  $m$  der nach jenem unendlich fernen Punkt aus  $\alpha | \beta$  gezogenen Geraden. Also liefert die Gleichung eines jeden Kreises dieselbe, von  $\alpha | \beta$  und  $\varrho$  unabhängige Beziehung

$$(17) \quad 1 + m^2 = 0, \quad \text{woraus} \quad m = \pm i \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Hierdurch sind aber die beiden absoluten Richtungen der Ebene definiert (Nr. 61). *Somit gehen alle Kreise der Ebene durch zwei in den absoluten Richtungen im Unendlichen gelegene Punkte, die als die zwei unendlich fernen imaginären Kreispunkte bezeichnet werden.*

Der Nullkreis  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$  ist als ein Geradenpaar  $x - \alpha \pm i(y - \beta) = 0$  aufzufassen, das den Punkt  $\alpha | \beta$  mit den beiden imaginären Kreispunkten verbindet; man nennt daher diese Verbindungslinien ein *zirkulares Geradenpaar*. Dasselbe kann jeden konzentrischen Kreis  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \mp \varrho^2 = 0$  nur in den Punkten schneiden, in denen er die unendlich ferne Gerade trifft, weil das gemeinsame Bestehen beider Gleichungen  $\varrho^2 = 0$  erfordert, und dies hat nur als Gleichung der unendlich fernen Geraden geometrische Bedeutung (Nr. 75). Demnach schneidet jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gezogene Gerade absoluter Richtung den Kreis nur in einem, dem unendlich fernen Punkt. Daher ist diese Gerade in jenem ausgezeichneten Punkt Tangente des Kreises, wie sie in der Tat auch zu dem Radius des Berührungspunktes, d. h. zu sich selbst rechtwinklig ist (Nr. 61). Man nennt Tangenten in unendlich fernen Punkten einer Kurve insbesondere *Asymptoten* der Kurve. *Die Geraden absoluter Richtung aus  $\alpha | \beta$  sind also die imaginären Asymptoten aller Kreise vom Mittelpunkt  $\alpha | \beta$ .*

Umgekehrt können wir nunmehr die Kriterien von Nr. 97 durch den Satz ersetzen: *Die durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellte Kurve ist ein Kreis, wenn sie durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht.* Dividieren wir

nämlich die allgemeine quadratische Gleichung von Nr. 96 durch  $x^2$  und setzen nachher  $x = \infty$ , so reduziert sie sich auf

$$a_{11} + 2a_{12} \frac{y}{x} + a_{22} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0;$$

soll dies mit der Grenzform der Kreisgleichung  $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$  identisch sein, so muß  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$  sein. Der Kreis ist also eine Kurve zweiter Ordnung, die zwei ausgezeichnete feste Punkte enthält; so ist nun erklärlich, warum die Gleichung eines Kreises schon durch drei statt durch fünf Koeffizientenverhältnisse bestimmt ist.

104. Gleichung der Tangente in einem Punkt  $x'|y'$  des Kreises. Sind  $x'|y'$  und  $x''|y''$  zwei Punkte des Kreises  $x^2 + y^2 = \varrho^2$ , so hat ihre Verbindungsgerade, wegen

$\varrho^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$  oder  $x'^2 - x''^2 = y''^2 - y'^2$ ,  
den Richtungskoeffizienten

$$(18) \quad m = (y' - y'') : (x' - x'') = -(x' + x'') : (y' + y'').$$

Also lautet die Gleichung der Kreissehne  $x'|y'$ ,  $x''|y''$  (vgl. Nr. 101)

$$(19) \quad \frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Halten wir nun  $x'|y'$  fest und lassen  $x''|y''$  sich auf dem Kreise gegen  $x'|y'$  hin bewegen, so dreht sich die Sehne um  $x'|y'$  und nimmt an Länge ab. Wenn ihr zweiter Endpunkt  $x''|y''$  jenem ersten unendlich nahe rückt oder mit ihm zusammenfällt, so hat die Sekante die Sehnenlänge Null oder sie wird nach Definition (Nr. 101) zur Tangente in  $x'|y'$ . Die Gleichung dieser Grenzlage erhalten wir durch Einsetzung von  $x'' = x'$ ,  $y'' = y'$  als

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{x'}{y'}.$$

Durch den Grenzübergang wird also die Tangente als die Verbindungsgerade zweier unendlich nahen Punkte der Kurve definiert.

Durch eine einfache Reduktion folgt als Gleichung der Tangente

$$(20) \quad x'x + y'y - \varrho^2 = 0.$$

Diese zeigt, daß die Tangente in der Tat rechtwinklig zu dem Radius  $y'x - x'y = 0$  des Berührungspunktes ist. Man kann

ihre Gleichung auch in der scheinbar quadratischen Form schreiben<sup>26)</sup>

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 - \varrho^2.$$

Durch die Substitution von  $x - \alpha | y - \beta$ ,  $x' - \alpha | y' - \beta$  für  $x | y$ ,  $x' | y'$  folgt: *Die Tangente des Kreises*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2 = 0$$

*im Punkt  $x' | y'$  hat die Gleichung*

$$(21) \quad (x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) - \varrho^2 = 0,$$

die infolge ihrer Ähnlichkeit mit der Kreisgleichung leicht zu merken ist.

B. 1) Die Sehne zwischen den Punkten  $x' | y'$  und  $x'' | y''$  des Kreises  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  ist

$$(x' + x'')x + (y' + y'')y = \varrho^2 + x'x'' + y'y''.$$

2) Die Tangente im Punkt

$$5 | 4 \text{ zu } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \text{ ist } 3x + y = 19.$$

3) Die Gerade  $y = mx + b$  berührt den Kreis  $x^2 + y^2 = \varrho^2$ , wenn  $b^2 = \varrho^2(1 + m^2)$  ist.

### \* 105. Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten.

Eine Gerade von den Linienkoordinaten  $u | v$  oder der Gleichung  $ux + vy + 1 = 0$  berührt den Kreis vom Mittelpunkt  $\alpha | \beta$  und Radius  $\varrho$ , wenn ihr senkrechter Abstand von  $\alpha | \beta$  gleich  $\varrho$  ist (Nr. 101). Nach Nr. 79 haben also  $u | v$  nur der Bedingung zu genügen

$$\frac{u\alpha + v\beta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \varrho \quad \text{oder}$$

$$(22) \quad (\alpha u + \beta v + 1)^2 - \varrho^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Alle Geraden, deren Koordinaten dieser Gleichung genügen, sind Tangenten des Kreises, und umgekehrt. Daher heißt sie *die Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten oder die Tangentialgleichung des Kreises*.

Die Gleichung ist wiederum vom zweiten Grade in  $u | v$ , aber von einer weniger übersichtlichen Gestalt, als die Kreisgleichung in Punktkoordinaten. Nur für die Kreise um den Anfangspunkt der Koordinaten  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  bleibt die analoge Form bestehen  $u^2 + v^2 = \frac{1}{\varrho^2}$ .

Ist  $u|v$  eine Tangente dieses Kreises, so ist ihr Berührungspunkt ihr Schnittpunkt mit  $vx - uy = 0$ , also

$$x = -\varrho^2 u | y = -\varrho^2 v.$$

Eine Tangente dieses Kreises geht durch einen nicht auf der Peripherie liegenden Punkt  $x'|y'$ , wenn ihre Koordinaten gleichzeitig mit  $\varrho^2(u^2 + v^2) = 1$  die lineare Bedingung erfüllen  $x'u + y'v + 1 = 0$  (Nr. 79). Da aber diese Gleichungen stets zwei gemeinsame Wertepaare  $u|v$  haben, so *gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei Tangenten des Kreises*, wie in jeder Geraden zwei Punkte desselben liegen (Nr. 82). Aus diesem Grunde wird der Kreis auch als *Kurve zweiter Klasse* bezeichnet.

**106. Tangenten aus einem Punkt  $x'|y'$  an den Kreis.** Durch einen nicht auf der Peripherie liegenden Punkt  $x'|y'$  gehen zwei Kreistangenten, deren Berührungspunkte zunächst zu bestimmen sind. Ist  $x''|y''$  einer derselben, so erfüllen seine Koordinaten gleichzeitig die Gleichungen

$$(23) \quad x''^2 + y''^2 = \varrho^2, \quad x'x'' + y'y'' = \varrho^2,$$

weil der Punkt auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  liegt und weil seine Tangente  $x''x + y''y = \varrho^2$  durch den gegebenen Punkt gehen soll. Durch Auflösung dieser Bedingungen erhalten wir für die *Koordinaten der Berührungspunkte*:

$$(24) \quad x'' = \frac{\varrho^2 x' \pm \varrho y' \sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2}}{x'^2 + y'^2}, \quad y'' = \frac{\varrho^2 y' \mp \varrho x' \sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2}}{x'^2 + y'^2}.$$

Somit sind die Tangenten aus einem reellen Punkt nur dann reell und voneinander verschieden, wenn der Kreis reell und  $x'^2 + y'^2 > \varrho^2$  ist, d. h. der Punkt außerhalb des Kreises liegt. Aus einem Punkt des Innern oder an einen imaginären Kreis gehen konjugiert imaginäre Tangenten. Die beiden Tangenten fallen zusammen, wenn  $x'^2 + y'^2 = \varrho^2$  ist oder der Punkt auf der Kreisperipherie selbst liegt. Wie man aus (23) sieht, können die Berührungspunkte auch als die Schnittpunkte des Kreises mit der bestimmten Geraden  $x'x + y'y = \varrho^2$  definiert werden. Ihre Gleichung hat die Form derjenigen der Tangente und wird mit dieser identisch, wenn  $x'|y'$  dem Kreise angehört. Wir werden diese Gerade später (Nr. 110) als *Polare* von  $x'|y'$  weiter betrachten.

Die Gleichungen der Tangenten ergeben sich durch Einsetzung der Ausdrücke (24) in  $x''x + y''y - \varrho^2 = 0$  als

$$\varrho [x'(x - x') + y'(y - y')] \pm (y'x - x'y) \sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2} = 0.$$

Das Produkt dieser beiden Gleichungen liefert, in einer von Wurzelgrößen freien Form, die Gleichung des Tangentenpaares aus  $x'|y'$  (vgl. Nr. 57):

$$\varrho^2 [x'(x - x') + y'(y - y')]^2 - (x'^2 + y'^2 - \varrho^2) (y'x - x'y)^2 = 0,$$

die nach Wegheben des Faktors  $x'^2 + y'^2$  in der einfacheren Gestalt

$$(25) \quad \varrho^2 \{ (x - x')^2 + (y - y')^2 \} - (xy' - yx')^2 = 0$$

erscheint.\*)

Für die Abstände der Berührungspunkte von  $x'|y'$ , die Längen der Tangenten, erhält man einen einfachen, für beide gleichen Ausdruck. Es ist nämlich, da  $x''^2 + y''^2 = \varrho^2$ ,  $x'x'' + y'y'' = \varrho^2$ , das Quadrat der Tangentenlänge

$$(26) \quad t^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = x'^2 + y'^2 - \varrho^2,$$

d. h. gleich dem um das Quadrat des Radius verminderten Quadrat der Entfernung des Punktes  $x'|y'$  vom Mittelpunkt des Kreises. In der Tat bilden die Tangenten mit den Radien der Berührungspunkte die Katheten rechtwinkliger Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse.

107. **Parameterdarstellung des Kreises.** Beim Gebrauch von Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  haben die Kreise um den Nullpunkt offenbar Gleichungen von der Form  $r = \varrho$  (Nr. 21). Jeder einzelne Punkt eines solchen Kreises ist also durch den Winkel  $\vartheta$  seines Radius gegen die Achse bestimmt. Statt die Lage eines Punktes im Kreise durch zwei untereinander abhängige Koordinaten  $x|y$  zu fixieren, ist es oft zweckmäßig, diese in Funktion der einzigen unabhängigen Veränderlichen  $\vartheta$  auszudrücken, die wir dann den *Parameter des Punktes*  $x|y$  oder  $\vartheta$  im Kreise nennen.

Ein Punkt  $x'|y'$  eines Kreises vom Mittelpunkt  $\alpha|\beta$  und dem Radius  $\varrho$  wird mit Hilfe seines Parameters  $\vartheta'$  bestimmt durch

$$(27) \quad x' = \alpha + \varrho \cos \vartheta', \quad y' = \beta + \varrho \sin \vartheta'.$$

\*) Man weist leicht nach, daß diese Gleichung gemäß Nr. 56 in  $x - x'|y - y'$  homogen ist.



Nimmt  $\vartheta'$  alle Werte an, so durchläuft der Punkt die Peripherie.

Demnach wird die Gleichung der Tangente im Punkt  $\vartheta'$  (Nr. 104)

$$(x - \alpha) \cos \vartheta' + (y - \beta) \sin \vartheta' - \rho = 0.$$

Wenn daher umgekehrt die Gleichung einer Geraden eine Unbestimmte  $\vartheta'$  derart enthält, daß sie diese Form annimmt, so berührt sie den Kreis  $\alpha | \beta; \rho$ .

Jene Gleichung der Tangente ist leicht zu bestätigen, indem wir die Gleichung der Sehne der Punkte  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$  direkt bilden, etwa für einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt. Der die Sehne halbierende Radius gehört zu dem Winkel  $\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')$  und der senkrechte Abstand der Sehne vom Mittelpunkt des Kreises ist  $\rho \cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')$ . Also lautet die Normalform der Gleichung der Sehne

$$(28) x \cos \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') + y \sin \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') - \rho \cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'') = 0.$$

Für  $\vartheta'' = \vartheta'$  geht sie in die Gleichung der Tangente über.

B. 1) Die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in zwei Punkten  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$  des Kreises sind

$$x = \rho \frac{\cos \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')}, \quad y = \rho \frac{\sin \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')}.$$

2) Ort des Schnittpunktes der Tangenten an den Enden einer Sehne von konstanter Länge.

Indem wir die Substitution dieses Paragraphen in die Gleichung  $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \text{konst.}$  machen, reduziert sie sich auf  $\cos(\vartheta' - \vartheta'') = \text{konst.}$

War die Länge der Sehne  $= 2\rho \sin \delta$ , so ist  $\vartheta' - \vartheta'' = 2\delta$ . Die im letzten Beispiel gefundenen Koordinaten erfüllen die Bedingung  $(x^2 + y^2) \cos^2 \delta = \rho^2$  als die Gleichung des Ortes.

3) Der Ort eines Punktes, der eine Sehne von gegebener Länge in einem bestimmten Verhältnis teilt, ist  $x^2 + y^2 = \text{konst.}$

4) Alle Sehnen von konstanter Länge in einem Kreis berühren einen zweiten Kreis. Denn in der Gleichung (28) der Sehne ist gemäß 2)  $\vartheta' - \vartheta'' = 2\delta$  bekannt und  $\vartheta' + \vartheta''$  veränderlich; die Sehne berührt daher stets den Kreis

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \delta.$$

5) Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist und eine Gerade so gelegt wird, daß das  $m_1$  fache ihres Abstands vom ersten Punkt und das  $m_2$  fache ihres Abstands vom zweiten Punkt usw. eine

konstante Summe gibt, so umhüllt die Gerade einen festen Kreis.<sup>27)</sup> (Vgl. Nr. 52, 4, wo die Summe Null ist.)

Indem wir die Bezeichnung jenes Beispiels annehmen, haben wir statt der dort gefundenen Gleichung nur zu schreiben:

$$[x \Sigma m_i - \Sigma m_i x_i] \cos \alpha + [y \Sigma m_i - \Sigma m_i y_i] \sin \alpha = \text{konst.}$$

Also berührt die Gerade stets den Kreis

$$\left[ x - \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \right]^2 + \left[ y - \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} \right]^2 = \text{konst.},$$

dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt der gegebenen Punkte ist, wenn man diesen die Maßen  $m_1, m_2, \dots$  beigelegt denkt.

108. Die allgemeine Polargleichung des Kreises können wir erhalten, indem wir in seine auf rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung durch  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ;  $\alpha = c \cos \gamma$ ,  $\beta = c \sin \gamma$  die Polarkoordinaten einführen.

Sie folgt auch selbständig aus der geometrischen Natur des Kreises so: Sei  $O$  der Nullpunkt,  $C$  der Kreismittelpunkt, seien  $OP = r$ ,  $OC = c$ , endlich  $\vartheta$  und  $\gamma$  die Winkel von  $OP$  und  $OC$  gegen eine beliebige Achse  $x$ , also  $\angle COP = \vartheta - \gamma$ . Dann ist (Fig. 56):

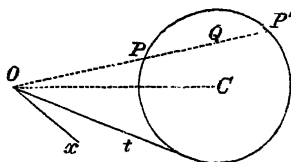


Fig. 56.

$$\overline{CP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OP}^2 - 2 OC \cdot OP \cdot \cos COP$$

und dies gibt die Gleichung in Polarkoordinaten

$$(29) \quad r^2 - 2 cr \cos (\vartheta - \gamma) + c^2 - \varrho^2 = 0.$$

Fällt die Nullachse mit  $OC$  zusammen, so ist  $\gamma = 0$  zu setzen, und für  $c = 0$  bleibt  $r^2 = \varrho^2$ . Nehmen wir den Nullpunkt auf dem Kreise an, so daß  $c = \varrho$  wird, so lautet die Gleichung, nachdem der Faktor  $r$  abgesondert ist,  $r = 2 \varrho \cos (\vartheta - \gamma)$ . Ihre geometrische Bedeutung ist die, daß der Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein Rechter ist; denn nur so ist der Vektor  $r$  die Projektion des Durchmessers  $2 \varrho$ .

Umgekehrt stellt jede Polargleichung von der Form

$$r^2 + 2 hr \cos \vartheta + 2 kr \sin \vartheta + l = 0$$

einen Kreis dar; es wird nämlich

$$c^2 = h^2 + k^2, \quad \operatorname{tg} \gamma = k:h, \quad \varrho^2 = h^2 + k^2 - l.$$

Sie enthält den Vektor scheinbar nur linear, wenn  $l = 0$  oder  $l = \infty$ , während  $h:l$ ,  $k:l$  endliche Werte behalten, d. h. wenn der Kreis den Nullpunkt enthält oder zerfällt (Nr. 99).

Die Polargleichung der Tangente in  $r' | \vartheta'$  ergibt sich auf dem Wege der Substitution in Gleichung (21) von Nr. 104 in der Form

$$(30) \quad r'r \cos(\vartheta' - \vartheta) - cr \cos(\gamma - \vartheta) - cr' \cos(\gamma - \vartheta') + c^2 = \varrho^2.$$

B. 1) Ort der Mittelpunkte  $Q$  der Sehnen  $PP'$  im Kreise, die durch einen festen Punkt  $O$  gehen.

Es soll  $OP + OP' = 2OQ$  sein, aber die Summe der Wurzeln der Polargleichung (29) ist  $= 2c \cos \vartheta$ , wenn man annimmt, daß der Mittelpunkt des Kreises auf der Polarachse ( $\gamma = 0$ ) liegt; daher folgt  $OQ = c \cos \vartheta$ , d. h. der Ort hat die Polargleichung  $r = c \cos \vartheta$  und ist somit der über  $OC$  als Durchmesser beschriebene Kreis.

2) Wenn  $OQ$  als das harmonische Mittel (Nr. 15, 2) zwischen  $OP$  und  $OP'$ , d. h. wenn  $OQ = \frac{2OP \cdot OP'}{OP + OP'}$  genommen wird, so ist wegen  $OP \cdot OP' = c^2 - \varrho^2$ ,  $OP + OP' = 2c \cos \vartheta$  die Gleichung des Ortes

$$r \cos \vartheta = \frac{c^2 - \varrho^2}{c}$$

eine zu  $OC$  rechtwinklige Gerade, die von  $O$  den Abstand  $c - \frac{\varrho^2}{c}$  und also von  $C$  den Abstand  $\frac{\varrho^2}{c}$  hat. Wie aus späteren Betrachtungen (Nr. 110) folgt, ist die Gerade die Polare von  $O$  in bezug auf den Kreis.

3) Ein Punkt  $O$  und eine Gerade  $r \cos(\vartheta - \alpha) = p$  sind gegeben. Der Ort von  $Q$ , wenn  $OQ$  als der reziproke Wert von  $OP$ , dem Vektor eines Punktes der Geraden genommen wird, ist der durch  $O$  gehende Kreis  $pr = \cos(\vartheta - \alpha)$ .

4) Von einem Dreieck ist der Scheitel, der Scheitelwinkel  $C$  und das Rechteck der die Schenkel dieses Winkels bildenden Seiten gegeben; welchen Ort beschreibt die eine Basisecke, wenn sich die andere in einer Geraden oder einem Kreise bewegt?

Wir nehmen den Scheitel zum Pol, setzen die Längen der Seiten gleich  $r$  und  $r'$ , ihre Winkel gegen die Achse gleich  $\vartheta$  und  $\vartheta'$ ; alsdann finden wir, indem wir für  $r$  und für  $\vartheta$  in die Gleichung des gegebenen Ortes  $k^2: r'$  und  $C + \vartheta'$  einsetzen, eine Beziehung zwischen  $r'$  und  $\vartheta'$ , die die Polargleichung des durch die andere Basisecke beschriebenen Ortes ist. Diese Aufgabe wird in

entsprechender Art gelöst, wenn statt des Produktes das Verhältnis der Seiten gegeben ist.

5) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreise ist eine Gerade gezogen; man hat den Ort für den Mittelpunkt des zwischen die Kreise gefaßten Stückes derselben zu finden.

Die Gleichungen der Kreise sind von der Form  $r = 2\rho \cos(\vartheta - \gamma)$  und  $r = 2\rho' \cos(\vartheta - \gamma')$ , die Gleichung des Ortes ist alsdann  $r = \rho \cos(\vartheta - \gamma) + \rho' \cos(\vartheta - \gamma')$ ; sie stellt einen Kreis dar.

6) Wenn durch einen beliebigen Punkt  $O$  in der Peripherie eines Kreises drei Sehnen willkürlich gezogen werden und über jeder als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, so schneiden sich diese drei Kreise in drei anderen Punkten, die in einer Geraden liegen.<sup>28)</sup>

Nehmen wir den festen Punkt zum Pol  $O$  und  $d$  als den Durchmesser des ursprünglichen Kreises, so ist  $r = d \cos \vartheta$  die Gleichung dieses Kreises. Bildet der Durchmesser eines der anderen Kreise mit der Achse den Winkel  $\eta$ , so ist  $d \cos \eta$  die Länge dieses Durchmessers und  $r = d \cos \eta \cos(\vartheta - \eta)$  die Gleichung des Kreises; ebenso ist  $r = d \cos \eta' \cos(\vartheta - \eta')$  die Gleichung des zweiten Kreises.

Um die Polarkoordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Kreise zu finden, suchen wir den Wert von  $\vartheta$ , für den

$$\cos \eta \cos(\vartheta - \eta) = \cos \eta' \cos(\vartheta - \eta')$$

ist und finden leicht  $\vartheta = \eta + \eta'$ ; alsdann folgt  $r = d \cos \eta \cos \eta'$ . Ebenso sind die Polarkoordinaten des Schnittpunktes des ersten und eines dritten Kreises  $\vartheta = \eta + \eta''$ ,  $r = d \cos \eta \cos \eta''$ .

Um nun die Polargleichung der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie zu finden, setzen wir in die allgemeine Gleichung der Geraden  $r \cos(\vartheta - \sigma) = p$  (Nr. 47) nacheinander diese Werte von  $\vartheta$  und  $r$  ein; aus den zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $p$  und  $\sigma$  ergibt sich

$p = d \cos \eta \cos \eta' \cos[\sigma - (\eta + \eta')] = d \cos \eta \cos \eta'' \cos[\sigma - (\eta + \eta'')]$ , also ähnlich wie vorhin

$$\sigma = \eta + \eta' + \eta'' \text{ und } p = d \cos \eta \cos \eta' \cos \eta''.$$

Die Symmetrie dieser Werte zeigt, daß es dieselbe Gerade ist, die die Schnittpunkte des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Kreises verbindet.

7) Ein Rhombus  $MNOP$  von gegebener Seite  $b$  aber veränderlichen Winkeln bewegt sich so, daß die Ecken  $M$  und  $O$  auf einem festen Kreise vom Mittelpunkt  $C$  und Radius  $a$  bleiben, während die Ecke  $N$  einen anderen festen Kreis vom Mittelpunkt

$C_1$  und vom Radius  $c$  durchläuft, wobei der Abstand  $CC_1 = d$  ist; man bestimme den Ort der vierten Ecke  $P$  (Fig. 57).

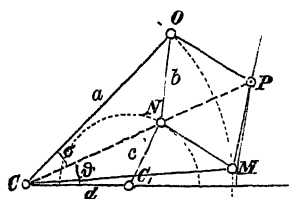


Fig. 57.

Wenn wir den Mittelpunkt  $C$  zum Pol und die Zentrale  $CC_1$  zur Achse von Polarkoordinaten nehmen, so daß  $CP = r$  und  $\sphericalangle C_1CP = \sphericalangle C_1CN = \vartheta$  ist, so haben wir für  $L$  als Mittelpunkt des Rhombus

$$CN = CL - NL, \quad CP = CL + NL \\ \text{oder } CN \cdot CP = \overline{CL}^2 - \overline{NL}^2,$$

somit für  $\sphericalangle NCO = \sigma$

$$(31) \quad CN \cdot CP = a^2 \cos^2 \sigma - b^2 + a^2 \sin^2 \sigma = a^2 - b^2;$$

auch ist  $CN = d \cos \vartheta + \sqrt{c^2 - d^2 \sin^2 \vartheta}$ , also

$$\{d \cos \vartheta + \sqrt{c^2 - d^2 \sin^2 \vartheta}\} r = a^2 - b^2$$

oder nach leichter Umformung

$$(32) \quad r^2 - 2r \frac{d(a^2 - b^2) \cos \vartheta}{d^2 - c^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{d^2 - c^2} = 0.$$

Der Ort ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Zentrale im Abstand  $\frac{d(a^2 - b^2)}{d^2 - c^2}$  vom Pol liegt. Er geht mit  $d = c$ , also wenn  $C$  auf der Peripherie des von  $N$  durchlaufenen Kreises liegt, in eine Gerade über, die rechtwinklig zu  $CC_1$  im Abstände  $\frac{a^2 - b^2}{2d}$  von  $C$  verläuft. In diesem Falle hat man die Peaucelliersche Geradführung<sup>29)</sup>: eine hin und her gehende Kurbelbewegung von  $N$  erzeugt durch das Gliederviereck  $MNOP$  eine geradlinige hin und her gehende Bewegung von  $P$ .

Setzt man  $CN = r_1$ , so ist nach (31)  $rr_1 = a^2 - b^2$  oder  $r_1 = (a^2 - b^2) : r$ . Diese Gleichung findet stets zwischen den auf  $CNP$  gelegenen Radienvektoren  $r$  und  $r_1$  statt; beschreibt  $N$  irgend eine Kurve  $k_1$ , so durchläuft  $P$  eine andere Kurve  $k$ , die aus  $k_1$  vermöge einer „Transformation durch reziproke Radien“ entsteht. Vgl. auch Nr. 125 und 126.

109. **Potenz.** Zieht man aus einem beliebig aber fest gewählten Punkt  $O$  beliebige Sekanten eines Kreises, so ist das Produkt der auf jeder Sekante von  $O$  aus gemessenen Abschnitte konstant. Diese Konstante ist also z. B. auch so groß wie das Produkt aus den Abschnitten des von  $O$  ausgehenden Durchmessers, oder so groß wie das Produkt der Längen der von  $O$

zum Kreis gezogenen Normalen. (Vgl. Nr. 42 und weiter Nr. 178 Schluß.)

Denn, nehmen wir  $O$  als Nullpunkt der Polarkoordinaten (Nr. 108), so entsprechen einer Sekante von gegebenem Winkel  $\vartheta$  Abschnitte  $OP' = r'$ ,  $OP'' = r''$ , deren Werte Wurzeln der Polargleichung

$$r^2 - 2cr \cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - \varrho^2 = 0$$

sind. Somit ist ihr Produkt gleich dem konstanten Gliede,

$$r' r'' = c^2 - \varrho^2 = \Pi,$$

also von der Richtung  $\vartheta$  der Sekante *unabhängig*.

Hat nun  $O$  die Koordinaten  $x_0 | y_0$  in dem Achsensystem für das die Kreisgleichung die Konstanten  $\alpha | \beta | \pi$  enthält, so ist der Wert jenes konstanten Produktes  $c^2 - \varrho^2$  oder

$$(33) \quad \begin{aligned} \Pi &= (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - \varrho^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \pi. \end{aligned}$$

*Das Ergebnis  $\Pi$  der Substitution der Koordinaten  $x_0 | y_0$  eines Punktes in die linke Seite der Normalform der Kreisgleichung heißt die Potenz des Punktes in bezug auf den Kreis (oder die Potenz des Kreises in dem Punkte).<sup>30)</sup> Hiernach ist die Potenz nur Null in Punkten der Peripherie. Die Potenz des Nullpunktes in bezug auf den Kreis ist einfach das konstante Glied  $\pi$  der normalen Kreisgleichung. Die Potenz des Kreismittelpunktes ist  $-\varrho^2$ , also das mit Minuszeichen versehene Quadrat des Radius.*

Für jeden reellen Punkt ist die Potenz reell. Bei reellem Kreise ist sie positiv oder negativ, je nachdem die reellen Segmente  $r'$  und  $r''$  gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. Im ersten Fall gibt es unter den reellen Segmenten insbesondere gleiche, nämlich in den durch  $c^2 \sin^2(\vartheta - \gamma) = \varrho^2$  bestimmten Tangenten aus  $O$ . *Also ist die Potenz eines äußeren Punktes positiv und gleich dem Quadrat der Länge  $t$  der von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten* (Nr. 114). Für unendlich ferne Punkte ist die Potenz unendlich groß.

Im zweiten Fall können die Segmente insbesondere entgegengesetzt gleich sein,  $r' + r'' = 0$ , nämlich für die in  $O$  halbierte Sehne, die wegen  $\cos(\vartheta - \gamma) = 0$  zum Durchmesser von  $O$  normal ist. *Also ist die Potenz eines inneren Punktes das*

negative Quadrat der halben kürzesten Sehne durch denselben. In bezug auf einen Nullkreis ist die Potenz jedes Punktes gleich dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkt.

Man nennt die Quadratwurzel  $\sqrt{\Pi}$  allgemein die *Tangentenlänge*, auch wenn sie imaginär ist, und den mit  $\sqrt{\Pi}$  als Radius um  $O$  beschriebenen Kreis den *Potenzkreis* von  $O$  in bezug auf den gegebenen. Er ist nur für Punkte im Innern eines reellen Kreises imaginär, sonst stets reell und geht nach Definition stets durch die Berührungspunkte der aus  $O$  an den gegebenen Kreis gezogenen Tangenten.

B. 1) Vier Punkte  $x_1|0$ ,  $x_2|0$ ,  $0|y_3$ ,  $0|y_4$  liegen auf einem Kreis, wenn  $x_1x_2 = y_3y_4$  ist (vgl. Nr. 102).

2) Durch zwei feste Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  gehen zwei Kreise, die eine gegebene Gerade berühren.

Ist nämlich  $O$  der Schnittpunkt von  $P_1P_2$  mit der Geraden, so schneidet der aus  $O$  mit dem Radius  $\sqrt{OP_1 \cdot OP_2}$  beschriebene Kreis aus ihr die Berührungspunkte heraus.

110. **Pol und Polare.** Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis können wir nach der Methode von Nr. 54 auch durch die Verhältnisse angeben, nach denen sie eine Strecke  $x'|y'$ ,  $x''|y''$  der Geraden teilen. Denn, sind diese Teilverhältnisse  $\nu = n_1:n_2$  bestimmt, so ergeben sich die Koordinaten der Teilpunkte nach Nr. 14.

Die Koordinaten der Schnittpunkte des Kreises  $\alpha|\beta|\pi$  mit der Verbindungsgeraden der Punkte  $x'|y'$ ,  $x''|y''$  sind in der Form enthalten  $\frac{n_1x'' + n_2x'}{n_1 + n_2} \mid \frac{n_1y'' + n_2y'}{n_1 + n_2}$ . Setzen wir diese Ausdrücke für  $x|y$  in die Kreisgleichung ein und multiplizieren dieselbe mit  $(n_1 + n_2)^2$ , so erhalten wir zur Bestimmung des Parameters  $n_1:n_2$  eine quadratische Gleichung

$$(34) \quad \Pi'' n_1^2 + 2P n_1 n_2 + \Pi' n_2^2 = 0.$$

In dieser sind offenbar die Faktoren von  $n_1^2$  und  $n_2^2$  einfach die Ergebnisse der Substitution von  $x''|y''$  ( $n_2 = 0$ ), bez. von  $x'|y'$  ( $n_1 = 0$ ) statt  $x|y$  in die Gleichung des Kreises

$$(35) \quad \Pi \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0,$$

d. h.  $\Pi''$  und  $\Pi'$  sind die Potenzen der gegebenen Punkte in





In der Tat berechnet man die Koordinaten  $x''|y''$  von  $P''$  (Nr. 37) aus

$$x'' - \alpha = \frac{\varrho^2(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2}, \quad y'' - \beta = \frac{\varrho^2(y' - \beta)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2},$$

wonach die Beziehung (38) bestätigt werden kann. Damit ergibt sich eine reelle Konstruktion der Polare von  $P'$ : Auf dem durch  $P'$  gelegten Durchmesser sucht man den zu  $P'$  konjugierten Pol und errichtet in ihm ein Lot des Durchmessers.

Insbesondere hat die Polare eines Punktes  $x'|y'$  in bezug auf den Kreis  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  die Gleichung

$$x'x + y'y = \varrho^2.$$

Jedem unendlich fernen Pol, dessen Richtung durch  $\operatorname{tg} \alpha = y' : x' = m'$  bestimmt ist, entspricht als Polare der zu seiner Richtung normale Kreisdurchmesser

$$x + m'y = 0.$$

B. 1) Die Polare von  $4|4$  in bezug auf

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13 \text{ ist } 3x + 2y - 20 = 0.$$

2) Die Polare von  $4|5$  in bezug auf

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y - 8 = 0 \text{ ist } 5x + 6y - 48 = 0.$$

3) Der konjugierte Pol zu  $5|-4$  auf dessen Durchmesser im Kreise

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0 \text{ ist } \frac{13}{2} \Big| -\frac{17}{2}.$$

4) Die Polare des Nullpunktes im Kreise  $\alpha|\beta|\pi$  ist

$$\alpha x + \beta y - \pi = 0.$$

**111. Die Polare eines auf dem Kreise liegenden Pols ist die in ihm berührende Tangente.** Denn die Polare geht, wenn ihr Pol auf dem Kreise liegt, durch den Pol und ist die Normale zu seinem Radius. Dasselbe lehrt die Übereinstimmung der Gleichung (37) der Polare in Nr. 110 mit der Gleichung (21) der Tangente in Nr. 104.

In dem durch einen gegebenen Punkt gehenden Sekantenbüschel befinden sich zwei Tangenten; in diesen ist der vierte harmonische Punkt mit den Schnittpunkten je im Berührungspunkt vereinigt (Nr. 16). *Daher ist die Polare eines Punktes die Verbindungsgerade der Berührungspunkte seines Tangentenpaares.* In der Tat bestimmt man nach Nr. 106 die Berührungspunkte eines Tangentenpaares als die Schnittpunkte mit der Polare.

Damit aber die quadratische Gleichung (34) für  $\nu = n_1 : n_2$  gleiche Wurzeln liefere, müssen  $x' | y'$ ,  $x'' | y''$  der Bedingung genügen

$$(39) \quad P^2 - \Pi' \Pi'' = 0.$$

Ist also  $x | y$  irgend ein Punkt in einer der Tangenten aus  $x' | y'$ , so genügen seine Koordinaten der Gleichung

$$(40) \quad [(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) - \varrho^2]^2 - \Pi' [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2] = 0,$$

d. h. dies ist die Gleichung des Tangentenpaares. Für Kreise um den Nullpunkt lautet sie:

$$(41) \quad (x'x + y'y - \varrho^2)^2 - (x'^2 + y'^2 - \varrho^2)(x^2 + y^2 - \varrho^2) = 0$$

oder auch (vgl. (25), S. 211):

$$(42) \quad \varrho^2 \{ (x - x')^2 + (y - y')^2 \} - (xy' - yx')^2 = 0.$$

\* Nun zerfällt die linke Seite der Gleichung des Tangentenpaares in das Produkt linearer Faktoren  $T_1 \cdot T_2$ , also ist umgekehrt identisch

$$(43) \quad \Pi' [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2] = P_0^2 - T_1 T_2,$$

wo  $P_0$  aus  $P$  dadurch hervorgeht, daß man in (36)  $x'', y''$  durch  $x, y$  ersetzt.

Aus dieser bestimmten Form, auf die die Gleichung jedes Kreises gebracht werden kann, folgt, daß für jeden Punkt des Kreises das Produkt seiner Abstände von zwei Tangenten in konstantem Verhältnis zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungsehne steht.

Zur Bestimmung der Konstanten beachte man, daß zu jedem gleichschenkligen Dreieit ein Kreis gefunden werden kann, der die Schenkel in den Basisecken berührt. Sind nun die Gleichungen der Schenkel

$$T_1 \equiv x \cos \tau_1 + y \sin \tau_1 - p_1 = 0, \quad T_2 \equiv x \cos \tau_2 + y \sin \tau_2 - p_2 = 0,$$

so ist die Gleichung der Basis notwendig von der Form

$$P_0 = x \cos \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2) + y \sin \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2) - p_3 = 0.$$

Es muß somit eine Verhältniszahl  $k$  geben, so daß  $P^2 - k T_1 T_2 = 0$  einen Kreis darstellt, wenn auch nicht in der Normalform. Ordnet man die linke Seite, so ergibt der Ausdruck der Kriterien von Nr. 96  $k = 1$ . Als Ort eines Punktes, für den das

*Quadrat seines senkrechten Abstandes von der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich dem Produkt der Abstände von den beiden Schenkeln ist, ergibt sich daher ein Kreis, der die Schenkel zu Tangenten und die Basis zur Berührungsschneidung hat.*

**B.** 1) Die Gleichung des Tangentenpaares aus dem Nullpunkt (Nr. 110, 4) an den Kreis  $\alpha | \beta | \pi$  lautet

$$(\alpha x + \beta y - \pi)^2 - \pi (x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi) = 0.$$

2) Die Geraden  $x - 5 = 0$ ,  $3x + 4y - 25 = 0$  bilden die Schenkel, die Gerade  $2x + y - 10 = 0$  ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks; der in den Basisecken berührende Kreis hat die Gleichung

$$\left(\frac{2x + y - 10}{\sqrt{5}}\right)^2 - (x - 5) \frac{3x + 4y - 25}{5} = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

3) Der Winkel  $\delta$  des Tangentenpaares aus  $x' | y'$  an  $x^2 + y^2 = \varrho^2$  bestimmt sich (Nr. 58) aus

$$\operatorname{tg} \delta = \pm 2\varrho \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2}}{x'^2 + y'^2 - 2\varrho^2} = \pm 2\varrho \frac{\sqrt{\Pi'}}{\Pi' - \varrho^2}.$$

4) Der Ort der Punkte, von denen man an einen Kreis vom Radius  $\varrho$  Paare zueinander rechtwinkliger Tangenten legen kann, ist ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis, für den das Quadrat des Radius gleich  $2\varrho^2$  ist.

## 112. Die Gleichung

$$x'x'' + y'y'' - \alpha(x' + x'') - \beta(y' + y'') + \pi = 0,$$

die nach (36) zwischen den Koordinaten konjugiert harmonischer Pole stattfindet, ist in  $x' | y'$  und  $x'' | y''$  vollkommen symmetrisch. Also ist sie ebensowohl die Bedingung, unter der  $x'' | y''$  in der Polare von  $x' | y'$  liegt, wie die, daß die Polare von  $x'' | y''$  durch  $x' | y'$  geht. *Liegt somit ein Punkt  $P''$  in der Polare eines Punktes  $P'$ , so liegt auch  $P'$  in der Polare von  $P''$ .* Daher ist die Polare des Mittelpunktes die unendlich ferne Gerade, denn die Durchmesser sind Polaren unendlich ferner Punkte (vgl. S. 220).

Wir finden so den Pol einer Geraden als den Schnittpunkt der Polaren von zwei Punkten derselben. Es schneiden sich z. B. die Tangenten, die man in den Schnittpunkten einer gegebenen Geraden  $g$  mit einem Kreis ziehen kann, in dem Pol  $P$  der Geraden  $g$ , die Polare von  $P$  ist die Berührungs-

sehne der von  $P$  an den Kreis gezogenen Tangenten. Analytisch genügt es zur Bestimmung des Poles  $x'|y'$  einer Geraden  $u'x + v'y + 1 = 0$ , ihre Gleichung mit der allgemeinen Form einer Polare zu vergleichen. Es sind hiernach die Linienkoordinaten  $u'|v'$  der Polare von  $x'|y'$ :

$$(44) \quad u' = \frac{x' - \alpha}{\pi - \alpha x' - \beta y'}, \quad v' = \frac{y' - \beta}{\pi - \alpha x' - \beta y'},$$

und umgekehrt folgen durch Auflösung die Koordinaten  $x'|y'$  des Poles der Geraden  $u'|v'$ .

Durchläuft  $P''$  die Polare von  $P'$ , so dreht sich die Polare von  $P''$  um den Pol  $P'$  und umgekehrt, oder einer geraden Reihe von Polen entspricht ein Büschel von Polaren, wobei die Träger auch als Polare und Pol zusammengehören. Sind in einem Kreise  $x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0$  die Polaren von  $P_1(x_1|y_1)$ ,  $P_2(x_2|y_2)$   $x_1x + y_1y - \varrho^2 = 0$ ,  $x_2x + y_2y - \varrho^2 = 0$ , so ist die Polare von  $\frac{x_1 + \nu x_2}{1 + \nu} \mid \frac{y_1 + \nu y_2}{1 + \nu}$  in der Tat

$$(45) \quad x_1x + y_1y - \varrho^2 + \nu(x_2x + y_2y - \varrho^2) = 0.$$

Also ist das Sinusteilverhältnis  $\nu'$  in dem durch die Polaren von  $P_1$  und  $P_2$  bestimmten Büschel proportional zu dem Teilverhältnis  $\nu$  des Pols in der Reihe, es ist nämlich  $\nu' = \nu \sqrt{\frac{x_2^2 + y_2^2}{x_1^2 + y_1^2}}$  (Gl. (4) in Nr. 65).

Setzt man überhaupt in die Gleichung der Polare  $x_1x + y_1y - \varrho^2 = 0$  von  $P_1$  die Koordinaten eines anderen Punktes  $P_2$  ein, so ist  $x_1x_2 + y_1y_2 - \varrho^2$  gleich dessen Abstand  $P_2Q_1$  von der Polare multipliziert mit  $OP_1$ , ebenso aber gleich dem mit  $OP_2$  multiplizierten Abstand  $P_1Q_2$  von der Polare des zweiten Punktes. Fällt man also von einem Punkt  $P_1$  das Lot  $P_1Q_2$  auf die Polare eines anderen Punktes  $P_2$  und von  $P_2$  das Lot  $P_2Q_1$  auf die Polare von  $P_1$ , so ist

$$P_1Q_2 : OP_1 = P_2Q_1 : OP_2.$$

B. 1) Der Pol von  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  in bezug auf

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 \quad \text{ist} \quad -\frac{a_1\varrho^2}{a_3} \mid -\frac{a_2\varrho^2}{a_3}.$$

2) Der Pol von  $3x + 4y = 7$  in bezug auf

$$x^2 + y^2 = 14 \quad \text{ist} \quad 6 \mid 8.$$

3) Der Pol von  $2x + 3y = 6$  in bezug auf

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12 \quad \text{ist} \quad -11 \mid -16.$$

4) Die Polaren von vier Punkten einer harmonischen Gruppe bilden ebenfalls eine solche Gruppe.

5) Wie in B. 2), Nr. 108 der Ort der harmonischen Mittel  $Q$  zwischen den Punkten  $P$  und  $P'$  eines Vektors aus  $O$  in Polarkoordinaten bestimmt wurde, so kann es auch für die allgemeine Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$$

geschehen, die in Polarkoordinaten lautet

$$r^2 - 2(\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta) r + \pi = 0.$$

Nach dem dort benutzten Verfahren finden wir für den Ort der harmonischen Mittel  $r = \frac{\pi}{\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta}$ , oder  $\alpha x + \beta y - \pi = 0$ , die Polare des Nullpunktes (vgl. B. 4 in Nr. 110). Und in ähnlicher Art für verwandte Aufgaben.

**113. Polarkonjugierte Dreiecke.** Die Polaren der Ecken eines Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$  in bezug auf einen Kreis bilden ein Dreieck  $P'_2 P'_3 P'_1$ , und die Polaren von dessen Ecken  $P'_1, P'_2, P'_3$  sind die Seiten  $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$  des ersten. Solche Dreiecke nennt man polarkonjugiert in bezug auf den Kreis. Die Verbindungsgeraden  $P_1 P'_1, P_2 P'_2, P_3 P'_3$  der entsprechenden Ecken in polarkonjugierten Dreiecken schneiden sich in einem Punkte. Sind nämlich  $x_i | y_i$  die Koordinaten des Punktes  $P_i (i = 1, 2, 3)$  und ist  $x^2 + y^2 = \rho^2$  die Gleichung des Kreises, so hat die Gerade  $P_1 P'_1$  als Verbindungslinie des Punktes  $P_1$  mit dem Schnittpunkt  $P'_1$  der Polaren  $x_2 x + y_2 y - \rho^2 = 0$  und  $x_3 x + y_3 y - \rho^2 = 0$  von  $P_2$  und  $P_3$  die Gleichung (vgl. Gl. (36), S. 79)

$$(46) (x_3 x_1 + y_3 y_1 - \rho^2)(x_2 x + y_2 y - \rho^2) - (x_2 x_1 + y_2 y_1 - \rho^2)(x_3 x + y_3 y - \rho^2) = 0.$$

Analog sind

$$(47) \begin{cases} (x_1 x_2 + y_1 y_2 - \rho^2)(x_3 x + y_3 y - \rho^2) - (x_3 x_2 + y_3 y_2 - \rho^2)(x_1 x + y_1 y - \rho^2) = 0, \\ (x_2 x_3 + y_2 y_3 - \rho^2)(x_1 x + y_1 y - \rho^2) - (x_1 x_3 + y_1 y_3 - \rho^2)(x_2 x + y_2 y - \rho^2) = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Verbindungsgeraden  $P_2 P'_2$  und  $P_3 P'_3$ . Offenbar (vgl. S. 80) gehen diese drei Geraden durch einen und denselben Punkt. Als dann liegen, analog zu dem Satze in Nr. 67, 4, die Schnittpunkte  $P_2 P_3, P'_2 P'_3; P_3 P_1, P'_3 P'_1;$

$P_1P_2$ ,  $P'_1P'_2$  in einer Geraden, der Polare jenes Schnittpunktes der Verbindungsgeraden.

Dieser Satz enthält in sich folgenden besonderen Fall:  
*Ist ein Kreis einem Dreieck eingeschrieben, so schneiden sich die Verbindungsgeraden je einer Ecke mit dem Berührungspunkt der Gegenseite in einem Punkt.* Denn zu dem Dreieck von drei Punkten des Kreises ist das Dreieck ihrer Tangenten polarkonjugiert.

*Ein Dreieck ist sich selbst polarkonjugiert und heißt ein Polardreieck, wenn zu jeder Ecke  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  die Gegenseite  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  als Polare gehört.* Es ist dazu nur erforderlich, daß die Koordinaten der drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  gemäß den Beziehungen gewählt sind:

$$(48) \quad x_1x_2 + y_1y_2 = \varrho^2, \quad x_2x_3 + y_2y_3 = \varrho^2, \quad x_3x_1 + y_3y_1 = \varrho^2.$$

Ist  $P_1$  völlig willkürlich gegeben, so kann als  $P_2$  nur noch ein Punkt der Polare  $x_1x + y_1y = \varrho^2$  angenommen werden, und die dritte Ecke ist alsdann völlig bestimmt. Wenn eine Ecke auf dem Kreise liegt, so fällt auch eine zweite mit ihr zusammen und man hat kein eigentliches Dreieck mehr. Der Mittelpunkt  $C$  des Kreises ist der gemeinsame Höhenschnittpunkt aller Polardreiecke, denn das vom Pol auf die Polare gefällte Lot muß durch den Mittelpunkt gehen (Nr. 110). Die Polardreiecke eines reellen Kreises sind notwendig stumpfwinklig, und zwar liegt die stumpfe Ecke im Innern des Kreises. Zunächst muß nämlich stets eine Ecke im Innern liegen, wie man auch  $P_1$  wählt. Denn, geht man etwa von einem äußeren Punkte  $P_1$  aus (Fig. 59), so sind doch die auf der Polare von  $P_1$  gelegenen konjugiert harmonischen Pole  $P_2$ ,  $P_3$  durch einen der reellen Schnittpunkte dieser Polare mit dem Kreise voneinander getrennt. Das Quadrat der Entfernung harmonischer Pole  $x_1|y_1$  und  $x_2|y_2$  kann aber geschrieben werden

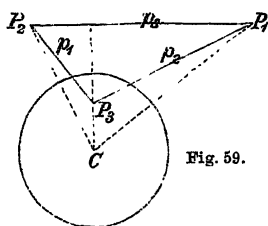


Fig. 59.

$$(x_1^2 + y_1^2 - \varrho^2) + (x_2^2 + y_2^2 - \varrho^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2 - \varrho^2),$$

ist also gleich der Summe  $\Pi_1 + \Pi_2$  ihrer Potenzen, da das

letzte Glied verschwindet. Von den Summen  $\Pi_1 + \Pi_2$ ,  $\Pi_2 + \Pi_3$ ,  $\Pi_3 + \Pi_1$  ist aber diejenige am größten, die zwei positive Summanden hat, d. h. die außerhalb des Kreises liegende Seite, etwa  $P_1P_2$ , des Polardreiecks ist die größte. Endlich liegt ihr ein stumpfer Winkel gegenüber, weil  $\Pi_1 + \Pi_2 > (\Pi_1 + \Pi_3) + (\Pi_2 + \Pi_3)$ .

In bezug auf einen imaginären Kreis gibt es gleichwohl reelle Polardreiecke, jedoch sind diese spitzwinklig, da die Potenzen der Ecken sämtlich positiv sind, also auch das Quadrat  $\Pi_1 + \Pi_2$  der größten Seite kleiner ist als die Summe der Quadrate  $\Pi_1 + \Pi_3$ ,  $\Pi_2 + \Pi_3$  der anderen.

B. 1) Polarkonjugierte Dreiecke in bezug auf  $x^2 + y^2 = 3^2$  sind  $3|6$ ,  $1|0$ ,  $-3|3$  und  $9|12$ ,  $-1|2$ ,  $9|-3$ , und der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Ecken ist  $-1|2$ .

2) Ein Polardreieck bezüglich  $x^2 + y^2 = 2^2$  ist  $1|1$ ,  $3|1$ ,  $0|4$ .

3) Das Produkt der Segmente, in die der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks die Höhen zerlegt, ist konstant, nämlich gleich dem Radiusquadrat des Kreises, in bezug auf den das Dreieck sich selbst konjugiert ist. Vgl. S. 219, Gl. (38).

4) Durch das Polardreieck  $4|3$ ,  $-5|-3$ ,  $11|-11$  ist der imaginäre Kreis  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + 4^2 = 0$  bestimmt. Beim Beweis beachte man, daß der Mittelpunkt des Kreises im Höhenschnittpunkt des Dreiecks liegt.

## Siebentes Kapitel.

### Systeme von Kreisen.

114. **Potenzlinie zweier Kreise.** Die Normalgleichung

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$$

eines Kreises  $\alpha|\beta|\pi$  soll abkürzend mit  $k(x|y) = 0$  oder  $k = 0$  bezeichnet werden. Ihre linke Seite stellt nach Nr. 109 die Potenz  $\Pi$  des Punktes  $x|y$  in bezug auf den Kreis dar.

Sind zwei Kreise  $\alpha_1|\beta_1|\pi_1$ ,  $\alpha_2|\beta_2|\pi_2$  oder  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  gegeben, so sind die in bezug auf beide Kreise berechneten Potenzen  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  eines beliebigen Punktes  $x|y$  im allgemeinen verschieden. Diejenigen Punkte insbesondere, deren Potenzen in bezug auf beide Kreise gleich sind, erfüllen einen Ort, da ihre Koordinaten nur der einen Bedingung zu genügen haben:

$$(2) \quad k_1 = k_2 \text{ oder } k_1 - k_2 = 0.$$

Diese Bedingung ist aber, da die quadratischen Glieder in  $k_1$  und  $k_2$  denselben Koeffizienten haben, nur noch linear

$$(3) \quad 2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + \pi_1 - \pi_2 = 0.$$

*Der Ort der Punkte von gleichen — endlichen — Potenzen bezüglich zweier Kreise ist eine stets reelle Gerade  $k_1 - k_2 = 0$  die Potenzlinie, Radikalachse oder Chordale (vgl. S. 229) der gegebenen Kreise.<sup>91)</sup>*

Außerdem ist auch die unendlich ferne Gerade ein Ort von Punkten gleicher, nämlich unendlich großer Potenzen. Denn für Werte  $x = \infty$  oder  $y = \infty$  hängt der Wert von  $\Pi$  lediglich von dem in  $k_1$  und  $k_2$  übereinstimmenden höchsten Glied  $x^2 + y^2$  ab, da die Glieder niedrigeren Grades bei Division durch jenes verschwindend klein werden, also neben  $x^2 + y^2$  nicht in Betracht kommen. Der gesamte Ort der Punkte gleicher Potenzen besteht also aus der unendlich fernen Geraden und der Potenzlinie der gegebenen Kreise, ist also eigentlich selbst ein zerfallender Kreis (Nr. 99).



Die Potenzlinie liegt im allgemeinen im Endlichen. Nur für  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  reduziert sich ihre Gleichung auf  $0 \cdot x + 0 \cdot y + \pi_1 - \pi_2 = 0$ , d. h. für zwei konzentrische Kreise fällt die Potenzlinie in die unendlich ferne Gerade.

In allen übrigen Fällen ist sie folgendermaßen reell zu bestimmen. Die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte  $\alpha_1 | \beta_1$ ,  $\alpha_2 | \beta_2$ , die Zentrale der Kreise, hat die Gleichung

$$(4) \quad (\beta_1 - \beta_2)x - (\alpha_1 - \alpha_2)y + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0.$$

Somit sind Zentrale und Potenzlinie stets zueinander rechtwinklig (Nr. 36), und es genügt die Bestimmung ihres Schnittpunktes.

Bezeichnen wir die Entfernung der Mittelpunkte oder die Zentraldistanz der Kreise  $\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$  mit  $c$ , so ergeben sich leicht die Abstände  $d_1$ ,  $d_2$  der Mittelpunkte  $\alpha_1 | \beta_1$ ,  $\alpha_2 | \beta_2$  von der Potenzlinie aus ihrer durch  $\pm 2c$  dividierten Gleichung als

$$(5) \quad d_1 = \frac{e_2^2 - e_1^2 - c^2}{\pm 2c}, \quad d_2 = \frac{e_2^2 - e_1^2 + c^2}{\pm 2c}.$$

Hieraus folgt aber einfach  $d_2^2 - d_1^2 = e_2^2 - e_1^2$ ; die Potenzlinie teilt daher die Zentraldistanz so, daß die Differenz der Quadrate der Teile gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist. Der Teilpunkt liegt zwischen den Mittelpunkten, wenn  $e_2^2 - e_1^2$  dem absoluten Wert nach kleiner als  $c^2$  ist, denn  $d_1$ ,  $d_2$  sind dann verschiedenen Zeichens.

Dasselbe folgt aus der Forderung, daß die Tangenten aus jenem Teilpunkt gleich sein müssen. Denn gemäß Nr. 109 hat die Potenzlinie die Eigenschaft, daß die von einem ihrer Punkte aus an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich lang sind.

**115. Die Schnittpunkte zweier Kreise** haben in beiden die Potenz Null, gehören daher stets dem Orte gleicher Potenzen in bezug auf dieselben an. Dieser besteht aus der Potenzlinie und der unendlich fernen Geraden, schneidet also jeden der gegebenen Kreise in zwei Punktepaaren (Nr. 101). Da jedoch eines derselben unendlich fern ist, finden wir notwendig übereinstimmend mit der Anschauung: *zwei Kreise können nicht mehr als zwei Schnittpunkte im Endlichen haben.*

In der Sprache der analytischen Geometrie müssen gemäß dem Theorem von Nr. 28 zwei Kreise, da ihre Gleichungen

vom zweiten Grade sind, vier Schnittpunkte haben. Von diesen sind die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden, die imaginären Kreispunkte, nach Nr. 103 allen Kreisen überhaupt gemeinsam. Demnach haben zwei Kreise nur zwei nicht absolut feste Schnittpunkte, und diese liegen auf der Potenzlinie. Auch sie fallen mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, wenn die Kreise konzentrisch sind.

*Somit besitzen zwei nicht-konzentrische Kreise stets zwei im Endlichen gelegene Schnittpunkte, deren notwendig reelle Sehne die Potenzlinie ist.* Damit ist die

Bestimmung der Schnittpunkte  $S_1, S_2$  zweier Kreise auf Nr. 101 zurückgeführt; sie liegen symmetrisch zur Zentrale (Fig. 60) und können reell, gesondert oder vereinigt, oder konjugiert imaginär sein. Im letzten Falle

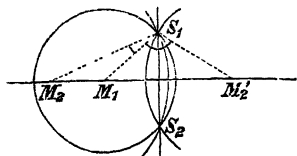


Fig. 60.

ist die Potenzlinie als der Träger des Punktepaares nach Nr. 114 reell konstruierbar. Eine bequemere Konstruktion wird in Nr. 116 gegeben. Sonst erhält man die Potenzlinie umgekehrt am einfachsten aus den Schnittpunkten als die gemeinsame Sehne (Chordale) der Kreise. Für zwei sich berührende Kreise geht sie in ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkt über. Je nachdem in diesem Falle  $\varrho_1 + \varrho_2 = c$ , oder  $\varrho_2 - \varrho_1 = c$ , ( $\varrho_2 > \varrho_1$ ) ist, berühren die Kreise die Potenzlinie von entgegengesetzter Seite oder auf derselben Seite; ihre gegenseitige Berührung geschieht von außen oder von innen, bez. ausschließend oder einschließend. Damit reelle Schnittpunkte vorhanden sind, muß sowohl  $\varrho_1 + \varrho_2 > c$  als  $\varrho_2 - \varrho_1 < c$  sein.

Von Interesse sind namentlich die Schnittpunkte zweier Nullkreise. Ihre Potenzlinie ist das Mittellot ihrer Zentrale. Ein Punktepaa mit der Mitte  $\xi|\eta$  hat Koordinaten von der Form  $\xi + \eta'|\eta - \xi'$ ,  $\xi - \eta'|\eta + \xi'$ ; die das Punktepaa darstellenden Nullkreise sind

$$(x - \xi - \eta')^2 + (y - \eta + \xi')^2 = 0,$$

$$(x - \xi + \eta')^2 + (y - \eta - \xi')^2 = 0,$$

und diese schneiden sich in den konjugiert imaginären

Punkten  $\xi \pm i\xi' | \eta \pm i\eta'$  (vgl. Nr. 19). Somit kann ein imaginäres Punktepaar jederzeit definiert werden als das Paar der Schnittpunkte zweier bestimmter Nullkreise, deren reelle Mittelpunkte man auch die zu den imaginären *assoziierten Punkte* genannt hat.

B. 1) Die Potenzlinie von  $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 7 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 9 = 0$  ist  $10x + 13y - 16 = 0$ .

2) Die Potenzlinie von zwei reellen Kreisen und die der imaginären Kreise, deren Stellvertreter jene sind (vgl. S. 197), liegen zur Mitte der Zentrale symmetrisch.

3) Die Potenzlinie eines reellen und eines imaginären Kreises ist rechtwinklig auf der Zentrale in dem Punkte  $Q$ , dessen an den reellen Kreis gezogene Tangenten so groß sind wie die Abstände des Punktes  $Q$  von den Schnittpunkten des zur Zentrale rechtwinkligen Durchmessers im Stellvertreter des imaginären Kreises.

4) Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes  $P$  (Nullkreises) halbiert den Abstand des Punktes  $P$  von seiner Polare in bezug auf den ersten Kreis oder halbiert die von  $P$  gezogenen Tangenten; denn ist  $q_1 = 0$ , so ist  $2cd_1 = \pm (q_2^2 - c^2)$ . Vgl. (5), S. 228.

5) Das Quadrat der von einem Punkt eines Kreises an einen anderen Kreis gezogenen Tangente ist dem Abstand des Punktes von der Potenzlinie proportional.

**116. Potenzmittelpunkt dreier Kreise.** Sind drei Kreise  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 0$  gegeben, und bestimmen wir für jedes Paar derselben die Potenzlinie, so geht aus den Gleichungen  $k_1 - k_2 = 0$ ,  $k_2 - k_3 = 0$ ,  $k_3 - k_1 = 0$  derselben hervor, daß sie durch einen und denselben Punkt gehen (Nr. 45). *Drei Kreise haben im allgemeinen einen Potenzmittelpunkt, den Schnittpunkt der drei Potenzlinien.* Seine Koordinaten sind

$$\frac{1}{2} \frac{\beta_1(\pi_3 - \pi_2) + \beta_2(\pi_1 - \pi_3) + \beta_3(\pi_2 - \pi_1)}{\beta_1(\alpha_3 - \alpha_2) + \beta_2(\alpha_1 - \alpha_3) + \beta_3(\alpha_2 - \alpha_1)} \mid \frac{1}{2} \frac{\alpha_1(\pi_3 - \pi_2) + \alpha_2(\pi_1 - \pi_3) + \alpha_3(\pi_2 - \pi_1)}{\alpha_1(\beta_3 - \beta_2) + \alpha_2(\beta_1 - \beta_3) + \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)}$$

Für Kreise von gemeinsamer Zentrale ist der Potenzmittelpunkt somit unendlich fern (Nr. 40).

Auch kann dann der Fall eintreten, daß die drei Kreise dieselbe Potenzlinie haben, d. h. durch dieselben beiden Punkte gehen. Die Bedingung, daß drei Kreise gemeinsame Schnittpunkte haben, ist somit das gleichzeitige Verschwinden der Zähler und des Nenners der soeben angegebenen Quotienten.

Da für drei Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, der Potenzmittelpunkt im Endlichen liegt, so kann der Satz dazu dienen, die Potenzlinie von zwei reellen Kreisen ohne reelle Schnittpunkte zu bestimmen. Man muß nur irgend einen Hilfskreis einführen, der die beiden gegebenen reell schneidet, und hat vom Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen das Lot auf die Zentrale der gegebenen Kreise zu fallen.

Somit ändert sich der Potenzmittelpunkt nicht, wenn wir einen der drei Kreise, z. B.  $k_3 = 0$ , durch einen beliebigen anderen ersetzen, der nur mit  $k_2 = 0$  dieselben Schnittpunkte haben soll, denn von den drei Potenzlinien bleiben dann zwei fest. Wir sagen: *Die gemeinsamen Sehnen eines festen Kreises mit Kreisen durch zwei feste Punkte gehen durch einen festen Punkt.*

Der Potenzmittelpunkt ist der einzige Punkt, dessen Tangenten an die gegebenen Kreise gleich lang sind. Die drei Paare ihrer Berührungspunkte liegen somit stets auf einem Kreise, der die drei gegebenen rechtwinklig schneidet; man nennt ihn den *Orthogonalkreis*<sup>32)</sup> oder *Hauptkreis* der gegebenen Kreise. Er ist nur dann imaginär, wenn sich der Potenzmittelpunkt innerhalb eines reellen Kreises unter den gegebenen befindet. Denn die Tangenten an einen imaginären Kreis aus einem reellen Punkt haben stets reelle Länge (Nr. 106); also kann der Orthogonalkreis nur imaginär werden, wenn die gegebenen Kreise sämtlich reell sind und sich überdies reell schneiden. In der Tat zeigt eine einfache Überlegung, daß der Potenzmittelpunkt nur dann im Innern von drei sich paarweise schneidenden Kreisen liegt, wenn die Schnittpunkte zweier derselben je durch den dritten getrennt sind.

B. Der Potenzmittelpunkt von  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7$ ,  $(x-3)^2 + y^2 = 5$ ,  $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$  ist  $-\frac{1}{16} | -\frac{25}{16}$  und der Radius des Hauptkreises  $\frac{3}{16} \sqrt{194}$ .

117. **Gemeinsame Tangenten zweier Kreise.** Zwei Kreise haben außer gemeinsamen Punkten notwendig auch gemeinsame Tangenten. Denn, damit eine Gerade  $u|v$  zugleich Tangente zweier Kreise sei, müssen ihre Koordinaten nach Nr. 105 zwei Bedingungsgleichungen zweiten Grades erfüllen,

die nach Nr. 28 vier gemeinsame Wurzeln haben. *Es gibt also vier gemeinsame Tangenten zweier Kreise* und es sind die Paare ihrer Berührungspunkte zu finden.

Führen wir in den Gleichungen  $k_1 = 0$  bez.  $k_2 = 0$  der Kreise gemäß Nr. 107 die (Winkel-)Parameter  $\vartheta_1$  bez.  $\vartheta_2$  der Peripheriepunkte  $x_1 | y_1$  bez.  $x_2 | y_2$  ein durch

$$(6) \quad \frac{x_1 - \alpha_1}{\varrho_1} = \cos \vartheta_1, \quad \frac{y_1 - \beta_1}{\varrho_1} = \sin \vartheta_1, \quad \frac{x_2 - \alpha_2}{\varrho_2} = \cos \vartheta_2, \quad \frac{y_2 - \beta_2}{\varrho_2} = \sin \vartheta_2,$$

so lautet die Gleichung einer Tangente des ersten Kreises in  $x_1 | y_1$  nach S. 212:

$$(x - \alpha_1) \cos \vartheta_1 + (y - \beta_1) \sin \vartheta_1 - \varrho_1 = 0$$

und die einer Tangente des zweiten Kreises in  $x_2 | y_2$ :

$$(x - \alpha_2) \cos \vartheta_2 + (y - \beta_2) \sin \vartheta_2 - \varrho_2 = 0.$$

Sollen nun diese Tangenten in derselben Geraden vereinigt sein, so liefert die Vergleichung der Koeffizienten der Gleichungen die nötigen Bedingungen. Erstens muß  $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \operatorname{tg} \vartheta_2$ , d. h. entweder  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  oder  $\vartheta_1 = \vartheta_2 \pm \pi$  sein: die Radien der Berührungspunkte müssen in der Tat parallel sein. Zweitens erfordert die Identität der konstanten Glieder

$$(7) \quad (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \vartheta_1 + (\beta_1 - \beta_2) \sin \vartheta_1 + \varrho_1 \mp \varrho_2 = 0,$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  oder  $\vartheta_1 = \vartheta_2 \pm \pi$  ist.

Jede der Gleichungen (7) bestimmt zwei Werte für  $\vartheta_1$ , also je zwei Paare von Berührungspunkten. Den Wurzeln

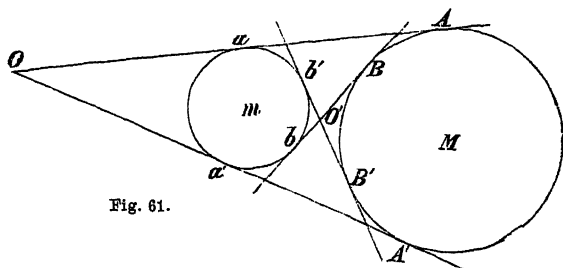


Fig. 61.

der ersten entsprechen zwei Tangenten  $Aa$ ,  $A'a'$ , für die die beiden Kreise je auf derselben Seite liegen und die man daher die äußeren (direkten) gemeinsamen Tangenten nennt (Fig. 61).

Ebenso liefert die zweite Gleichung zwei innere (transversale) gemeinsame Tangenten  $Bb$ ,  $B'b'$ , für die die Kreise auf verschiedenen Seiten liegen. Den Berührungspunkt des Kreises  $k_1 = 0$  mit einer gemeinsamen Tangente erhalten wir durch Elimination von  $\vartheta_1$  aus (7) mit Hilfe von (6). Es ergeben sich die linearen Bedingungen

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(x_1 - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2)(y_1 - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_1 \mp \varrho_2) = 0,$$

deren erste  $P_a = 0$  mit  $k_1 = 0$  zusammen die Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $A'$ , deren zweite  $P_i = 0$  ebenso die der Punkte  $B$ ,  $B'$  bestimmt.

Somit sind

$$(8) \quad (\alpha_1 - \alpha_2)(x - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2)(y - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_1 \mp \varrho_2) = 0$$

die Gleichungen der Berührungssehnen des ersten Kreises mit den äußeren bez. inneren gemeinsamen Tangenten oder der Polaren der Schnittpunkte  $O$ ,  $O'$  dieser Paare. Diese Polaren sind zur Zentrale rechtwinklig, so daß ihre Pole auf derselben liegen (Nr. 110). Hat man die Koordinaten der Pole  $x_a|y_a$ ,  $x_i|y_i$  gefunden und sind  $\Pi_a$ ,  $\Pi_i$  die Ergebnisse ihrer Substitution in  $k_1$ , so sind nach Nr. 111 die Gleichungen der von ihnen ausgehenden Tangentenpaare:

$$(9) \quad P_a^2 - \Pi_a k_1 = 0, \quad P_i^2 - \Pi_i k_1 = 0.$$

Die Realität der gemeinsamen Tangenten läßt sich nach der Gleichung ihrer Berührungssehne diskutieren. Diese ist nur reell, wenn beide Kreise reell oder beide imaginär sind, daher haben die Tangentenpaare solcher Kreise reelle Gleichungen. Dagegen haben ein reeller und ein imaginärer Kreis nur imaginäre Tangenten gemein, die nicht konjugiert sind. Einen reellen Kreis  $k_1 = 0$  schneiden die Berührungssehnen  $P_a = 0$  bez.  $P_i = 0$  in gesonderten reellen Punkten, wenn ihr Abstand von  $\alpha_1|\beta_1$  kleiner als  $\varrho_1$  ist. Demnach sind die äußeren Tangenten reell, solange von den reellen Kreisen der eine nicht völlig vom anderen umschlossen ist ( $\varrho_1 - \varrho_2 < c$ ); die inneren, solange die beiden Kreise sich ausschließen, so daß gleichzeitig auch die äußeren reell sein müssen. Alle vier Tangenten sind somit reell, wenn die Kreise sich ohne reelle Schnittpunkte ausschließen, keine, wenn der eine den anderen

umschließt. Die inneren Tangenten fallen zusammen bei äußerer, die äußeren bei innerer Berührung der Kreise.

B. 1) Die gemeinsamen Tangenten der Kreise

$$x^2 + y^2 \mp 4x \mp 2y \pm 4 = 0$$

haben im ersten Kreise die Berührungsebenen  $2x + y = 6$ ,  $2x + y = 3$ . In den Schnittpunkten  $2 \mid 2, \frac{14}{5} \mid \frac{2}{5}$  des Kreises mit der ersten Sehne sind die Tangenten  $y = 2$ ,  $4x - 3y = 10$ , und in den Schnittpunkten  $1 \mid 1, \frac{7}{5} \mid \frac{1}{5}$  der zweiten  $x = 1$ ,  $3x + 4y = 5$ . Die Pole der Berührungsebenen sind  $4 \mid 2, 1 \mid \frac{1}{2}$ , ihre Potenzen 4 und  $\frac{1}{4}$ , daraus folgen auch die Gleichungen der Tangentenpaare.

2) Die Mitten zwischen den Berührungspunkten jeder der vier Tangenten liegen auf einer Geraden

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y - (\pi_1 - \pi_2) = 0,$$

denn diese ist (Nr. 65) die gemeinsame Mittellinie zwischen den Paaren von Berührungsebenen.

3) Die vier Berührungspunkte eines jeden der gemeinsamen Tangentenpaare liegen auf je einem Kreis, dessen Mittelpunkt die Mitte  $C$  der Zentrale ist.

Denn dort schneiden sich die Mittelloten der Strecken  $Aa$ ,  $A'a'$ , bez.  $Bb$  und  $B'b'$  (2).

118. **Ähnlichkeitszentra.** Aus den Gleichungen (8) der Berührungsebenen des äußeren und des inneren Tangentenpaares findet man die Koordinaten ihrer Pole, d. h. der Tangentenschnittpunkte  $O$  und  $O'$ , indem man die Gleichungen (8) mit der Gleichung  $(x' - \alpha_1)(x - \alpha_1) + (y' - \beta_1)(y - \beta_1) - \varrho_1^2 = 0$  der Polare eines Punktes  $x' \mid y'$ , des Schnittpunktes  $O$  der äußeren bez.  $O'$  der inneren Tangenten, vergleicht. Man erhält

$$(10) \quad x_a = \frac{\varrho_1 \alpha_2 - \varrho_2 \alpha_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \mid y_a = \frac{\varrho_1 \beta_2 - \varrho_2 \beta_1}{\varrho_1 - \varrho_2};$$

$$(11) \quad x_i = \frac{\varrho_1 \alpha_2 + \varrho_2 \alpha_1}{\varrho_1 + \varrho_2} \mid y_i = \frac{\varrho_1 \beta_2 + \varrho_2 \beta_1}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Diese Punkte  $O$ ,  $O'$  heißen das *äußere* bez. *innere Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise* oder der *äußere* bez. *innere Ähnlichkeitspunkt*. Die Ausdrücke (10) und (11) für die Koordinaten von  $O$  und  $O'$  zeigen, daß diese Punkte die *Zentrale äußerlich und innerlich im Verhältnis der Radien, d. h. harmonisch, teilen*. Ihre Koordinaten gehen ineinander über, wenn man einem der Radien das negative Vorzeichen beilegt. Die Rea-

litätsverhältnisse wurden schon in Nr. 117 betrachtet. Wenn sich zwei Kreise berühren, fällt eines ihrer Ähnlichkeitszentra mit dem Berührungspunkt zusammen.

Im Falle reeller Tangenten erläutert und bestätigt diese Teilung unmittelbar die Anschauung der ähnlichen Dreiecke

$$OMA \sim Oma, \quad O'MB \sim O'mb.$$

Diese liefern die Proportionen

$$(12) \quad \frac{OM}{e_1} = \frac{Om}{e_2} = \frac{c}{e_1 - e_2}, \quad \frac{O'M}{e_1} = -\frac{O'm}{e_2} = \frac{c}{e_1 + e_2},$$

aus denen sich die Entfernung der Ähnlichkeitszentra ergibt

$$(13) \quad OO' = \frac{2c e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2}.$$

Ebenso direkt folgen die Quadrate der Längen der gemeinsamen Tangenten

$$(14) \quad \begin{cases} \overline{Aa}^2 = \overline{A'a'}^2 = t_a^2 = c^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2, \\ \overline{Bb}^2 = \overline{B'b'}^2 = t_i^2 = c^2 - (\rho_1 + \rho_2)^2. \end{cases}$$

B. 1) Bestimme die gemeinsamen Tangenten der Kreise

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3.$$

Das äußere Ähnlichkeitszentrum ist  $-2|-1$ , also das Paar der Tangenten durch dasselbe

$$25(x^2 + y^2 - 6x - 8y) - (5x + 5y - 10)^2 = 0$$

$$\text{oder} \quad (x + 2)(y + 1) = 0.$$

Da die gegebenen Kreise einander in reellen Punkten schneiden, so ist das andere Paar der gemeinsamen Tangenten imaginär; aber seine Gleichung lautet, da das andere Ähnlichkeitszentrum  $\frac{23}{9}|\frac{31}{9}$  ist,

$$40x^2 + xy + 40y^2 - 199x - 278y + 722 = 0.$$

2) Die Tangentenlängen  $t_a$  und  $t_i$  der Kreise in Nr. 117, 1 sind

$$t_a = 4, \quad t_i = 2.$$

119. Sind zu zwei Kreisen die beiden Ähnlichkeitspunkte als die Teilpunkte der Zentrale bestimmt, die sie im Verhältnis der Radien teilen, so möge einer derselben als Nullpunkt der Koordinaten genommen werden. Ist etwa der äußere  $O$  dazu gewählt, so ist nach der Definition  $\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \rho_1 : \rho_2$  zu setzen oder  $\alpha_1 = \kappa \rho_1$ ,  $\alpha_2 = \kappa \rho_2$ ;  $\beta_1 = \lambda \rho_1$ ,  $\beta_2 = \lambda \rho_2$ , und die Gleichungen der beiden Kreise lassen sich schreiben

$$\left(\frac{x}{e_1} - \kappa\right)^2 + \left(\frac{y}{e_1} - \lambda\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{e_2} - \kappa\right)^2 + \left(\frac{y}{e_2} - \lambda\right)^2 = 1.$$



Somit geht die Gleichung des zweiten Kreises aus der des ersten hervor, indem in dieser  $\frac{e_1}{e_2} x \mid \frac{e_1}{e_2} y$  an die Stelle von  $x \mid y$  gesetzt wird, während dabei jede Gleichung von der Form

$$y : x = C$$

unverändert bleibt. Durchläuft also ein Punkt  $S$  oder  $x \mid y$  den ersten Kreis, so beschreibt gleichzeitig ein Punkt  $\sigma$  oder

$$\frac{e_1}{e_2} x \mid \frac{e_1}{e_2} y$$

den zweiten, und zwar liegen entsprechende Punkte  $S$  und  $\sigma$  auf demselben Vektor  $y = Cx$  so, daß

$OS : O\sigma = e_1 : e_2$  ist. Jede Transversale durch den Schnittpunkt eines gemeinsamen Tangentenpaares wird von den Kreisen in Proportion geteilt, d. h.  $OS : OS' = O\sigma : O\sigma'$  (Fig. 62).

Legt man durch  $O$  eine andere Transversale, die den ersten Kreis in  $R$  und  $R'$ , den zweiten in  $\varrho$  und  $\varrho'$  trifft, so ist analog

$$OR : OR' = O\varrho : O\varrho'.$$

Ferner folgt

$$(15) \quad OR \cdot O\varrho' = OR' \cdot O\varrho = OS \cdot O\sigma' = OS' \cdot O\sigma.$$

Man bezeichnet dieses Produkt als „gemeinschaftliche Potenz der beiden gegebenen Kreise in bezug auf ihren Ähnlichkeitspunkt  $O$ “.

Da die Potenz  $\Pi_1^{(a)}$  des Punktes  $O$  in bezug auf den ersten Kreis gleich dem Produkt  $OS \cdot OS'$  ist, folgt aus der Gleichung  $OS \cdot O\sigma' = OS' \cdot O\sigma$  mit Rücksicht auf  $OS : O\sigma = OS' : O\sigma' = e_1 : e_2$  für die gemeinschaftliche Potenz der Ausdruck

$$(16) \quad OS \cdot O\sigma' = OS' \cdot O\sigma = \frac{e_2}{e_1} \Pi_1^{(a)} = \frac{e_1}{e_2} \Pi_2^{(a)},$$

und hier bedeutet  $\Pi_2^{(a)}$  die Potenz des äußeren Ähnlichkeitspunktes  $O$  in bezug auf den zweiten Kreis.

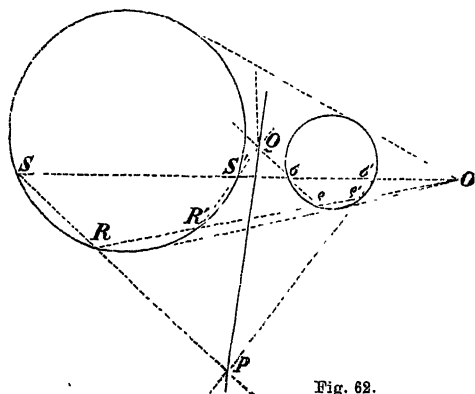


Fig. 62.

Man findet leicht:

$$(16a) \quad \frac{q_2}{q_1} \Pi_1^{(a)} = \frac{q_1}{q_2} \Pi_2^{(a)} = \frac{q_1 q_2 \{c^2 - (q_1 - q_2)^2\}}{(q_1 - q_2)^2}.$$

Entsprechende Beziehungen wie (16) liefert der innere Ähnlichkeitspunkt  $O'$ .

Zieht man durch ein Ähnlichkeitszentrum zweier Kreise, z. B. durch  $O$ , zwei Sekanten, die den einen Kreis in  $R, R', S, S'$ , den anderen in  $\rho, \rho', \sigma, \sigma'$  schneiden, so sind die Sehnen  $RS$  und  $\rho\sigma$  einander parallel, ebenso  $R'S'$  und  $\rho'\sigma'$ , und die Geraden  $RS$  und  $\rho'\sigma'$  schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise, ebenso die Geraden  $R'S'$  und  $\rho\sigma$ .

Zum Beweis dieser Behauptungen wähle man die Geraden  $OR$  und  $OS$  als Koordinatenachsen. Alsdann ist nach S. 236  $OR = m \cdot O\rho$ ,  $OS = m \cdot O\sigma$ , wobei  $m = q_1 : q_2$ , und während die Gleichung des Kreises  $\rho\sigma\rho'\sigma'$  von der Form

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ist, hat man für den anderen Kreis

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m(a_{13}x + 2a_{23}y) + m^2 a_{33} = 0.$$

Die Gleichung der Potenzlinie wird

$$(17) \quad 2(a_{13}x + a_{23}y) + (m + 1)a_{33} = 0.$$

Sind nun

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

die Gleichungen der Geraden  $\rho\sigma$  und  $\rho'\sigma'$ , so sind  $RS$  und  $R'S'$  gegeben durch

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{mb} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{ma'} + \frac{y}{mb'} = 1,$$

woraus sofort ersichtlich ist, daß die Geraden  $\rho\sigma$  und  $RS$ , andererseits  $\rho'\sigma'$  und  $R'S'$  in der Tat einander parallel sind. Offenbar schneiden sich  $RS$  und  $\rho'\sigma'$  auf der Geraden

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - m = 0,$$

deren Gleichung auch in der Form

$$(18) \quad \frac{a+a'}{aa'} x + \frac{b+b'}{bb'} y - (1+m) = 0$$

geschrieben werden kann. Mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$a + a' = -2a_{13}, \quad aa' = a_{33}, \quad b + b' = -2a_{23}, \quad bb' = a_{33}$$

geht aber (18) sofort in die Gleichung (17) der Potenzlinie über.

Als besonderer Fall des vorstehend bewiesenen Satzes ergibt sich, daß die in  $R$  und  $\varrho$  gezogenen Tangenten einander parallel sind, ebenso die in  $R'$  und  $\varrho'$  gezogenen. Die Tangenten von  $R$  und  $\varrho'$  sowie die von  $R'$  und  $\varrho$  schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise.

120. Sind wieder  $k_1(x, y) = 0$  und  $k_2(x, y) = 0$  oder kürzer  $k_1 = 0$  und  $k_2 = 0$  die Gleichungen zweier Kreise in der Normalform (vgl. Nr. 114 und Nr. 98), so stellt jede Gleichung von der Form

$$(19) \quad \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0,$$

wo  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beliebig gewählte Zahlen (Parameter) bedeuten, einen durch die Schnittpunkte von  $k_1 = 0$  und  $k_2 = 0$  gehenden Kreis dar. Dies ist bei Berücksichtigung der Definition des Kreises nach Nr. 103 eine unmittelbare Folge des Prinzips von Nr. 64. In Wirklichkeit geht in die Gleichung (19) nur das Verhältnis  $\lambda_1 : \lambda_2$  oder  $\lambda_2 : \lambda_1$  der beiden Parameter ein, die Gleichung bestimmt daher, den unendlich vielen Werten von  $\lambda_1 : \lambda_2$  entsprechend,  $\infty^1$  Kreise, deren Gesamtheit man als ein *Kreisbüschel* bezeichnet. Insbesondere für  $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$  erhält man die Gleichung der allen Kreisen des Büschels gemeinsamen Sehne, die zusammen mit der unendlich fernen Geraden einen dem Büschel angehörigen ausgearteten Kreis darstellt. *Jeder Punkt dieser Sehne hat gleiche Potenz in bezug auf alle Kreise des Büschels* (vgl. Nr. 115), *diese haben somit eine gemeinsame Potenzlinie.*

Auch umgekehrt kann die Gleichung eines jeden Kreises, der durch die Schnittpunkte von  $k_1 = 0$  und  $k_2 = 0$  geht, in der Form (19) dargestellt werden, denn die Einführung der Koordinaten  $x_1, y_1$  irgend eines Punktes seiner Peripherie in (19) ergibt für  $\lambda_1 : \lambda_2$  den bestimmten Wert  $\lambda_1 : \lambda_2 = -k_2(x_1, y_1) : k_1(x_1, y_1)$ .

Die Schnittpunkte der Kreise des Büschels, insbesondere die beiden von den unendlich fernen imaginären Kreispunkten

verschiedenen Schnittpunkte, nennt man die *Grundpunkte des Büschels*. Bei ihnen ist zu unterscheiden, ob sie reell, konjugiert imaginär oder vereint sind. Im letzten Fall berühren sich alle Kreise in den vereinten Grundpunkten; den ersten Fall veranschaulichen die Kreise mit den Mittelpunkten  $O, C_1, C_2, C_3$ , den zweiten die Kreise  $M_1, M_2, M_3, M_4$  von Fig. 63.

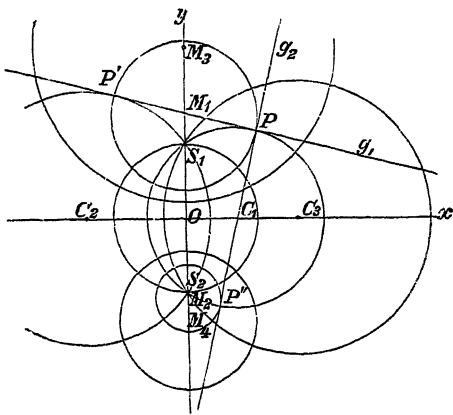


Fig. 63.

Die Gleichung eines beliebigen Kreises des Büschels lautet in der Normalform

$$(20) \quad \frac{\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0;$$

der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Koordinaten

$$(21) \quad \alpha = \frac{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

das Quadrat seines Radius ist

$$(22) \quad \varrho^2 = \frac{\lambda_1^2 \varrho_1^2 + \lambda_2^2 \varrho_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 (c_{12}^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

wobei

$$c_{12}^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2$$

das Quadrat der Zentraldistanz der beiden Kreise bedeutet.

Wie die Gleichungen (21) zeigen, liegen die *Mittelpunkte aller Kreise des Büschels auf einer und derselben Geraden, der gemeinsamen Zentrale*.

Schneiden sich die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in reellen Punkten, so ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 > c_{12} > |\varrho_1 - \varrho_2|;$$

haben sie keine reellen Schnittpunkte, so ist

$$\begin{aligned} &\text{entweder } c_{12} < |\varrho_1 - \varrho_2| < \varrho_1 + \varrho_2 \\ &\text{oder } c_{12} > \varrho_1 + \varrho_2 > |\varrho_1 - \varrho_2|, \end{aligned}$$

jedenfalls aber

$$\{c_{12}^2 - (\varrho_1 + \varrho_2)^2\} \{c_{12}^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2\} > 0.$$

Dieser Ausdruck ist nun die Diskriminante der quadratischen Gleichung in  $\lambda$ , die sich ergibt, wenn man in (22)  $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda$  und  $\varrho = 0$  setzt, d. h.: *Haben die Kreise des Büschels keine reellen Schnittpunkte, so enthält dieses zwei Nullkreise.*<sup>33)</sup>

Aus früheren Betrachtungen (vgl. Nr. 109, B. 2) folgt, daß jede Gerade der Ebene von zwei Kreisen des Büschels berührt wird, z. B. die Gerade  $g_1$ , Fig. 63.

**121. Schnittwinkel zweier Kreise. Orthogonale Kreisbüschel.\*)** Es möge nun der Winkel  $\gamma_1$  bestimmt werden, unter dem ein beliebiger reeller Kreis  $k_0 = 0$  von einem anderen  $k_1 = 0$  geschnitten wird. Um zunächst diesen Winkel genauer festzulegen, denken wir uns beide Kreise im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers durchlaufen und ziehen von dem betreffenden Schnittpunkt  $S$  aus die Tangenten im Sinne

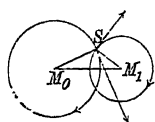


Fig. 64.

der Richtung des Umlaufs. Der konkave Winkel  $\gamma_1$ , den diese (in Fig. 64 mit Pfeilspitze versehenen) Tangenten miteinander bilden, soll als der Winkel definiert werden, unter dem sich die Kreise schneiden.\*\*)

Er ist gleich dem Winkel  $M_0 S M_1$ , so daß man nach dem Kosinussatz erhält

$$(23) \quad \cos \gamma_1 = \frac{e_0^2 + e_1^2 - c_{01}^2}{2 e_0 e_1} = \frac{e_0^2 - k_1(\alpha_0, \beta_0)}{2 e_0 e_1}.$$

Hierbei ist  $k_1(\alpha_0, \beta_0)$  der Zahlenwert, der sich ergibt, wenn man in  $k_1(x, y)$  an Stelle von  $x$  und  $y$  die Koordinaten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  des Mittelpunktes des Kreises  $k_0$  einsetzt.

Nun gilt der Satz:

*Alle Kreise  $k_0$ , die die beiden festen Kreise  $k_1$  und  $k_2$  unter den konstanten Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden, schneiden auch jeden beliebigen Kreis*

\*) Den Inhalt der hier folgenden Nummern 121—124 verdanke ich, von den Beispielen abgesehen, einer freundlichen Mitteilung von Herrn K. Rohn in Leipzig.

\*\*) Dieser Verabredung entsprechend ist der Winkel zweier sich berührenden Kreise gleich  $0^\circ$  oder gleich  $180^\circ$ , je nachdem der eine Kreis den anderen einschließt oder nicht.

$$(24) \quad k_\lambda(x, y) \equiv \frac{k_1(x, y) - \lambda k_2(x, y)}{1 - \lambda} = 0$$

des durch  $k_1$  und  $k_2$  bestimmten Büschels unter konstantem Winkel.

Ist nämlich  $\gamma_\lambda$  der vorhin definierte Schnittwinkel von  $k_0$  und  $k_\lambda$ , sind  $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$  die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises  $k_\lambda$  und ist  $\varrho_\lambda$  dessen Radius, so hat man nach (23) die Beziehungen

$$2\varrho_0\varrho_1 \cos \gamma_1 = \varrho_0^2 - k_1(\alpha_0, \beta_0)$$

$$2\varrho_0\varrho_2 \cos \gamma_2 = \varrho_0^2 - k_2(\alpha_0, \beta_0)$$

$$2\varrho_0\varrho_\lambda \cos \gamma_\lambda = \varrho_0^2 - k_\lambda(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\varrho_0^2 - k_1(\alpha_0, \beta_0) - \lambda(\varrho_0^2 - k_2(\alpha_0, \beta_0))}{1 - \lambda},$$

also

$$(25) \quad \cos \gamma_\lambda = \frac{\varrho_1 \cos \gamma_1 - \lambda \varrho_2 \cos \gamma_2}{(1 - \lambda) \varrho_\lambda} \quad \text{oder mit Hilfe von (22):}$$

$$(25a) \quad \cos \gamma_\lambda = \frac{\varrho_1 \cos \gamma_1 - \lambda \varrho_2 \cos \gamma_2}{+ \sqrt{\varrho_1^2 + \lambda^2 \varrho_2^2 + \lambda(c_{12}^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2)}}.$$

Hier ist der Quadratwurzel des Nenners das Pluszeichen zu geben, da  $\varrho_\lambda$  als Radius eine positive Größe ist. Die Formel zeigt, daß  $\gamma_\lambda$  einen von der Lage des schneidenden Kreises  $k_0$  unabhängigen Wert hat, vielmehr ist  $\gamma_\lambda$  nur von  $\lambda$  abhängig, wenn die Kreise  $k_1, k_2$  sowie die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gegeben sind.

Aus der Gleichung (25) bez. (25a) kann man noch einige weitere Schlüsse ziehen, z. B.:

*Alle Kreise  $k_0$ , die die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  unter den vorgegebenen Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden, schneiden einen bestimmten Kreis des Büschels rechtwinklig (orthogonal); dieser hat die Gleichung*

$$(26) \quad \varrho_2 \cos \gamma_2 k_1(x, y) - \varrho_1 \cos \gamma_1 k_2(x, y) = 0.$$

Für  $\lambda = \varrho_1 \cos \gamma_1 : \varrho_2 \cos \gamma_2$  verschwindet nämlich der Zähler der rechten Seite von (25) und es wird  $\gamma_\lambda = \frac{1}{2}\pi$ . Insbesondere folgt im Falle  $\gamma_1 = \gamma_2$ :

*Alle Kreise  $k_0$ , die zwei feste Kreise  $k_1$  und  $k_2$  unter gleichem aber beliebigem Winkel schneiden, schneiden den Kreis  $p_{12}$ :*

$$(27) \quad \varrho_2 k_1(x, y) - \varrho_1 k_2(x, y) = 0$$

*des Büschels rechtwinklig.*

Sein Mittelpunkt  $P_{12}$  hat nach (21) die Koordinaten

$$\frac{e_1 \alpha_2 - e_2 \alpha_1}{e_1 - e_2}, \quad \frac{e_1 \beta_2 - e_2 \beta_1}{e_1 - e_2},$$

er ist also der äußere Ähnlichkeitspunkt von  $k_1$  und  $k_2$  (vgl. (10), S. 234); das Quadrat des Radius ist nach (22)

$$\frac{e_1 e_2 \{c_{12}^2 - (e_1 - e_2)^2\}}{(e_1 - e_2)^2},$$

stimmt daher nach (16a) mit der *gemeinschaftlichen Potenz* der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in bezug auf den äußeren Ähnlichkeitspunkt  $P_{12}$  überein. Man nennt  $p_{12}$  den *äußeren Steinerschen Potenzkreis*<sup>84)</sup> von  $k_1$  und  $k_2$ .

Ferner berühren alle Kreise  $k_0$ , die  $k_1$  und  $k_2$  unter den vorgegebenen Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden, *zwei* Kreise des Büschels, für die

$$\varrho_1^2 \sin^2 \gamma_1 + \lambda^2 \varrho_2^2 \sin^2 \gamma_2 + \lambda (c_{12}^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2 + 2 \varrho_1 \varrho_2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) = 0$$

ist. Diese beiden Kreise sind natürlich nicht immer reell.

Als Grenzfälle solcher Kreise  $k_0$ , die  $k_1$  und  $k_2$  unter gleichen Winkeln schneiden, sind auch die *Geraden* anzusehen, die diese Eigenschaft haben. Sie müssen durch den Mittelpunkt  $P_{12}$  des vorerwähnten Kreises  $p_{12}$  gehen, denn sie schneiden  $p_{12}$  rechtwinklig. So folgt:

*Alle Geraden, die zwei gegebene Kreise  $k_1, k_2$  unter gleichen Winkeln schneiden,\*) gehen durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt  $P_{12}$  von  $k_1$  und  $k_2$ . Er ist der Mittelpunkt des Kreises (27), des äußeren Steinerschen Potenzkreises von  $k_1$  und  $k_2$ , und dieser ist Orthogonalkreis für alle Kreise, die  $k_1$  und  $k_2$  unter gleichen Winkeln schneiden.*

Analog erhält man für  $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$  den Satz:

*Alle Geraden, die  $k_1$  und  $k_2$  unter supplementären Winkeln schneiden, gehen durch einen Punkt  $Q_{12}$ , den inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Er ist Mittelpunkt des Kreises (28)*

$$\varrho_2 k_1(x, y) + \varrho_1 k_2(x, y) = 0,$$

\*) Der Durchlaufssinn einer Geraden ist allerdings noch willkürlich, aber er ist ohne Einfluß auf den Satz. Denn wenn die Schnittwinkel einer Geraden  $g$  mit  $k_1$  und  $k_2$  für einen bestimmten Durchlaufssinn von  $g$  einander gleich sind, so sind sie auch für den entgegengesetzten Sinn einander gleich.

des inneren Steinerschen Potenzkreises von  $k_1$  und  $k_2$ , und dieser ist Orthogonalkreis für alle Kreise, die  $k_1$  und  $k_2$  unter supplementären Winkeln schneiden.

Aus dem Wert (25) von  $\cos \gamma_\lambda$  folgt für  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\pi$  auch  $\gamma_\lambda = \frac{1}{2}\pi$ , d. h.:

Alle Kreise, die zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  eines Büschels  $B'$  rechtwinklig schneiden, schneiden sämtliche Kreise des Büschels unter rechtem Winkel. Diese Orthogonalkreise bilden ebenfalls ein Büschel  $B''$ , ihre Mittelpunkte liegen auf der Potenzlinie des Büschels  $B'$  und ihre Potenzlinie geht durch die Mittelpunkte der Kreise von  $B'$ .

Denn die Orthogonalkreise von  $k_1$  und  $k_2$  schneiden auch die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_2$  rechtwinklig, ihre Mittelpunkte liegen ja auf dieser Geraden. Kennt man aber zwei Orthogonalkreise von  $k_1$  und  $k_2$ , so bestimmen diese ein Büschel  $B''$ , und bei Anwendung des soeben bewiesenen ersten Teiles unsres Satzes auf dieses Büschel  $B''$  folgt sofort, daß alle zu  $B''$  gehörigen Kreise von allen Kreisen des Büschels  $B'$  rechtwinklig geschnitten werden.

So entstehen zwei orthogonale Kreisbüschel. Ihre Potenzlinien sind zueinander rechtwinklig; die gemeinsame Potenzlinie des einen ist Zentrale des anderen, und umgekehrt.

Sind diese beiden Geraden die  $x$ - und  $y$ -Achse, so haben die beiden Büschel die Gleichungen

$$(29) \quad x^2 + y^2 - 2\lambda'x + k^2 = 0,$$

$$(30) \quad x^2 + y^2 - 2\lambda''y - k^2 = 0,$$

wobei  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  veränderliche Parameter bedeuten, während  $k^2$  konstant ist.

Die Mittelpunkte der Kreise (29) liegen sämtlich auf der  $x$ -Achse; der Radius des Kreises mit dem Parameter  $\lambda'$  ist  $\rho' = +\sqrt{\lambda'^2 - k^2}$ , woraus hervorgeht, daß das Büschel (29) zwei Nullkreise enthält, die den Parametern  $\lambda' = \pm k$  entsprechen. Sie sind die Punkte  $x = \pm k$  der  $x$ -Achse, die sogenannten *Grenzpunkte* (nach Poncelet<sup>33</sup>). Die *Grundpunkte* dieses Büschels sind *imaginär* und haben die Koordinaten  $x = 0, y = \pm k\sqrt{-1}$ .



Die Mittelpunkte der Kreise (30) liegen auf der  $y$ -Achse; der Radius des Kreises mit dem Parameter  $\lambda''$  ist  $\rho'' = +\sqrt{\lambda''^2 + k^2}$ . Dieses Büschel enthält offenbar keine reellen Nullkreise, wohl aber *reelle Grundpunkte*, sie haben die Koordinaten  $x = \pm k$ ,  $y = 0$ , sind also die Grenzpunkte des Büschels (29).

Zwei in der angegebenen Weise zusammengehörige Kreisbüschel werden als *konjugiert* bezeichnet.

B. 1) Die Kreise  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 16$  schneiden sich unter einem Winkel von  $120^\circ$ .

2) Die Orthogonalkreise zu  $x^2 + y^2 = 14$  von den Mittelpunkten  $3 \mid 5$ ,  $1 \mid 2$  haben die Gleichungen  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$ , bez.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 9 = 0$ .

3) Die Orthogonalkreise eines Nullkreises gehen durch dessen Mittelpunkt.

4) Ein imaginärer Kreis und sein Stellvertreter (Nr. 98) schneiden sich rechtwinklig.

5) Wenn zwei Kreise zueinander orthogonal sind, so ist ihre Potenzlinie die Polare jedes Mittelpunktes in bezug auf den anderen Kreis.

6) Zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten und dem Schnittwinkel  $\gamma$  zweier Kreise (Nr. 121) bestehen die Beziehungen

$$t_a = 2\sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad t_i = 2\sqrt{-\rho_1 \rho_2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

**122. Kreisnetz. Ähnlichkeitsachsen.** Drei Kreise  $k_1(x, y) = 0$ ,  $k_2(x, y) = 0$ ,  $k_3(x, y) = 0$  bestimmen mit Benutzung dreier Parameter  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  ein System von Kreisen

$$(31) \quad \lambda_1 k_1(x, y) + \lambda_2 k_2(x, y) + \lambda_3 k_3(x, y) = 0,$$

das man als *Kreisnetz* bezeichnet. Hierbei mögen  $k_i(x, y) = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wieder die Normalformen der Kreisgleichungen sein. Die Potenzlinien

$$(32) \quad k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0, \quad k_2(x, y) - k_3(x, y) = 0, \quad k_3(x, y) - k_1(x, y) = 0$$

je zweier der drei gegebenen Kreise schneiden sich offenbar (vgl. Nr. 45) in einem Punkte  $S$ , der in bezug auf alle Kreise des Systems dieselbe Potenz hat. Sind  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  die Koordinaten von  $S$ , so ist  $k_1(\alpha_s, \beta_s) = k_2(\alpha_s, \beta_s) = k_3(\alpha_s, \beta_s)$  diese Potenz. Der Kreis  $k_s(x, y) = 0$  mit dem Mittelpunkt  $S$  und dem Radius

$\varrho_s = +\sqrt{k_1(\alpha_s, \beta_s)}$  schneidet die Kreise  $k_1, k_2, k_3$  rechtwinklig, denn aus

$$(33) \quad \varrho_s^2 = k_1(\alpha_s, \beta_s) = c_{1s}^2 - \varrho_1^2 \text{ oder aus } c_{1s}^2 - \varrho_1^2 - \varrho_s^2 = 0$$

folgt, daß der Winkel, unter dem sich  $k_1$  und  $k_s$  schneiden, ein Rechter ist; gleiches gilt für die Schnittwinkel von  $k_s$  mit  $k_2$  und  $k_3$ . Der Kreis  $k_s$  schneidet nach einem früheren Satze (S. 243) alle Kreise des Systems (31) unter rechtem Winkel; insbesondere geht die Potenzlinie von je zwei Kreisen des Systems durch  $S$ . Wir können also sagen:

*Es gibt einen Kreis, der alle Kreise des Netzes (31) rechtwinklig schneidet; der Mittelpunkt dieses Orthogonal- oder Hauptkreises ist der Punkt gleicher Potenzen in bezug auf alle Kreise des Netzes und das Quadrat seines Radius ist gleich der zu seinem Mittelpunkt gehörigen Potenz.*

Je zwei der drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$  haben einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt (vgl. S. 234); wir bezeichnen diese Punkte mit  $P_{12}, P_{23}, P_{31}$  bez.  $Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}$  (Fig. 65). Sie sind die Mittelpunkte der *Steinerschen Potenzkreise*

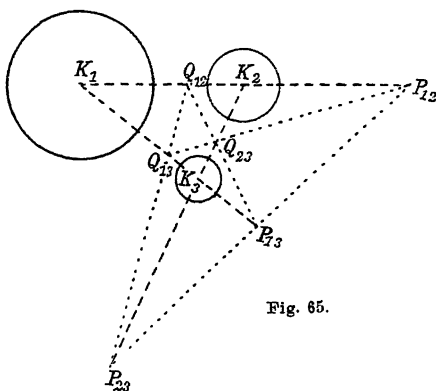


Fig. 65.

$$(34) \quad \begin{cases} \varrho_2 k_1(x, y) \mp \varrho_1 k_2(x, y) = 0 \\ \varrho_3 k_2(x, y) \mp \varrho_2 k_3(x, y) = 0 \\ \varrho_1 k_3(x, y) \mp \varrho_3 k_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

wobei die oberen Vorzeichen für die äußeren, die unteren für die inneren Potenzkreise gelten (vgl. S. 242 und 243). Die äußeren Potenzkreise mögen mit  $p_{12}, p_{23}, p_{31}$ , die inneren mit  $q_{12}, q_{23}, q_{31}$  bezeichnet werden.

Aus den Gleichungen (34) ersieht man, daß die drei äußeren Potenzkreise einem und demselben Büschel angehören. Ihre Mittelpunkte, die äußeren Ähnlichkeitspunkte, liegen daher

auf einer Geraden, der *äußeren Ähnlichkeitsachse*; ihre gemeinsame Potenzlinie ist

$$(35) \varrho_1 \{k_2(x, y) - k_3(x, y)\} + \varrho_2 \{k_3(x, y) - k_1(x, y)\} + \varrho_3 \{k_1(x, y) - k_2(x, y)\} = 0.$$

Sie bildet natürlich mit der äußeren Ähnlichkeitsachse einen rechten Winkel und geht, wie ihre Gleichung zeigt, durch den gemeinsamen Potenzpunkt  $S$  der Kreise des Netzes.

Ebenso liegen je zwei innere und ein äußerer Ähnlichkeitspunkt auf einer Ähnlichkeitsachse; die zugehörigen Potenzkreise gehören wieder einem und demselben Büschel an, dessen Potenzlinie ebenfalls durch  $S$  geht und zu der betreffenden Ähnlichkeitsachse rechtwinklig ist. Die Gleichungen dieser Potenzlinien ergeben sich aus (35) durch Änderung der Vorzeichen von  $\varrho_1$  oder  $\varrho_2$  oder  $\varrho_3$ .

*Die zu drei Kreisen gehörigen Ähnlichkeitspunkte liegen daher viermal zu je dreien auf einer Geraden, es gibt im ganzen vier Ähnlichkeitsachsen.*

**B.** 1) Der Orthogonalkreis zu den drei Kreisen in Nr. 116, 1 hat die Gleichung  $(x + \frac{1}{16})^2 + (y + \frac{25}{16})^2 = \frac{1746}{256}$ .

2) Man bestimme den Orthogonalkreis zu den drei Kreisen  $k_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Durch Elimination von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varrho$  aus  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0$  und aus den drei Orthogonalitätsbedingungen  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 - \varrho_i^2 - 2\alpha\alpha_i - 2\beta\beta_i + \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ergibt sich die Gleichung

$$k_s(x, y) \equiv \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \varrho_1^2 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \varrho_2^2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 - \varrho_3^2 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - \pi_1 & x - \alpha_1 & y - \beta_1 \\ x^2 + y^2 - \pi_2 & x - \alpha_2 & y - \beta_2 \\ x^2 + y^2 - \pi_3 & x - \alpha_3 & y - \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo  $\pi_i$  zur Abkürzung gesetzt ist für  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 - \varrho_i^2$ . In dieser letzten Form drückt die Gleichung des Hauptkreises eine Flächenbeziehung für seine Punkte aus (vgl. Nr. 99).

3) Haben drei Kreise dieselbe Potenzlinie, so gibt es unendlich viele gemeinsame Orthogonalkreise; denn die Bedingungen von Nr. 116 ergeben die Äquivalenz der drei Orthogonalitätsbedingungen mit nur zweien.

4) Sind  $A$  und  $B$  die Endpunkte des Durchmessers eines Kreises  $k$ , so geht die Polare von  $A$  in bezug auf irgend einen Orthogonalkreis von  $k$  durch den Punkt  $B$ .

5) Der Hauptkreis von drei Kreisen ist der Ort der Punkte, deren Polaren in bezug auf die drei Kreise sich in einem Punkt schneiden, nämlich im entgegengesetzten Endpunkt des Durchmessers des Hauptkreises.

Hieraus folgt seine Gleichung in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 y - \pi_1, & x - \alpha_1, & y - \beta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y - \pi_2, & x - \alpha_2, & y - \beta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y - \pi_3, & x - \alpha_3, & y - \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

die auch aus der ersten Determinante in B. 2) durch Umformung der ersten Zeile in  $0, 0, 0, 1$  hervorgeht.

6) Vier Kreise  $k_1, k_2, k_3, k_4$  gehören demselben Netz an, wenn

$$\begin{vmatrix} \pi_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \pi_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \pi_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \\ \pi_4, & \alpha_4, & \beta_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies drückt aus, daß die Tangenten an vier solche Kreise aus einem beliebigen Punkt  $O$  die Gleichung erfüllen<sup>35)</sup>

$$\overline{OT_1}^2 \cdot M_2 M_3 M_4 - \overline{OT_2}^2 \cdot M_3 M_4 M_1 + \overline{OT_3}^2 \cdot M_4 M_1 M_2 - \overline{OT_4}^2 \cdot M_1 M_2 M_3 = 0. \quad (\text{Vgl. Nr. 99.})$$

7) Der Radius  $\varrho$  eines Kreises des Netzes (31) wird bestimmt durch

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \varrho^2 = \lambda_1^2 \varrho_1^2 + \lambda_2^2 \varrho_2^2 + \lambda_3^2 \varrho_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \varrho_1 \varrho_2 \cos \gamma_{12} \\ + 2\lambda_2 \lambda_3 \varrho_2 \varrho_3 \cos \gamma_{23} + 2\lambda_3 \lambda_1 \varrho_3 \varrho_1 \cos \gamma_{31},$$

wobei  $\gamma_{ik}$  den Winkel bezeichnet, unter dem sich die Kreise  $k_i$  und  $k_k$  schneiden. Die Parameter der Nullkreise des Netzes (Punkte des Hauptkreises) genügen also einer Gleichung zweiten Grades.

Eine andere Beziehung ist

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \varrho = \lambda_1 \varrho_1 \cos \gamma_1 + \lambda_2 \varrho_2 \cos \gamma_2 + \lambda_3 \varrho_3 \cos \gamma_3,$$

wo  $\gamma_i$  den Winkel bedeutet, unter dem sich die Kreise  $k_i(x, y) = 0$  und  $\lambda_1 k_1(x, y) + \lambda_2 k_2(x, y) + \lambda_3 k_3(x, y) = 0$  schneiden.

8) Die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Kreise

$$k_i(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y + \pi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \pi_i = \alpha_i^2 + \beta_i^2 - \varrho_i^2$$

hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ \varrho_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \varrho_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \varrho_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koordinaten des zu  $k_1$  und  $k_2$  gehörigen äußeren Ähnlichkeitspunktes  $P_{12}$  sind durch (10), S. 234 gegeben; analoge Werte haben die Koordinaten von  $P_{13}$  und  $P_{23}$ . Die Gleichung der Verbindungslinie  $P_{12}P_{13}$  folgt leicht in Gestalt der soeben erwähnten Determinante; ihre Symmetrie zeigt, daß die Gerade  $P_{12}P_{13}$  auch durch  $P_{23}$  geht.

Die Gleichungen der drei inneren Ähnlichkeitsachsen ergeben sich, wenn man der Reihe nach  $\varrho_i$  durch  $-\varrho_i$  ersetzt ( $i = 1$  oder 2 oder 3).

**123. Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen.** (Problem des Apollonius.) Wir wollen nun *die beiden Kreise  $k'$  und  $k''$  betrachten, die die drei gegebenen Kreise  $k_1, k_2, k_3$  gleichartig berühren*; es soll also  $k'$  *jeden* der drei Kreise entweder unter dem Winkel  $180^\circ$  oder *jeden* unter dem Winkel  $0^\circ$  berühren (vgl. S. 240), und gleiches soll für  $k''$  gelten. Es wird sich zeigen, daß es tatsächlich nur zwei solche Kreise gibt. Die drei gegebenen Kreise mögen von  $k'$  in  $U_1, U_2, U_3$ , von  $k''$  in  $V_1, V_2, V_3$  berührt werden; die Mittelpunkte von  $k_1, k_2, k_3$  seien  $K_1, K_2, K_3$ , die von  $k'$  und  $k''$  seien  $K'$  bez.  $K''$ . Vgl. Fig. 66.

Die Kreise  $k'$  und  $k''$  müssen nach S. 241 die Steinerschen Potenzkreise  $p_{12}, p_{23}, p_{31}$  rechtwinklig schneiden. Nun bilden aber alle Kreise, die  $p_{12}$  und  $p_{13}$  gleichzeitig unter rechtem Winkel schneiden, nach S. 243 ein Büschel; diesem Büschel gehören neben  $k'$  und  $k''$  die äußere Ähnlichkeitsachse  $P_{12}P_{23}$  und der Kreis  $k_3$ , der Hauptkreis des Netzes (31), an, denn  $k_3$  schneidet alle Kreise des Netzes (31) rechtwinklig, also auch die Kreise  $p_{12}$  und  $p_{13}$ . Die Mittelpunkte von  $k', k''$  und  $k_3$  liegen daher auf einer zur Ähnlichkeitsachse  $P_{12}P_{23}$  rechtwinkligen Geraden, und diese Ähnlichkeitsachse schneidet  $k_3$  in zwei Punkten, durch die auch  $k'$  und  $k''$  hindurchgehen.

Betrachten wir nun die Kreise  $k_3, k_1$  und  $k'$ . Sie bestimmen zu je zweien eine gemeinsame Potenzlinie, im ganzen

also drei solche Geraden, die durch einen und denselben Punkt  $J$  gehen. Die Potenzlinie von  $k_s$  und  $k'$  ist die schon

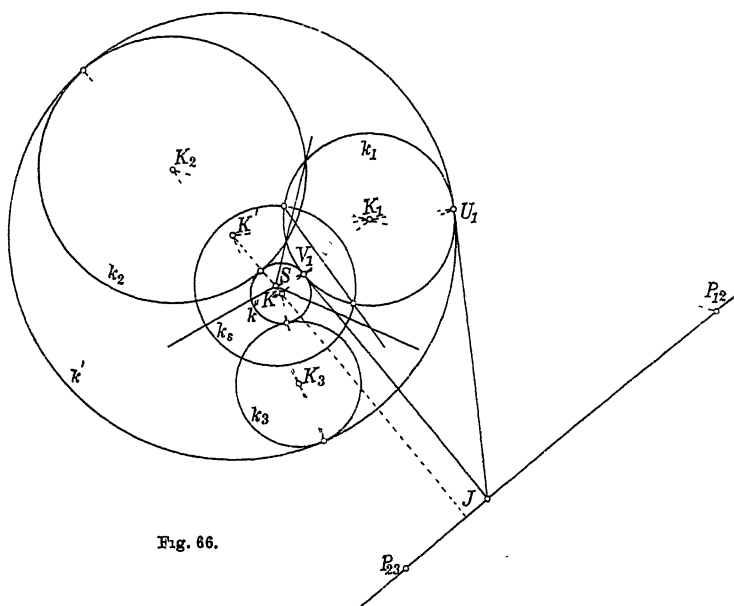


Fig. 66.

erwähnte äußere Ähnlichkeitsachse, die Potenzlinie von  $k_s$  und  $k_1$  ist durch diese Kreise bekannt. Auch die Potenzlinie von  $k'$  und  $k_1$ , d. h. die Tangente von  $k_1$  im Punkte  $U_1$ , muß durch  $J$  gehen ebenso wie die Tangente von  $k_1$  im Punkte  $V_1$ .

Hiernach erfordert die *Konstruktion der Kreise  $k'$  und  $k''$* , die die drei gegebenen Kreise  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  gleichartig berühren, die Zeichnung der folgenden Geraden und Kreise: Zunächst bestimmt man das gemeinsame Potenzzentrum  $S$  von  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  und zieht um  $S$  als Mittelpunkt den Kreis  $k_s$ , der durch die Berührungspunkte der von  $S$  an  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  gelegten Tangentenpaare geht. Hierauf zieht man die äußere Ähnlichkeitsachse  $P_{12}P_{23}$  und schneidet sie mit der Potenzlinie von  $k_s$  und  $k_1$  in  $J$ ; die von  $J$  an  $k_1$  gelegten Tangenten liefern alsdann die Berührungspunkte der gesuchten Kreise  $k'$  und  $k''$  mit  $k_1$ , sie liegen offenbar auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $JK_1$ . Die Geraden  $K_1U_1$  und  $K_1V_1$  schneiden endlich

das von  $S$  auf die äußere Ähnlichkeitsachse gefällte Lot in den gesuchten Mittelpunkten  $K'$ ,  $K''$  von  $k'$  und  $k''$ .

Es sei noch erwähnt, daß  $S$  auf der Geraden  $U_1V_1$  liegt. Zum Beweis ziehe man um  $J$  als Mittelpunkt einen durch  $U_1$  und  $V_1$  gehenden Hilfskreis  $h$ . Dieser schneidet  $k_1$  rechtwinklig, ebenso  $k_s$ , denn die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_s$  geht durch  $J$ . Somit schneidet  $k_s$  außer  $k_1$  auch den Hilfskreis  $h$  rechtwinklig, der Mittelpunkt  $S$  von  $k_s$  liegt also auf der Potenzlinie von  $k_1$  und  $h$ , d. h. auf  $U_1V_1$ .

Ferner ist die Potenzlinie von  $k_s$  und  $k_1$  zugleich die Polare von  $S$  in bezug auf  $k_1$ , denn  $k_s$  geht durch die Berührungspunkte der von  $S$  an  $k_1$  gelegten Tangenten. Endlich ist die Gerade  $U_1V_1$  die Polare von  $J$  in bezug auf  $k_1$ , sie geht also auch durch den Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse in bezug auf  $k_1$  (vgl. S. 223) und kann daher stets als Verbindungslinie von  $S$  mit dem eben genannten Pol gezeichnet werden. Ebenso gehen die Verbindungslinien der auf  $k_2$  bez. auf  $k_3$  gelegenen Berührungspunkte der Kreise  $k'$  und  $k''$  durch den Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse in bezug auf  $k_2$  bez.  $k_3$ .

Solange  $J$  außerhalb des Kreises  $k_1$  liegt, sind die Punkte  $U_1$ ,  $V_1$  und damit auch die Kreise  $k'$  und  $k''$  reell. Ist der Kreis  $k_s$  reell, so gilt das gleiche auch von der vorhin angegebenen Konstruktion von  $k'$  und  $k''$ . Liegt jedoch  $S$  innerhalb  $k_1$  (und daher auch innerhalb  $k_2$  und  $k_3$ ), so ist  $k_s$  nicht mehr reell, die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_s$  läßt sich alsdann nicht mehr wie vorher zeichnen; jedoch ist sie als Polare von  $S$  in bezug auf  $k_1$  reell konstruierbar.

Aber man kann auch ohne Benutzung der Polarentheorie zum Ziel gelangen. Bei der Konstruktion von  $k'$  und  $k''$  kann nämlich an Stelle des Kreises  $k_s$  auch irgend ein anderer Kreis  $k_0$  benutzt werden, der die Potenzkreise  $p_{12}$  und  $p_{23}$  rechtwinklig schneidet. Denn  $J$  ist ein Punkt gleicher Potenz für die Kreise  $k_s$ ,  $k_1$  und  $k'$ ; zugleich ist die äußere Ähnlichkeitsachse Potenzlinie für alle Kreise, die  $p_{12}$  und  $p_{23}$  rechtwinklig schneiden (vgl. S. 248), also auch für die Kreise  $k_0$  und  $k_s$ . Daher hat  $J$  die gleiche Potenz in bezug auf die vier Kreise  $k_s$ ,  $k_1$ ,  $k'$  und  $k_0$ . Die Mittelpunkte der Orthogonalkreise von

$p_{12}$  und  $p_{23}$  liegen auf dem von  $S$  auf die Ähnlichkeitsachse gefällten Lote; an Stelle von  $k_s$  kann man also irgend einen Kreis  $k_0$  benutzen, dessen Mittelpunkt  $K_0$  auf diesem Lot liegt, während er zugleich  $p_{12}$  rechtwinklig schneidet. Man wähle mithin auf  $p_{12}$  einen beliebigen Punkt  $E$  und ziehe in ihm die zugehörige Tangente; ihr Schnittpunkt mit jenem Lot ist  $K_0$ , und  $k_0$  ist alsdann der um  $K_0$  als Mittelpunkt mit  $K_0E$  als Radius gezogene Kreis. Die Potenzlinie von  $k_0$  und  $k_1$  geht wieder durch  $J$ , und  $U_1, V_1$  sind wie vorher die Berührungspunkte der von  $J$  an  $k_1$  gelegten Tangenten.

Solange  $k_s$  reell ist, wird man zur Konstruktion diesen Kreis benutzen. Wird jedoch  $k_s$  imaginär, so schneiden sich die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in zwei reellen Punkten (ebenso  $k_2$  und  $k_3$  sowie  $k_3$  und  $k_1$ ), und durch diese beiden geht auch der Kreis  $p_{12}$  mit dem Mittelpunkt  $P_{12}$ , denn er gehört dem durch  $k_1$  und  $k_2$  bestimmten Büschel an (vgl. S. 241). Man kann hier den vorhin erwähnten Punkt  $E$  mit einem der Schnittpunkte von  $k_1$  und  $k_2$  zusammenfallen lassen; das in  $E$  auf  $EP_{12}$  errichtete Lot schneidet alsdann den Punkt  $K_0$  aus, so daß man den Kreis  $p_{12}$  nicht nötig hat.

*Sucht man die beiden Kreise, die zwei der Kreise  $k_1, k_2, k_3$  gleichartig, den dritten ungleichartig berühren, so tritt an Stelle der äußeren Ähnlichkeitsachse eine der drei übrigen Ähnlichkeitsachsen (vgl. S. 246); die hierdurch bedingte Änderung der Konstruktion ergibt sich von selbst.*

Man erkennt, daß es im ganzen acht Kreise gibt, die drei gegebene Kreise berühren.<sup>86)</sup>

124. Es soll nun die Aufgabe behandelt werden: die Kreise zu bestimmen, die drei gegebene Kreise unter den vorgegebenen Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  schneiden. Wir werden sehen, daß es auch hier zwei Kreise  $k'$  und  $k''$  gibt, die die gegebenen Kreise entweder alle zugleich unter den vorgegebenen Winkeln oder alle zugleich unter den zugehörigen Supplementwinkeln schneiden. Denn die Kreise, die zwei gegebene Kreise  $k_1$  und  $k_2$  unter den Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden, und die Kreise, die  $k_1$  und  $k_2$  unter den Winkeln  $180^\circ - \gamma_1$  und  $180^\circ - \gamma_2$  schneiden, bilden eine zusammenhängende Schar; den Über-



gang bilden die *Geraden*, die  $k_1$  und  $k_2$  unter den Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden (oder unter den Winkeln  $180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \gamma_2$ , wenn man den Durchlaufssinn der Geraden umkehrt).

Die gesuchten Kreise  $k'$  und  $k''$  müssen nach (26) die Kreise

$$(36) \quad \begin{cases} l_{12} \equiv \varrho_2 \cos \gamma_2 k_1(x, y) - \varrho_1 \cos \gamma_1 k_2(x, y) = 0 & \text{und} \\ l_{13} \equiv \varrho_3 \cos \gamma_3 k_1(x, y) - \varrho_1 \cos \gamma_1 k_3(x, y) = 0 \end{cases}$$

rechtwinklig schneiden, deren Mittelpunkte  $L_{12}$  und  $L_{13}$  nach (21) die Koordinaten haben:

$$\frac{\alpha_1 \varrho_2 \cos \gamma_2 - \alpha_2 \varrho_1 \cos \gamma_1}{\varrho_2 \cos \gamma_2 - \varrho_1 \cos \gamma_1}, \quad \frac{\beta_1 \varrho_2 \cos \gamma_2 - \beta_2 \varrho_1 \cos \gamma_1}{\varrho_2 \cos \gamma_2 - \varrho_1 \cos \gamma_1} \quad \text{bez.} \\ \frac{\alpha_1 \varrho_3 \cos \gamma_3 - \alpha_3 \varrho_1 \cos \gamma_1}{\varrho_3 \cos \gamma_3 - \varrho_1 \cos \gamma_1}, \quad \frac{\beta_1 \varrho_3 \cos \gamma_3 - \beta_3 \varrho_1 \cos \gamma_1}{\varrho_3 \cos \gamma_3 - \varrho_1 \cos \gamma_1}.$$

Zieht man also von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  aus drei parallele Strecken von den Längen  $\varrho_1 \cos \gamma_1, \varrho_2 \cos \gamma_2, \varrho_3 \cos \gamma_3$ , so geht die Verbindungslinie der Endpunkte der ersten und zweiten Strecke durch  $L_{12}$ , die der Endpunkte der ersten und dritten Strecke durch  $L_{13}$ . Dabei sind diese Strecken von gleichem oder verschiedenem Richtungssinn, je nachdem ihre Vorzeichen gleich oder verschieden sind.

Nun gehören alle zu  $l_{12}$  und  $l_{13}$  orthogonalen Kreise nach S. 243 einem Büschel an, das auch die Kreise  $k', k'', k_s$  und die Gerade  $L_{12}L_{13}$  enthält; dabei ist  $k_s$  wieder der gemeinsame Orthogonalkreis von  $k_1, k_2, k_3$ . Die Kreise  $k'$  und  $k''$  gehen daher durch die Schnittpunkte von  $k_s$  mit der Geraden  $L_{12}L_{13}$ , und ihre Mittelpunkte  $K'$  und  $K''$  liegen auf dem Lot  $SM$ , das von  $S$ , dem Mittelpunkte des Kreises  $k_s$ , auf  $L_{12}L_{13}$  gefällt wird. Jetzt zeichne man die Gerade  $f$ , die die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  unter den Winkeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneidet; sie geht durch  $L_{12}$  und berührt den um  $K_1$  mit dem Radius  $\varrho_1 \cos \gamma_1$  gezogenen Kreis. Ist  $c$  die gemeinsame Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_2$  und bildet diese mit  $f$  den Winkel  $\gamma$ , so müssen auch  $k'$  und  $k''$  die Gerade  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$  schneiden.

Nach den Realitätsverhältnissen unterscheiden wir jetzt zwei verschiedene Fälle.

1) Die Schnittpunkte von  $k_s$  mit der Geraden  $L_{12}L_{13}$  sind reell, sie seien  $A$  und  $B$  ( $AM = MB$  [Fig. 67]). Alsdann gehen die Kreise  $k'$  und  $k''$  durch  $A$  und  $B$  und sie schneiden die Gerade  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$ .

2) Die Gerade  $L_{12}L_{13}$  hat mit  $k_s$  keine reellen Punkte gemeinsam (hierzu gehört auch der Fall, daß  $k_s$  imaginär ist). Dann bestimmen  $k_s$  und  $L_{12}L_{13}$  ein Kreisbüschel, das zwei

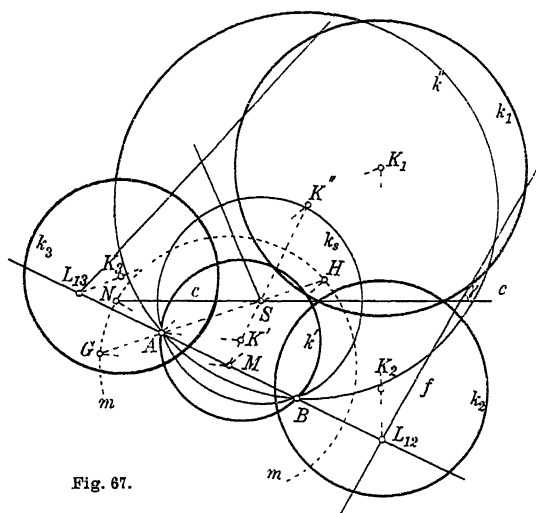


Fig. 67.

Nullkreise enthält, sie seien  $D$  und  $E$ . Zu diesem Büschel gibt es ein Büschel orthogonaler Kreise, dem auch die Kreise  $l_{12}$  und  $l_{13}$  angehören, da sie zu  $k_s$  und zu der Geraden  $L_{12}L_{13}$  orthogonal sind. Die Potenzlinie von  $l_{12}$  und  $l_{13}$  (die Gerade  $SM$ ) wird nach einem früheren Satze (S. 243) von diesen Kreisen in den Punkten  $D$  und  $E$  geschnitten, wobei  $M$  die Strecke  $DE$  halbiert (Fig. 68). Wir konstruieren hier einen Hilfskreis  $h$ , der durch  $D$  und  $E$  geht und von  $c$  unter dem Winkel  $90^\circ - \gamma$  geschnitten wird. Sind  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte von  $h$  mit  $c$ , so schneiden die in  $P$  und  $Q$  gezogenen Tangenten von  $h$  die Gerade  $SM$  in den Mittelpunkten  $K'$ ,  $K''$  der gesuchten Kreise  $k'$ ,  $k''$ , deren Radien  $K'P$  und  $K''Q$  sind. In der Tat werden diese Kreise von  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$

geschnitten, zugleich sind sie orthogonal zu  $h$  und  $SM$ , also auch zu  $l_{12}$  und  $l_{13}$  als Kreisen des durch  $h$  und  $SM$  bestimmten Büschels.

In beiden Fällen schneiden die gefundenen Kreise  $k'$  und  $k''$  die Kreise  $l_{12}$  und  $l_{13}$  rechtwinklig und die Gerade  $c$

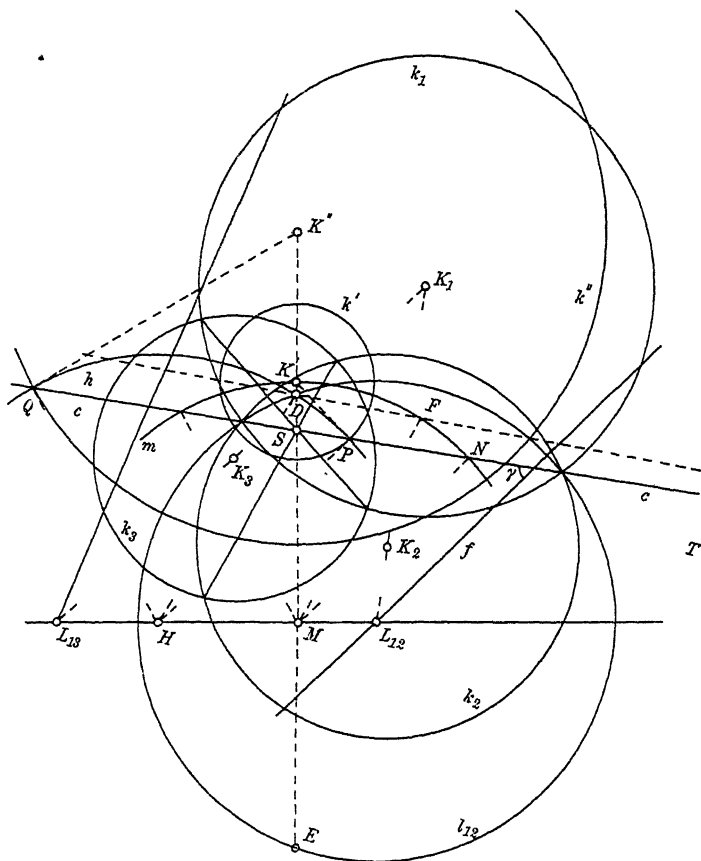


Fig. 68.

unter dem Winkel  $\gamma$ . Aber alle Kreise, die  $l_{12}$  und  $c$  unter konstanten Winkeln schneiden, treffen auch jeden Kreis des durch  $l_{12}$  und  $c$  bestimmten Büschels unter konstanten Winkeln. Nun sind  $k'$ ,  $k''$  und  $f$  (in eine Gerade ausgeartet) solche Kreise, folglich schneiden  $k'$  und  $k''$  den Kreis  $k_1$  unter dem Winkel  $\gamma_1$ ,

$k_2$  unter dem Winkel  $\gamma_2$ . Alle Kreise, die  $k_1$  unter dem Winkel  $\gamma_1$  und  $l_{13}$  rechtwinklig schneiden, treffen aber den Kreis  $k_3$ , der dem durch  $k_1$  und  $l_{13}$  bestimmten Büschel angehört, unter dem Winkel  $\gamma_3$ . Diese Bemerkungen sind noch dahin zu ergänzen, daß, wenn für  $\gamma_1$  der Supplementwinkel eintritt, auch gleichzeitig für  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  die Supplementwinkel eintreten.

Die hier geschilderte Lösung des Problems erfordert in beiden Fällen die Konstruktion eines Kreises, der durch zwei reelle Punkte  $A, B$  (bez.  $D, E$ ) geht und die Gerade  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$  (bez.  $90^\circ - \gamma$ ) schneidet. Um ihn zu erhalten, ziehe man (Fig. 67) durch  $M$  rechtwinklig zu  $f$  eine Gerade und schneide diese mit  $c$  in  $N$ ; der um  $M$  als Mittelpunkt mit  $MN$  als Radius gezogene Kreis  $m$  schneidet die Gerade  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$ . Sind  $G$  und  $H$  die Schnittpunkte von  $SA$  mit  $m$  und zieht man durch  $A$  zu  $GM$  und zu  $HM$  eine Parallele, so treffen diese Parallelen die Gerade  $SM$  in den Mittelpunkten  $K'$  bez.  $K''$  der gesuchten Kreise  $k', k''$ , und  $K'A$  bez.  $K''A$  sind die zugehörigen Radien. Denn  $S$  ist Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $m$  und  $k'$  und ebenso für  $m$  und  $k''$ ; daher schneiden die drei Kreise  $m, k', k''$  die Gerade  $c$  unter demselben Winkel  $\gamma$ .

Ganz ähnlich erhält man im zweiten Falle den Hilfskreis  $h$  durch  $D$  und  $E$ , der  $c$  unter dem Winkel  $90^\circ - \gamma$  trifft (Fig. 68). Man ziehe durch  $M$  eine Parallele zu  $f$  und schneide sie mit  $c$  in  $N$ ; der Kreis  $m$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $MN$  trifft  $c$  unter dem Winkel  $90^\circ - \gamma$ . Der gesuchte Kreis  $h$  geht durch  $D$  und  $E$ , sein Mittelpunkt  $H$  liegt also auf  $L_{12}L_{13}$ ; zugleich soll er  $c$  unter dem Winkel  $90^\circ - \gamma$  schneiden. Hiernach ist der Schnittpunkt  $T$  von  $c$  und  $L_{12}L_{13}$  ein Ähnlichkeitszentrum von  $h$  und  $m$ . Man schneide also  $TD$  mit  $m$  in einem Punkte  $F$  und ziehe durch  $D$  eine Parallele zu  $FM$ ; sie schneidet  $L_{12}L_{13}$  in dem Mittelpunkt  $H$  des Kreises  $h$ , und  $HD$  ist dessen Radius.

Hier ist noch eine Bemerkung über den Kreis  $l_{12}$  zu machen, der aus  $SM$  die Punkte  $D$  und  $E$  ausschneidet. Er gehört dem Büschel der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  an. Schneiden sich diese beiden in reellen Punkten, so geht daher auch  $l_{12}$  durch

ihre Schnittpunkte hindurch. Haben aber  $k_1$  und  $k_2$  keine reellen Schnittpunkte, so ist  $k_s$  reell; da aber  $D$  und  $E$  die Nullkreise des durch  $k_s$  und  $L_{12}L_{13}$  bestimmten Büschels sind, ist  $MD = ME$  so groß wie die Länge der von  $M$  an  $k_s$  gelegten Tangenten.

Die angegebenen Konstruktionen von  $k'$  und  $k''$  sind daher in allen Fällen reell durchführbar, solange es überhaupt reelle Kreise  $k'$ ,  $k''$  gibt.

B. 1) Wenn der Kreis  $\alpha | \beta | \pi$  durch drei feste Kreise  $\alpha_i | \beta_i | \pi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) unter Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  geschnitten werden soll, die durch ihre Kosinus bestimmt sind, so hat man zunächst zwischen seiner Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$$

und den Schnittwinkelbedingungen

$$\pi_i + 2\varrho\varrho_i \cos \gamma_i - 2\alpha\alpha_i - 2\beta\beta_i + \pi = 0$$

die Größen  $\alpha, \beta, \pi$  zu eliminieren. Man erhält

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \pi_1 + 2\varrho\varrho_1 \cos \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \pi_2 + 2\varrho\varrho_2 \cos \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \pi_3 + 2\varrho\varrho_3 \cos \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung dieser Determinante ergibt einen Ausdruck von der Form  $L(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0$ , wo  $A, B$  und  $C$  den Radius  $\varrho$  des gesuchten Kreises linear enthalten. Andererseits hat man offenbar  $\varrho^2 = \frac{A^2 + B^2 - CL}{L^2}$  oder  $L^2\varrho^2 - A^2 - B^2 + CL = 0$ , eine quadratische Gleichung für  $\varrho$ ; jede ihrer Wurzeln liefert nach Einführung in die Determinante an Stelle von  $\varrho$  die Gleichung eines Kreises, der die drei gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  schneidet.

Für  $\gamma_i = \frac{1}{2}\pi$  erhält man wieder die Gleichung  $k_s(x, y) = 0$ , mit  $\gamma_i = 0$  bez.  $= \pi$  die Gleichung der berührenden Kreise zu drei gegebenen (Nr. 123).

2) Die Kreise, die drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden, bilden ein Büschel, das die äußere Ähnlichkeitsachse zur Potenzlinie hat. Natürlich enthält dieses Büschel auch den Orthogonalkreis der drei gegebenen Kreise.

Man erhält die Gleichung des Büschels, wenn man in der Determinante des vorhergehenden Beispiels  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$  und  $2\varrho \cos \gamma = \lambda$  setzt; dies ergibt

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \pi_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \pi_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \pi_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ \varrho_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \varrho_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \varrho_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Determinante in dieser Gleichung stellt, gleich Null gesetzt, den Orthogonalkreis, die zweite die äußere Ähnlichkeitsachse dar (vgl. B. 8, S. 247f.).

Die Berechnung des Radius  $\varrho$  des einem bestimmten Wert des Parameters  $\lambda$  entsprechenden Büschelkreises ergibt eine Beziehung zwischen  $\varrho$  und  $\lambda$ , die vermöge  $2\varrho \cos \gamma = \lambda$  sofort in eine Beziehung zwischen  $\gamma$  und  $\lambda$  übergeführt werden kann; diese ist in  $\lambda$  vom zweiten Grade.

Es drängt sich hier natürlich die Frage auf, was für Beziehungen die durch den Hauptkreis und eine der anderen Ähnlichkeitsachsen bestimmten Büschel zu den drei gegebenen Kreisen haben. Die Gleichung eines solchen Büschels ergibt sich dadurch, daß man in der vorhin gegebenen Gleichung bei  $\varrho_1$  oder  $\varrho_2$  oder  $\varrho_3$  das Vorzeichen ändert. Man findet leicht, daß der *Hauptkreis mit den Ähnlichkeitsachsen als Potenzlinien vier Büschel von Kreisen bestimmt, die die drei gegebenen Kreise unter Winkeln von gleichen Kosinuskwerten schneiden.*

**125. Inversion.** Ist ein Kreis  $J$  vom Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $\kappa$  gegeben, so kann man zu einem beliebigen Punkt  $P$  der Ebene einen Punkt  $P'$  auf demselben Halbstrahl  $OP$  so bestimmen, daß das Produkt  $OP \cdot OP'$  konstant gleich  $\kappa^2$  ist. Zwei Punkte  $P$  und  $P'$  entsprechen sich daher, wenn ihre Radienvektoren aus  $O$  der Richtung und dem Sinne nach zusammenfallen und der Größe nach reziproke Werte ergeben, wenn man  $\kappa$  als Maßeinheit nimmt, so daß  $OP' : \kappa = 1 : (OP : \kappa)$  ist. Die nach dieser Methode der Zuordnung nach reziproken Radien sich entsprechenden

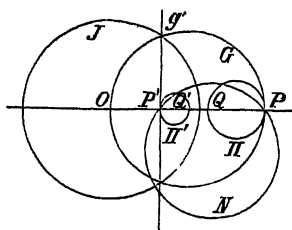


Fig. 69

Punkte  $P$ ,  $P'$  heißen *inverse Punkte*, der Punkt  $O$  heißt *Zentrum der Inversion*, der Kreis  $J$  heißt *Inversionskreis oder Hauptkreis (Direktrix) der Inversion* (Fig. 69). Man sagt auch, daß der eine der beiden Punkte  $P$ ,  $P'$  aus dem anderen mit Hilfe einer *Transformation durch reziproke Radienvektoren* hervorgeht.<sup>29)</sup>

Nimmt man das Inversionszentrum zum Nullpunkt eines Systems von Polarkoordinaten, so erhält man aus den Polarkoordinaten  $r|\vartheta$  eines gegebenen Punktes die Koordinaten  $r'|\vartheta'$  des inversen bei gegebenem Inversionskreis einfach gemäß

$$(37) \quad rr' = \kappa^2, \quad \vartheta = \vartheta'.$$

Zu rechtwinkligen Koordinaten  $x|y, x'|y'$  übergehend folgen aus

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = \kappa^2, \quad y : x = y' : x'$$

die Transformationsformeln der Inversion:

$$(38) \quad x = \frac{\kappa^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{\kappa^2 y'}{x'^2 + y'^2}; \quad x' = \frac{\kappa^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{\kappa^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Sehen wir zunächst vom Inversionszentrum ab, so entspricht nach diesen Formeln jedem reellen Punkt  $P$  der Ebene ein und nur ein inverser Punkt  $P'$ , denn  $x'|y'$  sind rational ausgedrückt durch  $x|y$ . Umgekehrt wird auch zu  $P'$  eindeutig  $P$  als invers erhalten. Jedem reellen unendlich fernen Punkt jedoch entspricht stets das Inversionszentrum, und umgekehrt entspricht diesem jeder unendlich ferne Punkt als invers. Das Zentrum ist also der einzige reelle Punkt, zu dem der inverse nicht eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit der Beziehung gilt wiederum uneingeschränkt von imaginären Punkten, abgesehen von denen der Vektoren absoluter Richtung  $x^2 + y^2 = 0$ : jedem unendlichen Punkt, für den  $y : x = \pm i$ , entspricht die absolute Richtung  $\pm i$  selbst und umgekehrt.

Nach Nr. 110 ist bekannt, daß von Punkten  $P, P'$ , für die  $OP \cdot OP' = \kappa^2$  ist, jeder in der Polare des anderen bezüglich des Kreises  $J$  liegt, oder daß *inverse Punkte konjugiert harmonische Pole in bezug auf die Endpunkte ihres Durchmessers im Inversionskreis* sind. Dies liefert ein einfaches Konstruktionsmittel.

Ferner darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\kappa = 1$  oder der Einheitskreis als Inversionskreis genommen werden, da dies nur bedeutet, daß  $x|y, x'|y'$  die mit  $\kappa$  gemessenen Koordinatenlängen bedeuten. Daher sollen unter Inversionsformeln weiterhin einfach verstanden sein

$$(39) \quad x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Mechanisch verwirklicht wird diese Transformation durch den schon in Beispiel 7 zu Nr. 108 erwähnten „*Inversor*“ von *Peaucellier*.

\* 126. Beschreibt der Punkt  $P$  eine Kurve, so erzeugt gleichzeitig der inverse Punkt  $P'$  eine Kurve, die man die Inverse zur ersten nennt. Hier gilt vor allem der Satz: *die Inverse zu einem Kreis ist stets wiederum ein Kreis*.

Denn, lautet die Gleichung eines gegebenen Kreises  $k$

$$(40) \quad k(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0,$$

so erhalten wir für den inversen Ort durch die Substitution (39) die Gleichung

$$\frac{1 - 2\alpha x' - 2\beta y'}{x'^2 + y'^2} + \pi = 0.$$

Ist also  $\pi \neq 0$ , so ist die Inverse der Kreis  $k'$  von der Gleichung

$$(41) \quad k'(x', y') \equiv x'^2 + y'^2 - 2\frac{\alpha}{\pi}x' - 2\frac{\beta}{\pi}y' + \frac{1}{\pi} = 0,$$

dessen Mittelpunkt und Radius somit folgen aus

$$(42) \quad \alpha' = \alpha : \pi, \quad \beta' = \beta : \pi, \quad \rho'^2 = \rho^2 : \pi^2.$$

Die Mittelpunkte inverser Kreise sind daher nicht invers.

Zwei Kreise, von denen der eine aus dem anderen durch Inversion hervorgeht, schneiden den Inversionskreis in denselben Punkten, denn ein jeder hat mit  $x^2 + y^2 = 1$  dieselbe Potenzlinie  $-2\alpha x - 2\beta y + \pi + 1 = 0$ . Die Winkel, unter denen die Kreise  $k$  und  $k'$  den Inversionskreis schneiden, sind ihrer Größe nach Supplementwinkel; dabei ist die Definition des Schnittwinkels nach S. 240 zugrunde gelegt. Übrigens durchlaufen offenbar  $P$  den Kreis  $k$  und  $P'$  den Kreis  $k'$  nicht in demselben Sinn, sondern *inverse Figuren haben stets entgegengesetzten Drehungssinn*.

Die Inverse eines Kreises  $g$ , der durch das Inversionszentrum geht, ist eine Gerade  $g'$ , nämlich seine Potenzlinie mit  $J$ . Denn für  $\pi = 0$  lautet die inverse Gleichung

$$-2\alpha x' - 2\beta y' + 1 = 0;$$

sie stellt die Gerade von den Koordinaten  $-2\alpha | -2\beta$  dar. Umgekehrt ist die Inverse einer Geraden ein durch  $O$  und durch die Schnittpunkte der Geraden mit  $J$  gehender Kreis.



*Insbesondere entsprechen Strahlen durch das Inversionszentrum sich selbst.* Man erkennt beides durch Einführung von (39) in

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0.$$

Diese Sätze sind unter dem ersten allgemeineren mit umfaßt, wenn man wie in Nr. 99 ein aus einer Geraden und dem Unendlichfernen bestehendes Geradenpaar als Grenzform eines Kreises ansieht. Denn in der Tat entspricht dem Punkt  $O$  das ganze Unendlichferne, also können den übrigen Punkten eines durch  $O$  gehenden Kreises nur noch Punkte einer Geraden entsprechen.

*Die Inversen der Kreise eines Büschels bilden ebenfalls ein Kreibüschel*, denn die Paare gemeinsamer Schnittpunkte sind invers. Ist insbesondere das Inversionszentrum ein Grundpunkt des Büschels, so ist die inverse Figur ein Strahlenbüschel.

Der Inversionskreis  $x^2 + y^2 = 1$  ist der Ort der zu sich selbst inversen Punkte. Damit aber überhaupt ein Kreis mit seinem Inversen zusammenfalle, ist notwendig und hinreichend  $\pi = 1$ , da nur dann  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \beta$ ,  $\pi' = 1$ ,  $\varrho' = \varrho$  ist. Ein solcher Kreis schneidet aber  $J$  rechtwinklig (Nr. 121). *Auch umgekehrt ist jeder Orthogonalkreis des Hauptkreises zu sich selbst invers*, und jeder Strahl aus  $O$  schneidet den Orthogonalkreis in einem Paar inverser Punkte. Die Umkehrung können wir auf die Form bringen: *Jeder durch ein Paar inverser Punkte gehende Kreis ist zum Hauptkreis orthogonal*, denn da seine Schnittpunkte mit  $J$  sich selbst entsprechen, deckt er sich mit seinem Inversen. Die einzigen zu sich selbst inversen Geraden sind die Strahlen aus dem Inversionszentrum.

\* 127. *Isogonalität.* Von grundlegender Bedeutung für die Übertragung geometrischer Eigenschaften einer Figur auf ihre Inverse sind die *Proportionen* in Nr. 126

$$(43) \quad \alpha : \beta : 1 = \alpha' : \beta' : \pi', \quad \pi' = 1 : \pi, \quad \varrho^2 : \pi = \varrho'^2 : \pi',$$

die zunächst ausdrücken, daß inverse Kreise  $k, k'$  in bezug auf das Inversionszentrum ähnlich sind. Hat man aber irgend zwei Kreise  $k_1 : \alpha_1 | \beta_1; \varrho_1$  und  $k_2 : \alpha_2 | \beta_2; \varrho_2$  und sind  $k'_1 : \alpha'_1 | \beta'_1; \varrho'_1$  und  $k'_2 : \alpha'_2 | \beta'_2; \varrho'_2$  ihre Inversen, so finden sich alle die

Beziehungen zwischen  $k_1$  und  $k_2$  unverändert auch wieder zwischen  $k'_1$  und  $k'_2$  vor, deren analytische Ausdrücke nur von Quotienten wie

$$(44) \quad \frac{\alpha_1^2}{\varrho_1^2}, \quad \frac{\beta_1^2}{\varrho_1^2}, \quad \frac{\alpha_2^2}{\varrho_2^2}, \quad \frac{\beta_2^2}{\varrho_2^2}, \quad \frac{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}$$

abhängen, da diese ihren Wert nicht ändern, wenn die Buchstaben ohne Akzente durch die akzentuierten ersetzt werden. Einer der wichtigsten Ausdrücke dieser Art ist der für das Quadrat des Kosinus des Winkels  $\gamma$ , unter dem sich die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  schneiden, nämlich nach (23):

$$\cos^2 \gamma = \left\{ \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2}{2 \varrho_1 \varrho_2} \right\}^2 = \left\{ \frac{-\pi_1 - \pi_2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 + 2 \beta_1 \beta_2}{2 \varrho_1 \varrho_2} \right\}^2.$$

Ist  $\gamma'$  der Schnittwinkel der zu  $k_1$  und  $k_2$  inversen Kreise  $k'_1$ ,  $k'_2$ , so findet die Beziehung statt

$$(45) \quad \cos^2 \gamma = \cos^2 \gamma', \quad \cos \gamma' = \pm \cos \gamma.$$

(Nach der Ausdrucksweise von Nr. 91 sind die Quotienten (44) *Invarianten der inversen Transformation* zu nennen.)

In der Definition des Schnittwinkels zweier Kreise auf Grund der Formel (23) (S. 240) sind die Radien der beiden Kreise ihrer Natur nach als positive Größen vorausgesetzt. Hält man hieran fest und beachtet, daß nach (43)  $\varrho' = \pm \sqrt{\frac{\varrho^2}{\pi^2}}$  ist, so folgt, daß in der Formel  $\varrho' = \varrho : (\pm \pi)$  der Nenner positiv sein muß, man also das Plus- oder Minuszeichen zu setzen hat, je nachdem  $\pi$  positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem das Inversionszentrum  $O$  außerhalb oder innerhalb des Kreises  $k$  liegt. Man hat daher den Satz: *Der Winkel zweier Kreise ist gleich oder supplementär mit dem ihrer Inversen, je nachdem das Inversionszentrum innerhalb oder außerhalb der beiden, oder innerhalb des einen und außerhalb des anderen liegt.*

*Da sonach überhaupt Winkelgrößen durch Inversion nicht geändert werden, inverse Figuren also gleichwinklig oder isogonal sind, so heißt die Transformation nach reziproken Radien eine isogonale Verwandtschaft.<sup>37)</sup>*

Wenn man durch diese Transformation eine aus Kreisen und Geraden bestehende Figur ohne Änderung der Winkel in

eine wieder nur Kreise und Geraden enthaltende Figur verwandelt, kann man oft bedeutende Vereinfachungen derselben erzielen. Man verfügt in dieser Absicht über die Data der Inversion passend so, daß man einen besonderen Punkt der Figur zum Inversionszentrum oder einen ausgezeichneten Kreis der Figur zum Inversionskreis wählt.

Anwendungen dieses Prinzips enthalten die B. und Nr. 128.

B. 1) Ein beliebiges Kreispaar  $k_1, k_2$  kann stets in ein Paar kongruente Kreise verwandelt werden; man hat zu diesem Zweck das Inversionszentrum  $O$  in irgend einem Punkt des äußeren oder des inneren Steinerschen Potenzkreises anzunehmen, je nachdem  $\pi_1$  und  $\pi_2$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Denn die Forderung  $\varrho'_1 = \varrho'_2$  hat zur Folge  $\varrho_1^2 : \varrho_2^2 = \pi_1^2 : \pi_2^2$ . Vgl. ferner S. 241 — 243.

2) Zwei beliebige Kreise  $k_1, k_2$  ohne reelle Schnittpunkte können durch Inversion in konzentrische verwandelt werden.

Dazu muß das Inversionszentrum  $O$  so gewählt werden, daß  $\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \pi_1 : \pi_2$ , also auch  $\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} : \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \pi_1 : \pi_2$  ist, es müssen also die Abstände des Inversionszentrums  $O$  von den Mittelpunkten der beiden Kreise  $k_1, k_2$  den Potenzen von  $O$  in bezug auf  $k_1, k_2$  proportional sein. Man kann zeigen, daß dies eintritt, wenn  $O$  ein Grenzpunkt des durch  $k_1$  und  $k_2$  bestimmten Büschels ist. *Jedes Büschel ohne reelle Grundpunkte ist also zu einem Büschel konzentrischer Kreise invers.*

3) Drei beliebige Kreise mit reellem Orthogonalkreis können in solche mit gemeinsamer Zentrale verwandelt werden.

Als Inversionszentrum genügt ein beliebiger Punkt ihres Orthogonalkreises, denn die Inverse dieses Kreises wird eine Gerade, die die Inversen der gegebenen Kreise orthogonal, d. h. als Durchmesser schneidet. Ein Netz mit reellem Hauptkreis ist somit zu der Gesamtheit der Kreise einer gemeinsamen Zentrale invers.

\* 128. Distanz-, Tangenten- und Winkelbeziehungen. Zwischen vier Punkten 1, 2, 3, 4 einer Geraden besteht (vgl. Gl. [7] in Nr. 83) die identische Streckenbeziehung

$$(46) \quad \overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{14} \cdot \overline{23} = \overline{13} \cdot \overline{24}.$$

Berühren in jenen vier Punkten vier Kreise die gegebene Gerade, so können wir die Strecken als die Längen der gemeinsamen Tangenten der Kreise bezeichnen, zwischen denen,

nach Division durch die Quadratwurzel aus dem Produkt aller Radien, die Beziehung stattfindet

$$(47) \quad \frac{\overline{12}}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\overline{34}}{\sqrt{r_3 r_4}} + \frac{\overline{14}}{\sqrt{r_1 r_4}} \cdot \frac{\overline{23}}{\sqrt{r_2 r_3}} = \frac{\overline{13}}{\sqrt{r_1 r_3}} \cdot \frac{\overline{24}}{\sqrt{r_2 r_4}}.$$

Wenn wir nun die inverse Figur des Ganzen bilden, so erhalten wir aus der Geraden einen Kreis, der vier andere Kreise berührt. Bezeichnet  $\overline{12}$  die Länge einer gemeinsamen Tangente der Kreise  $k_1, k_2$ , so besteht zwischen sechs gemeinsamen Tangenten der vier denselben fünften berührenden Kreise dieselbe Beziehung wie zwischen den Strecken der Geraden, weil bei der Inversion die drei Glieder der Gleichung (47) — abgesehen von einem und demselben den invertierten Gliedern gemeinsamen Faktor — unverändert bleiben. Dabei haben wir, je nachdem zwei Kreise den umhüllenden Kreis von derselben oder von entgegengesetzter Seite berühren, die äußere oder innere gemeinsame Tangente zu nehmen.

Der bekannteste Sonderfall dieser Beziehung ist der *Ptolemäische Satz*: in einem Kreisviereck 1 2 3 4 ist  $\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{14} \cdot \overline{23} = \overline{13} \cdot \overline{24}$ . Er entsteht, wenn die vier Kreise Nullkreise, also Punkte des umhüllenden Kreises sind. Vgl. Aufg. 4 zu Nr. 99.

Reduziert sich dagegen von den vier Kreisen nur einer auf einen Punkt, so gilt die Beziehung für jeden Punkt des die drei gegebenen berührenden Kreises. Insbesondere sind  $\overline{14}, \overline{24}, \overline{34}$  Längen der vom Punkte  $x|y$  dieses Kreises an die Kreise  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$  gehenden Tangenten, also gleich  $\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}$ . Somit sind die Koordinaten eines Punktes des Berührungskreises von drei gegebenen durch die Beziehung verbunden<sup>38)</sup>

$$(48) \quad \overline{23} \sqrt{k_1} \pm \overline{31} \sqrt{k_2} \pm \overline{12} \sqrt{k_3} = 0.$$

Diese Gleichung ist, von Wurzelgrößen befreit (rational gemacht), vom vierten Grade, muß also nach ihrer Entstehung ein Kreispaar darstellen. Sind  $\overline{23}, \overline{31}, \overline{12}$  die Längen der äußeren gemeinsamen Tangenten, so stellt sie die beiden Kreise dar, die die gegebenen alle äußerlich oder alle innerlich berühren (vgl. Fig. 66, S. 249). Ist dagegen  $\overline{23}$  eine äußere und sind  $\overline{31}, \overline{12}$  innere Tangenten, so entsteht die Gleichung des Paares,

das den Kreis  $k_1 = 0$  auf der einen und die beiden anderen auf der entgegengesetzten Seite hat. Endlich erhalten wir die beiden übrigen Kreispaaire, wenn wir  $\overline{31}$  oder  $\overline{12}$  als äußere und je die anderen als innere Tangenten nehmen.

B. 1) Sind  $l, m, n$  die Quadrate  $\overline{23}^2, \overline{31}^2, \overline{12}^2$  der Längen der gemeinsamen Tangenten je zweier der drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$ , so stellt

$$\begin{vmatrix} 0 & n & m & k_1(x, y) \\ n & 0 & l & k_2(x, y) \\ m & l & 0 & k_3(x, y) \\ k_1(x, y) & k_2(x, y) & k_3(x, y) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eines der vorerwähnten Kreispaaire dar.<sup>89)</sup>

Folgt mit Hilfe von (12), S. 199. Die Berechnung der Determinante ergibt

$$l^2 k_1^2(x, y) + m^2 k_2^2(x, y) + n^2 k_3^2(x, y) - 2lmk_1(x, y)k_2(x, y) - 2mnk_2(x, y)k_3(x, y) - 2nlk_3(x, y)k_1(x, y) = 0.$$

2) Die Beziehung zwischen den Distanzen von vier Punkten einer Ebene.<sup>40)</sup>

Man setze den beiden Determinanten von Nr. 99, 4 eine aus einer Eins und Nullen bestehende Zeile vor und verfähre nach dem Gesetz der Multiplikation; das Produkt muß gleich Null sein, weil die multiplizierten Gruppen eine Zeile mehr als Spalten enthalten (S. 179). Man erhält  $0 =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 - 2x_1 - 2y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 - 2x_2 - 2y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 - 2x_3 - 2y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 - 2x_4 - 2y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ 1 & \overline{12}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ 1 & \overline{13}^2 & \overline{23}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ 1 & \overline{14}^2 & \overline{24}^2 & \overline{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung dieser Determinante gibt

$$\begin{aligned} 0 = & \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \{ \overline{12}^2 + \overline{34}^2 - \overline{13}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{24}^2 \} \\ & + \overline{13}^2 \cdot \overline{24}^2 \{ \overline{13}^2 + \overline{24}^2 - \overline{12}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{34}^2 \} \\ & + \overline{14}^2 \cdot \overline{23}^2 \{ \overline{14}^2 + \overline{23}^2 - \overline{12}^2 - \overline{13}^2 - \overline{24}^2 - \overline{34}^2 \} \\ & + \overline{23}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{42}^2 + \overline{14}^2 \cdot \overline{43}^2 \cdot \overline{31}^2 + \overline{12}^2 \cdot \overline{24}^2 \cdot \overline{41}^2 + \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2. \end{aligned}$$

Setzen wir für 23, 31, 12, bez.  $a_1, a_2, a_3$ , für 14, 24, 34 aber bez.  $\varrho + \varrho_1, \varrho + \varrho_2, \varrho + \varrho_3$ , so erhalten wir eine in  $\varrho$  quadratische Gleichung zur Bestimmung der Radien der Kreise, die sämtlich innen oder sämtlich außen drei Kreise berühren,

deren Radien  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  sind und deren Mittelpunkte ein Dreieck von den Seiten  $a_1, a_2, a_3$  bilden.

Soll der gesuchte Kreis die gegebenen drei Kreise unter Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  schneiden, so hat man für  $\overline{14^2}, \overline{24^2}, \overline{34^2}$  bez. einzusetzen  $\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1\varrho \cos \gamma_1, \varrho^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_2\varrho \cos \gamma_2, \varrho^2 + \varrho_3^2 - 2\varrho_3\varrho \cos \gamma_3$ .

3) Analoge Beziehung zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten von fünf Kreisen. Wir multiplizieren die Matrices

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 2r_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 2r_2 & 1 \\ \text{usw.} \end{array} \right| \quad \text{u.} \quad \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & r_1 & x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r_2 & x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \\ \text{usw.} \end{array} \right|$$

mit je fünf Spalten und sechs Zeilen und erhalten nach S. 179 eine Determinante vom Werte Null. Für  $\overline{12}$ , usw. als Länge der gemeinsamen Tangenten wird diese Determinante

$$\left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{12^2} & \overline{13^2} & \overline{14^2} & \overline{15^2} \\ 1 & \overline{12^2} & 0 & \overline{23^2} & \overline{24^2} & \overline{25^2} \\ 1 & \overline{13^2} & \overline{23^2} & 0 & \overline{34^2} & \overline{35^2} \\ 1 & \overline{14^2} & \overline{24^2} & \overline{34^2} & 0 & \overline{45^2} \\ 1 & \overline{15^2} & \overline{25^2} & \overline{35^2} & \overline{45^2} & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Wenn der Kreis 5 die übrigen berührt, so werden  $\overline{15}, \overline{25}, \overline{35}, \overline{45}$  gleich Null, und wir erhalten insbesondere die Beziehung zwischen den gemeinsamen Tangenten von vier Kreisen, die derselbe fünfte berührt, in der Form einer gleich Null gesetzten Determinante vierten Grades. Sie ist das Produkt der vier Ausdrücke

$$\overline{12} \cdot \overline{34} \pm \overline{23} \cdot \overline{14} \pm \overline{13} \cdot \overline{24},$$

die den vier Kombinationen der Vorzeichen entsprechen.

4) Die Multiplikation von zwei Determinanten mit den Zeilen  $0, x_i, y_i, 1, \frac{1}{2}(r_i^2 - x_i^2 - y_i^2)$  und  $0, x'_i, y'_i, 1, \frac{1}{2}(r_i'^2 - x_i'^2 - y_i'^2)$ , 1 für  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  gibt analog eine Beziehung zwischen den Kosinus der Winkel, unter denen fünf Kreise eines (ungestrichenen) Systems von den fünf Kreisen eines anderen (gestrichenen) Systems in derselben Ebene geschnitten werden.<sup>41)</sup> Auch hier sind  $x_i, y_i$  bez.  $x'_i, y'_i$  die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise.

5) Die Beziehung, die die Abstände zwischen vier Punkten 1, 2, 3, 4, einer Ebene verbindet, liefert eine *Beziehung zwischen den Winkeln, unter denen sich vier Kreise schneiden*. Denn für

zwei Kreise mit den Radien  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und den Mittelpunkten 1, 2 ist (mit (12) als dem Winkel ihres Schnittes)

$$\overline{12}^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(12).$$

Man erhält somit aus der Determinante von 2) die folgende

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varrho_2^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(21) & . & . \\ 1 & \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(12) & 0 & . & . \\ 1 & \varrho_1^2 + \varrho_3^2 - 2\varrho_1\varrho_3 \cos(13) & \varrho_3^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_2\varrho_3 \cos(23) & 0 & . \\ 1 & \varrho_1^2 + \varrho_4^2 - 2\varrho_1\varrho_4 \cos(14) & \varrho_2^2 + \varrho_4^2 - 2\varrho_2\varrho_4 \cos(24) & . & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Subtraktion der mit  $\varrho_1^2$ ,  $\varrho_2^2$ ,  $\varrho_3^2$ ,  $\varrho_4^2$  bez. multiplizierten Elemente der ersten Spalte und Zeile von den entsprechenden der folgenden Spalten und Zeilen ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 : \varrho_1 & 1 : \varrho_2 & 1 : \varrho_3 & 1 : \varrho_4 \\ 1 : \varrho_1 & 1 & \cos(21) & \cos(31) & \cos(41) \\ 1 : \varrho_2 & \cos(12) & 1 & \cos(32) & \cos(42) \\ 1 : \varrho_3 & \cos(13) & \cos(23) & 1 & \cos(43) \\ 1 : \varrho_4 & \cos(14) & \cos(24) & \cos(34) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier  $\cos(14) = \cos(24) = \cos(34) = \cos \gamma$ , so entsteht aus  $2\varrho_4 \cos \gamma = \lambda$  eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Parameters  $\lambda$ , der irgend einem Werte von  $\gamma$  entspricht. Es ist dies die schon in B. 2, S. 257 erwähnte Gleichung zweiten Grades in  $\lambda$ .

## Achtes Kapitel.

### Haupteigenschaften der Kurven zweiten Grades.

129. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Parallelkoordinaten  $x, y$

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

hat sechs Koeffizienten  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ , die im folgenden stets als *reell* vorausgesetzt werden sollen. Der durch (1) dargestellte Ort wird allgemein als *Kurve zweiten Grades* oder auch als *Kegelschnitt* bezeichnet. \*)

Die Natur dieser Kurven ist von den Wertverhältnissen der Koeffizienten abhängig, also von *fünf Konstanten*, denn offenbar haben nur die *Verhältnisse* der sechs Koeffizienten auf die Gestalt der Kurve Einfluß (Nr. 32 und 97). Wir können daher einem von Null verschiedenen Koeffizienten der Gleichung stets einen festen Wert beilegen, z. B. den Wert Eins, indem wir die Gleichung durch die ursprüngliche Wertziffer dividiert denken.

Somit sind im allgemeinen fünf Beziehungen zwischen den Koeffizienten hinreichend, eine Kurve zweiten Grades zu bestimmen. *Ein Kegelschnitt ist durch fünf seiner Punkte bestimmt.* Substituieren wir nämlich in die Gleichung (1) die

---

\*) Aus einem in Nr. 149 erklärten Grunde spricht man, statt den nach Nr. 27 zu erwartenden Ausdruck „Kurve zweiter Ordnung“ zu brauchen, meist vom *Grade* dieser Kurve. Wir werden später beweisen (Teil II), daß der durch eine Ebene in einem Kreiskegel gemachte Schnitt eine Kurve zweiten Grades ist, und umgekehrt, daß es keine Kurve zweiten Grades gibt, die nicht als ein solcher Kegelschnitt betrachtet werden kann. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Kurven zweiten Grades schon von den alten griechischen Geometern, besonders von *Apollonius* (etwa 250—200 v. Chr. Geb.), untersucht worden. Wir gedenken dieser Eigenschaften, weil wir es oft passend finden werden, die Bezeichnung „Kegelschnitt“ statt der längeren Benennung „Kurve zweiten Grades“ zu gebrauchen.



Koordinaten  $x_1|y_1$ , usw. jedes Punktes, durch den die Kurve gehen soll, so erhalten wir für fünf Punkte fünf Gleichungen zwischen den Koeffizienten, die homogen und linear in denselben sind und somit zur Bestimmung der fünf Quotienten  $a_{11}:a_{33}$ ,  $a_{12}:a_{33}$  usw. genügen.

Die einem Kegelschnitt vorgeschriebenen Bedingungen können auch in anders gearteten Beziehungen zwischen den Koeffizienten ihren Ausdruck finden. So haben wir in Nr. 62 gezeigt, daß die Gleichung zweiten Grades zwei Geraden darstellt, sobald die als Diskriminante bezeichnete Koeffizientenfunktion  $A$  verschwindet. Nach den Ergebnissen von Nr. 97 und 103 ist der Kreis ein Kegelschnitt, dessen Gleichungskoeffizienten zwei Bedingungen unterliegen.

Es ist eine Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels zu zeigen, was für Arten von Kurven zweiten Grades durch eine Gleichung von der Form (1) dargestellt werden können, und einige Eigenschaften zu entwickeln, die ihnen allen gemeinsam sind. Dazu liefern die beiden vorhergehenden Kapitel manche Beispiele, wenn auch in besonderer Form.

130. Eine Eigenschaft der Kurven zweiten Grades ist sofort ersichtlich: *sie werden im allgemeinen von jeder Geraden ihrer Ebene in zwei Punkten getroffen*. Dies folgt daraus, daß bei der allgemeinen Gleichung (1) Koordinatenanfang und Koordinatenachsen in bezug auf die Kurve keine ausgezeichnete Lage haben; aber jede Koordinatenachse, z. B. die  $x$ -Achse  $y = 0$ , trifft die Kurve (1) in zwei Punkten, denn durch die Substitution  $y = 0$  wird die Gleichung (1) in eine *quadratische* Gleichung für  $x$  übergeführt. Auch so läßt sich die vorhin ausgesprochene Eigenschaft beweisen: Jede beliebige Gerade der Ebene kann durch eine Koordinatentransformation zur einen Achse, z. B. zur  $X$ -Achse  $Y = 0$  eines neuen Koordinatensystems gemacht werden. Bei dieser Transformation ändert sich zwar die Gleichung (1), aber ihr *Grad* bleibt nach S. 55 unverändert.

Natürlich können die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve (1) reell oder imaginär sein oder sie können in einen einzigen Punkt zusammenfallen. In Nr. 132 wird näher hierauf eingegangen.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in *rechtwinkligen Koordinaten* liefert durch Transformation zu Polarkoordinaten (Nr. 22) die *Polargleichung eines Kegelschnittes*:

$$(2) \quad (a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) r^2 + 2(a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta) r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von  $\vartheta$  entsprechen als Vektoren die beiden Wurzeln dieser in  $r$  quadratischen Gleichung, d. h. jede durch den Nullpunkt gezogene Gerade hat zwei Schnittpunkte mit der Kurve.

Doch wird eine der Wurzeln unendlich groß, d. h. der Vektor schneidet die Kurve in einem unendlich fernen Punkt, wenn für gewisse Werte von  $\vartheta$  der Koeffizient von  $r^2$  verschwindet.\*) Die geforderte Bedingung wird aber im allgemeinen für *zwei* Werte von  $\vartheta$  erfüllt, nämlich für diejenigen, die die quadratische Gleichung liefert

$$(3) \quad a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \vartheta + a_{22} \operatorname{tg}^2 \vartheta = 0.$$

Demnach können durch den Nullpunkt zwei Geraden gezogen werden, die die Kurve (1) im Unendlichen schneiden. Ihre Gleichung wird, indem man  $y : x = \operatorname{tg} \vartheta$  einsetzt, erhalten als

$$(4) \quad a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = 0.$$

Dieses Geradenpaar kann (Nr. 57) aus reellen, vereinigten oder konjugiert imaginären Geraden bestehen.

Nun kann aber durch Paralleltransformation (S. 24) jeder reelle Punkt zum Nullpunkt der Koordinaten gemacht werden, wobei, wie man leicht einsieht, die Koeffizienten von  $x^2$ ,  $xy$  und  $y^2$  ungeändert bleiben. Daher gibt es durch jeden Punkt ein Geradenpaar, das die Kurve im Unendlichen schneidet, bestimmt durch die nämliche quadratische Gleichung (3) für  $\operatorname{tg} \vartheta$ .

Diese Betrachtung lehrt, daß es bei jedem Kegelschnitt *zwei Richtungen* gibt, in denen er von der unendlich fernen Geraden geschnitten wird. Diese beiden reellen, vereinigten oder imaginären Richtungen heißen *die Asymptotenrichtungen der Kurve*.

---

\*) Alsdann befindet sich der zweite Schnittpunkt des Vektors im allgemeinen in endlicher Entfernung  $r$ , gegeben durch

$$2(a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta) r + a_{33} = 0.$$

**131. Gattungen von Kegelschnitten.** Die wichtigste Frage hinsichtlich der Gestalt des reellen Zuges einer Kurve ist die, ob er in jeder Richtung begrenzt ist oder ob er sich in irgend einer Richtung ins Unendliche erstreckt, wie z. B. ein Geradenpaar. Wenn wir nach diesem Verhalten zum Unendlichfernen die Kurven zweiten Grades einteilen wollen, so gibt Nr. 130 das nötige Kennzeichen. Je nachdem die Wurzeln  $\operatorname{tg} \vartheta$  der Gleichung

$$(3) \quad a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \vartheta + a_{22} \operatorname{tg}^2 \vartheta = 0$$

imaginär, vereint oder gesondert reell sind, unterscheiden wir, ob die durch eine vorgelegte Gleichung dargestellte Kurve in jeder reellen Richtung begrenzt ist oder ob sie in ein oder zwei Richtungen unbegrenzt verläuft. Also hängt diese Klasseneinteilung von dem Vorzeichen der Diskriminante  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  der Gleichung (3) ab.

*Nach der Realität der Asymptotenrichtungen gibt es also drei Gattungen gestaltlich verschiedener Kurven zweiten Grades.*

Setzen wir erstens

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

negativ voraus, so kann kein reeller Wert von  $\vartheta$  gefunden, also keine reelle Gerade gezogen werden, die die Kurve im Unendlichen schneidet. *Eine Kurve dieser Gattung ist in jeder*

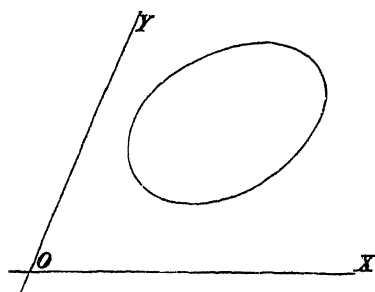


Fig. 70.

*Richtung begrenzt und heißt Ellipse.* Wir werden im IX. Kapitel zeigen, daß ihre Form die in Fig. 70 dargestellte ist. Die bekannteste besondere Ellipse ist der Kreis, der durch die beiden imaginären Kreispunkte geht (Nr. 103). Übrigens wird in Nr. 142 gezeigt werden, daß

im Falle  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  die Kurve (1) auch überhaupt imaginär sein kann.

Ist zweitens  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  positiv, so sind die Wurzeln der Gleichung (3) reell und verschieden, und es gibt zwei

reelle Punkte der Kurve mit unendlich großen Vektoren. Das reelle Geradenpaar  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$  bestimmt die Richtungen dieser Vektoren und ist zugleich selbst ein besonderes Beispiel der Gattung.

*Eine Kurve dieser Gattung hat zwei sich ins Unendliche erstreckende Äste und heißt Hyperbel.* Ihre in Figur 71 veranschaulichte Form wird im IX. Kapitel besprochen.

Wenn endlich drittens  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  ist, hat die Gleichung (3) nur eine doppelt zählende Wurzel. Es kann

also nur eine doppelt zu zählende Gerade durch den Nullpunkt gezogen werden, die die Kurve im Unendlichen trifft.

*Eine Kurve dieser Gattung wird von der unendlich fernen Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten, d. h.*

*berührt, und heißt Parabel* (Fig. 72). Ihre Gestalt unter-

suchen wir im XI. Kapitel. Die gefundene Bedingungsagt

auch, daß die Gleichung (1) eine Parabel darstellt, wenn

ihre ersten drei Glieder ein

vollständiges Quadrat bilden.

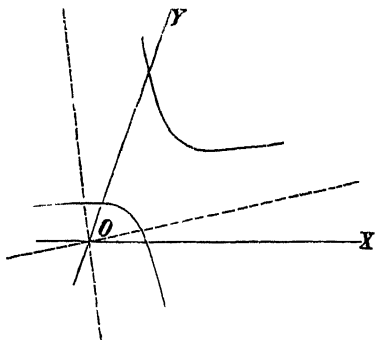


Fig. 71.

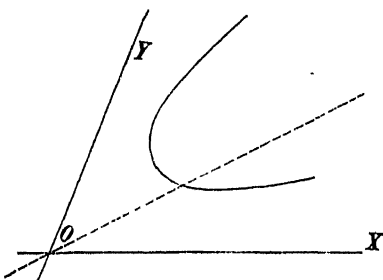


Fig. 72.

132. **Schnittpunkte mit einer Geraden.** Die Betrachtungen in Nr. 131 bilden nur eine vorläufige Orientierung über die durch die Gleichung (1) dargestellten Kurven zweiten Grades; wichtige *besondere* Fälle (Ausartungen) wurden dabei kaum berücksichtigt. Das Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist eine eingehende Behandlung der Gleichung (1), ihre Transformation auf gewisse möglichst einfache, durch die Gattung des Kegelschnitts bedingte Formen und in Verbindung hiermit die Ableitung von Kriterien, mit deren Hilfe leicht angegeben werden kann, was für eine Kegelschnittgattung

durch ein gegebenes Beispiel der Gleichung (1) dargestellt wird.

Ferner ist es zweckmäßig, die Gleichung (1) *in homogener Form* zu schreiben (vgl. S. 142), indem man in (1)  $x$  und  $y$  durch  $x:z$  bez.  $y:z$  ersetzt und alsdann die ganze Gleichung mit  $z^2$  multipliziert. So ergibt sich

$$(5) \quad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Hier deutet die Abkürzung  $f(x, y, z)$  an, daß die linke Seite der Gleichung des Kegelschnitts als Funktion von  $x, y, z$  betrachtet werden kann. Ferner sei daran erinnert, daß sich nach Nr. 75 und 76  $z = 0$  als Gleichung der unendlich fernen Geraden auffassen läßt; will man aus irgend einem Grunde eine der in den folgenden Nummern auftretenden Gleichungen in nicht homogener Form schreiben, so hat man nur  $z$  durch 1 zu ersetzen. Wir nennen  $x|y|z$  die homogenen Koordinaten eines Punktes.

Die erste Aufgabe, die nun gelöst werden soll, sei die Bestimmung der Schnittpunkte des Kegelschnitts (5) mit der Verbindungslinie  $g$  zweier Punkte  $P_1 (x_1|y_1|z_1)$  und  $P_2 (x_2|y_2|z_2)$ . Jedenfalls hat nach (63) in Nr. 14 ein auf  $g$  gelegener Punkt  $S$  nichthomogene Koordinaten von der Form

$$(6) \quad x = \frac{x_1 + \nu x_2}{1 + \nu}, \quad y = \frac{y_1 + \nu y_2}{1 + \nu},$$

wo  $\nu$  das Abstandsverhältnis  $P_1S:SP_2$  bedeutet. Diese Gleichungen lassen sich durch die Proportion

$$(7) \quad x:y:z = (x_1 + \nu x_2):(y_1 + \nu y_2):(1 + \nu)$$

ersetzen oder bei homogener Schreibweise durch

$$(8) \quad x:y:z = (x_1 + \nu x_2):(y_1 + \nu y_2):(z_1 + \nu z_2),$$

woraus nach Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\rho$  für die homogenen Koordinaten des Punktes  $S$  die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} x = \rho (x_1 + \nu x_2) \\ y = \rho (y_1 + \nu y_2) \\ z = \rho (z_1 + \nu z_2) \end{cases}$$

hervorgehen. Soll  $S$  ein Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit der

Kurve (5) sein, so müssen seine Koordinaten die Gleichung (5) erfüllen, man hat also nach Abscheidung des Faktors  $\varrho^2$ :

$$(10) \quad f(x_1 + vx_2, y_1 + vy_2, z_1 + vz_2) = a_{11}(x_1 + vx_2)^2 + 2a_{12}(x_1 + vx_2)(y_1 + vy_2) + \dots + a_{33}(z_1 + vz_2)^2 = 0.$$

Es soll nun die Verabredung getroffen werden, daß es gestattet sei,  $a_{ik}$  jederzeit durch  $a_{ki}$  zu ersetzen; man soll also z. B. nach Belieben  $a_{23}$  oder  $a_{32}$  schreiben dürfen. Ferner wollen wir die Abkürzungen anwenden:

$$(11) \quad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + \dots + a_{33}z_1^2, \\ f(x_2, y_2, z_2) \equiv a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + \dots + a_{33}z_2^2, \end{cases}$$

$$(11a) \quad \begin{cases} f'(x_1) = 2(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1), \\ f'(y_1) = 2(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1), \\ f'(z_1) = 2(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1). \end{cases}$$

Entsprechende Bedeutung\*) haben  $f'(x_2)$ ,  $f'(y_2)$ ,  $f'(z_2)$ . Wie man leicht einsieht, ist

$$(12) \quad f(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2}(x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1)).$$

Wird die linke Seite der Gleichung (10) nach Potenzen von  $v$  geordnet, so ergibt sich bei Anwendung der Abkürzungen (11) und (11a) die Gleichung

$$(13) \quad v^2 f(x_2, y_2, z_2) + v(x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)) + f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Hierbei kann der Faktor von  $v$  auch in der Form  $x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2)$  geschrieben werden; es läßt sich dies leicht mit Hilfe der Beziehungen  $a_{ik} = a_{ki}$  zeigen.

Man sieht: die Verabredung,  $a_{ik}$  ersetzen zu dürfen durch  $a_{ki}$ , ist getroffen worden, um den Formeln eine gewisse Symmetrie zu geben. So ist z. B. bei den Formeln (11a) der erste Index der in der ersten Klammer auftretenden Koeffizienten  $a_{ik}$  gleich 1, bei der zweiten Klammer ist er 2, bei der dritten 3. Die zweiten Indizes sind in jeder Klammer der Reihe nach 1, 2, 3.

Die Gleichung (13) ist in  $v$  vom zweiten Grade, es folgt daher:

\*) Ein mit den Elementen der Differentialrechnung vertrauter Leser bemerkt, daß die Ausdrücke (11a) partielle Ableitungen von  $f(x_1, y_1, z_1)$  darstellen.

Eine Kurve zweiten Grades wird von der Verbindungslinie zweier Punkte  $P_1, P_2$  in zwei Punkten  $P'$  und  $P''$  getroffen; diese sind reell oder imaginär, je nachdem

$$(14) \{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\}^2 - 4f(x_1, y_1, z_1)f(x_2, y_2, z_2) > 0 \text{ oder } < 0$$

ist. Sie fallen zusammen, wenn der Ausdruck (14) verschwindet; die Gerade  $P_1 P_2$  ist dann eine Tangente des Kegelschnitts.

133. Wir wollen nun annehmen, die beiden Wurzeln  $v'$  und  $v''$  der quadratischen Gleichung (13) und somit auch die Schnittpunkte  $P', P''$  der Geraden  $P_1 P_2$  mit der Kurve (5) seien voneinander verschieden. Alsdann ist nach S. 30

$$(15) \quad v' = P_1 P' : P' P_2, \quad v'' = P_1 P'' : P'' P_2,$$

und das Doppelverhältnis des Punktepaares  $P', P''$  zu dem Paare  $P_1, P_2$  wird

$$(16) \quad v' : v'' = \alpha \text{ oder } v'' : v' = 1 : \alpha.$$

Hieraus folgt

$$(17) \quad (\alpha + 1) : (\alpha - 1) = (v' + v'') : (v' - v'') \text{ und } \frac{(\alpha + 1)^2}{(\alpha - 1)^2} = \frac{(v' + v'')^2}{(v' - v'')^2} = \frac{(v' + v'')^2}{(v' + v'')^2 - 4v'v''}.$$

Nun sind  $v'$  und  $v''$  die Wurzeln der Gleichung (13), daher ist

$$v' + v'' = -\frac{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)}, \quad v' v'' = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)},$$

und bei Einführung dieser Ausdrücke in (17) ergibt sich

$$(18) \quad (\alpha + 1)^2 \{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\}^2 - 4f(x_1, y_1, z_1)f(x_2, y_2, z_2) \\ - (\alpha - 1)^2 \{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\}^2 = 0.$$

Ist  $\alpha$  eine Wurzel dieser quadratischen Gleichung für das Doppelverhältnis der Punktepaare  $P_1, P_2$  und  $P', P''$ , so ist die andere gleich  $1 : \alpha$ , denn die Gleichung (18) bleibt bei Vertauschung von  $\alpha$  mit  $1 : \alpha$  unverändert. Dies stimmt mit der Tatsache überein, daß die beiden Doppelverhältnisse  $\alpha$  und  $1 : \alpha$  in (16) gleichberechtigt sind.

Denkt man sich in Gleichung (18) der Größe  $\alpha$  einen beliebig, aber fest gewählten Zahlenwert erteilt und auch den Punkt  $P_1$  fest gegeben, während man  $P_2$  als veränderlich auffaßt, so kann (18) als eine Gleichung für die laufenden Koor-

dinaten von  $P_2$  aufgefaßt werden, die folgende geometrische Deutung gestattet:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt  $P_1$  irgend welche Strahlen und konstruiert man auf jedem derselben zu seinen beiden Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt (5) und zu  $P_1$  einen vierten Punkt  $P_2$  derart, daß diese beiden Punktepaare auf jedem Strahl dasselbe Doppelverhältnis  $\alpha$  bilden, so liegen alle diese vierten Punkte  $P_2$  auf dem Kegelschnitt (18).

134. **Pol und Polare.** Den unendlich vielen Werten, die man  $\alpha$  geben kann, entspricht ein ganzes System von Kegelschnitten.

Besonders wichtig ist hierbei der Fall des harmonischen Verhältnisses  $\alpha = -1$ . Hier geht (18) über in

$$(19) \quad \{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\}^2 = 0;$$

man hat also eine doppelt zu zählende Gerade, denn die von dem Exponenten 2 befreite Gleichung (19) ist in  $x_2, y_2, z_2$  vom ersten Grad. Man nennt diese Gerade die *Polare* des Punktes  $P_1$  in bezug auf den Kegelschnitt und  $P_1$  den zur Polare gehörigen *Pol*. So ergibt sich der Satz:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt  $P_1$  irgend welche Strahlen und konstruiert man auf jedem derselben zu seinen beiden Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt und zu  $P_1$  den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten harmonischen Punkte auf einer Geraden, der Polare des Punktes  $P_1$  mit bezug auf den Kegelschnitt (Fig. 73).

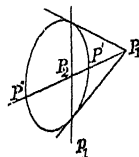


Fig. 73.

Die Tatsache, daß nun  $x_2, y_2, z_2$  laufende Koordinaten bedeuten sollen, kann man deutlicher zum Ausdruck bringen, indem man den Index 2 wegläßt. Die Polare des Punktes  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  hat alsdann die Gleichung

$$(20) \quad p_1 \quad (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1)x + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1)y + (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1)z = 0,$$

deren linke Seite zur Abkürzung mit  $p_1$  bezeichnet werden möge.

Bei nicht homogener Schreibweise ist

$$(20a) \quad p_1 \quad a_{11}x_1x + a_{12}(x_1y + y_1x) + a_{22}y_1y + a_{13}(x + x_1) + a_{23}(y + y_1) + a_{33} = 0.$$



Diese Gleichung geht aus der Kurvengleichung hervor, wenn man in dieser die Größen  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $2xy$ ,  $2x$ ,  $2y$  bez. durch  $x_1x$ ,  $y_1y$ ,  $x_1y + y_1x$ ,  $x + x_1$ ,  $y + y_1$  ersetzt.

Liegt insbesondere  $P_1$  auf dem Kegelschnitt, so ist  $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ , die früher mit  $g$  bezeichnete Gerade  $P_1P_2$  trifft die Kurve noch in einem Punkt, dessen Koordinaten durch (9) gegeben sind, wenn man daselbst

$$(21) \quad v = - \frac{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_1 f'(z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)}$$

setzt, wie aus (13) hervorgeht, denn die Gleichung (13) hat nun eine dem Punkt  $P_1$  entsprechende Wurzel  $v = 0$ , die andere Wurzel hat den in (21) angegebenen Wert. Der zu (21) gehörige Kurvenpunkt fällt in diesem letzten Falle mit  $P_1$  zusammen, wenn auch diese Wurzel  $v$  verschwindet, also  $x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = 0$  ist, die Gerade  $P_1P_2$  ist alsdann eine *Tangente* des Kegelschnitts, denn die früher mit  $P'$  und  $P''$  bezeichneten Schnittpunkte von  $P_1P_2$  mit dem Kegelschnitt sind nun zusammengedrückt in  $P_1$ . *Daher ist  $p_1 = 0$  die Gleichung der in dem Punkt  $P_1$  des Kegelschnitts (5) gezogenen Tangente. Zugleich folgt, daß die Polare eines auf dem Kegelschnitt gelegenen Punktes  $P_1$  mit der Tangente von  $P_1$  zusammenfällt.*

Man kann fragen, ob es auch noch in anderen Fällen als dem zuletzt betrachteten vorkommen kann, daß die Polare eines Punktes  $P_1$  durch diesen Punkt selbst geht. Offenbar müßte alsdann die Gleichung  $p_1 = 0$  durch die Koordinaten  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ,  $z = z_1$  erfüllt werden; trägt man diese aber in  $p_1 = 0$  ein, so geht  $p_1 = 0$  in  $f(x_1, y_1, z_1) = 0$  über, d. h. der Punkt  $P_1$  muß auf dem Kegelschnitt selbst liegen. So folgt: *Die Polare eines Punktes in bezug auf einen Kegelschnitt geht nur dann durch diesen Punkt, wenn derselbe auf der Kurve liegt; die Polare ist dann die Tangente der Kurve in diesem Punkt.*

B. 1) Zu zeigen, daß der Punkt 1 | 1 der Kurve

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0$$

eine Tangente hat mit der Gleichung  $9x - 5y - 4 = 0$ .

2)  $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$  hat in 2 | 1 die Tangente  $9x + 10y = 28$ .

3) Die Tangenten der Kurven  $xy = a^2$  und  $y^2 = 2px$  im Punkte  $x_1|y_1$  sind

$$x_1y + y_1x = 2a^2 \quad \text{und} \quad yy_1 = p(x + x_1).$$

135. Eine wichtige Eigenschaft der Polare eines dem Kegelschnitt nicht angehörigen Punktes  $P_1$  ist folgende: *Die Polare von  $P_1$  schneidet den Kegelschnitt in den Berührungspunkten der Tangenten, die man an ihn von  $P_1$  ziehen kann. Es gibt zwei solche Tangenten, denn die Polare trifft die Kurve in zwei Punkten.*

Zum Beweis dieses Satzes seien  $x'|y'|z'$  die Koordinaten des Berührungspunktes  $P'$  einer von  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  an die Kurve gelegten Tangente. Alsdann ist  $f(x', y', z') = 0$ , und weil  $P_1$  auf der Tangente von  $P'$  liegt, ist auch  $x_1 f'(x') + y_1 f'(y') + z_1 f'(z') = 0$ . Nun ist schon früher (S. 273) bemerkt worden, daß man in diesem Ausdruck die Größen  $x_1, y_1, z_1$  der Reihe nach mit  $x', y', z'$  vertauschen kann; daher ist auch  $x' f'(x_1) + y' f'(y_1) + z' f'(z_1) = 0$ . Die Koordinaten des Berührungspunktes  $P'$  genügen also den beiden Gleichungen  $f(x, y, z) = 0$  und  $x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) = 0$ , der Punkt  $P'$  ist somit einer der beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Polare von  $P_1$ ; von dem anderen Schnittpunkte  $P''$  gilt Entsprechendes wie von  $P'$ , es lassen sich daher von  $P_1$  zwei Tangenten an die Kurve ziehen.

Ist  $P_2$  ein Punkt der Polare von  $P_1$ , so ist nach S. 275  $x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = 0$ ; diese Gleichung bleibt aber ungeändert, wenn man die  $x_2, y_2, z_2$  und  $x_1, y_1, z_1$  der Reihe nach vertauscht. Daher folgt: *Ist  $P_2$  ein beliebiger Punkt der Polare von  $P_1$ , so ist  $P_1$  ein Punkt der Polare von  $P_2$ .* Diese Symmetrie lehrt, daß ein Pol und irgend ein Punkt seiner Polare ein zusammengehöriges Paar bilden. Zwei Punkte, deren Koordinaten jener symmetrischen Gleichung genügen, heißen daher *konjugierte* oder (mit Rücksicht auf die früher erwähnte harmonische Beziehung zwischen Pol und Polare) *harmonische Pole* des Kegelschnitts (vgl. Nr. 110).

Man kann somit auch sagen: *Die Polare irgend eines festen Punktes  $P_1$  ist der Ort der zu ihm konjugierten oder harmonischen Pole  $P_2$ .* Ferner folgert man die dual entsprechenden Sätze (Nr. 82): *Die Polare eines Punktes, der sich in*

einer Geraden bewegt, dreht sich um den Pol dieser Geraden\*), und: Der Pol einer Geraden, die sich um einen Punkt dreht, bewegt sich in der Polare dieses Punktes. Der erste dieser beiden Sätze ergibt sich direkt aus der Beziehung

$$x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) = 0.$$

Ferner gilt der Satz: Der Schnittpunkt von zwei Geraden ist der Pol der Geraden, die ihre Pole verbindet; und umgekehrt: Die Verbindungsgerade von zwei Punkten ist die Polare des Schnittpunktes der Polaren dieser Punkte. Denn wenn man in der Polare von  $P_1$  zwei beliebige Punkte wählt, so schneiden sich ihre Polaren in  $P_1$ .

Die Polare eines gegebenen Punktes  $P$  läßt sich leicht mit Hilfe des Lineals konstruieren, wenn der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt. Schneiden nämlich zwei aus  $P$  gezogene Geraden den Kegelschnitt je in den Punkten  $A, B$  bez.  $C, D$ , so liegt der Schnittpunkt  $Q$  von  $AD$  mit  $BC$  und ebenso

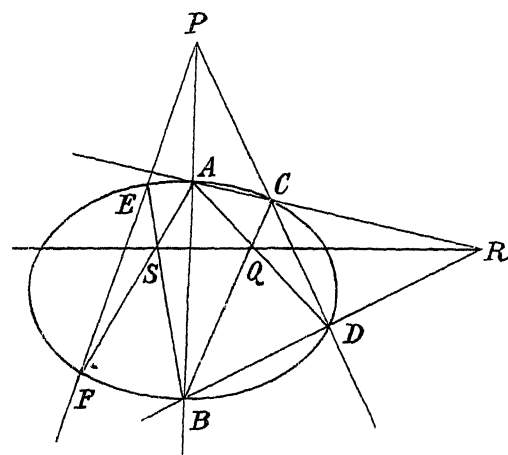


Fig. 74.

der Schnittpunkt  $R$  von  $AC$  mit  $BD$  auf der Polare von  $P$ , die also die Verbindungsline von  $Q$  mit  $R$  ist (Fig. 74). Dies folgt, wenn man  $ABCD$  als vollständiges Viereck mit den Diagonalepunkten  $P, Q, R$  auffaßt. Nach Nr. 66 sind nämlich alsdann in der Seite  $AB$  des Vierecks

der Diagonalepunkt  $P$  und der Schnittpunkt von  $AB$  mit der Verbindungsline  $QR$  der beiden anderen Diagonalepunkte harmonisch konjugiert in bezug auf das Punktepaar  $AB$ . Ebenso trifft  $QR$  die Seite  $CD$  in einem Punkt, der mit  $P$  ein zu  $C, D$  harmonisch

\*) Ein besonderer Fall dieses Satzes wird in Nr. 137 (S. 282) erwähnt.

konjugiertes Paar bildet. Mit Rücksicht darauf, daß  $R$  leicht außerhalb des Zeichenblattes fällt, legt man besser durch  $P$  noch eine dritte Gerade, die den Kegelschnitt in  $E$  und  $F$  trifft, und verbindet nun  $E, F$  kreuzweise mit  $A$  und  $B$  oder mit  $C$  und  $D$ . Der Schnittpunkt dieser sich kreuzenden Geraden (z. B.  $S$ ) ist wieder ein Punkt der Polare. Da die zu  $P$  gehörige Polare den Kegelschnitt in den Berührungspunkten der durch  $P$  gehenden beiden Tangenten der Kurve schneidet, ist mit der Konstruktion der Polare auch die Konstruktion dieser beiden Tangenten erledigt, vorausgesetzt, daß der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt.

Zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit einem Kegelschnitt harmonisch liegen, wurden (S. 277) als konjugierte oder harmonische Pole der Kurve bezeichnet. Offenbar gibt es auf einer beliebigen Geraden  $g$  unendlich viele solche Polepaare; sie bilden eine *Involution*, deren Doppelpunkte aus den Schnittpunkten der Geraden  $g$  und der Kurve bestehen (S. 36).

136. Polardreiecke. Das Ergebnis von Nr. 135 kann man auch so aussprechen: Befinden sich vier Punkte  $A, B, C, D$  auf einem Kegelschnitt, so liegen von den Schnittpunkten  $P, Q, R$  zweier Seitenpaare dieses Vierecks immer zwei auf der Polare des Schnittpunktes des dritten Paares, oder  $P, Q, R$  haben der Reihe nach die Polaren  $QR, RP, PQ$ . Man kann daher sagen: *In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck ist jeder der drei Diagonalepunkte der Pol der Verbindungslinie der beiden anderen.* Also sind je zwei Diagonalepunkte konjugierte Pole.

Die Diagonalepunkte eines eingeschriebenen Vierecks bilden ein Polardreieck in bezug auf den Kegelschnitt<sup>42</sup>), nämlich ein Dreieck, in dem jede Ecke die Gegenseite zur Polare hat. (Vgl. Nr. 113.) Die erste Ecke eines Polardreiecks kann man völlig willkürlich wählen, die zweite noch in der Polare der ersten beliebig, die dritte aber ist dann als der Schnittpunkt der Polaren von jenen bestimmt. Daß somit dreifach unendlich viele Polardreiecke möglich sind, bestätigt man analytisch dadurch, daß zwischen den sechs Koordinaten der drei Punkte-

paare  $x_1|y_1, x_2|y_2, x_2|y_2, x_3|y_3, x_3|y_3, x_1|y_1$  je die symmetrische Bedingungsgleichung bestehen muß.

Von jedem Polardreieck eines reellen Kegelschnittes befindet sich eine Ecke innerhalb, zwei Ecken sind außerhalb desselben. Nehmen wir nämlich den ersten Pol außerhalb an, so sind die beiden anderen harmonisch getrennt durch die notwendig reellen Schnittpunkte der Polare des ersten mit der Kurve, also liegt einer von ihnen im Inneren. Liegt aber schon der erste im Inneren, so liegen die beiden anderen im Äußeren, da die Polare von jenem die Kurve nicht reell trifft.

Nun entspricht aber das vollständige Vierseit (Nr. 67, 3) dem Viereck dualistisch (Nr. 82): jeder Winkel an einer Ecke (z. B.  $\angle BPD$ , Fig. 74) wird durch die Diagonale ( $PR$ ) und die Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt ( $Q$ ) der beiden anderen harmonisch geteilt. Besteht das Vierseit aus den Tangenten  $AB, CD, AC, BD$  eines Kegelschnittes, so liegt der harmonische Pol einer Diagonale  $PR$  einerseits auf  $PQ$ , andererseits auf  $RQ$ , ist also  $Q$ . In jedem umschriebenen (oder Tangenten-) Vierseit des Kegelschnittes ist jede Diagonale die Polare des Schnittpunktes der beiden anderen. In dem durch die Diagonalen gebildeten Dreieck hat also jede Seite die Gegenecke zum Pol. In diesem Sinne kann also auch jedes Polardreieck ein Polardreiseit genannt werden. Von einem

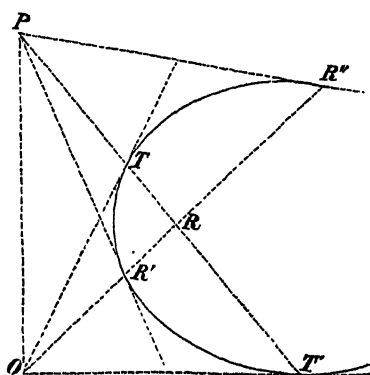


Fig. 75.

reellen Kegelschnitt werden stets zwei Seiten reell, die dritte imaginär geschnitten, und von der Gegenecke der letzten gehen imaginäre, von denen der ersten reelle Tangenten an ihn.

Somit ergibt sich, daß eine Gerade  $OR$  (Fig. 75) durch die beiden von  $O$  ausgehenden Tangenten  $OT, OT'$  des Kegelschnittes von der Geraden, die  $O$  mit dem Pole  $P$  von  $OR$  verbindet, harmonisch getrennt ist. Daher heißen zwei Geraden, die mit

den Tangenten aus ihrem Schnittpunkt eine harmonische Gruppe bilden, konjugierte oder (konjugiert-) harmonische Polaren. Es ist sehr zu beachten, daß alle Sätze der Polarentheorie des Kegelschnittes auch ihre dualistischen Umformungen zulassen. (Vgl. Nr. 149.)

137. Aus der Gestalt der Gleichung (20) der Polare des Punktes  $P_1$  folgt, daß ihre Linienkoordinaten  $u, v$  von der Form sind

$$(22) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1}, \\ v_1 = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1}. \end{cases}$$

Ähnlich wie früher bei den Punktkoordinaten  $x$  und  $y$  durch  $x:z$  und  $y:z$  ersetzt wurden, kann man auch hier  $u$  und  $v$  durch  $u:w$  und  $v:w$  ersetzen, damit gewisse Gleichungen zwischen  $u$  und  $v$  homogene Gleichungen zwischen  $u, v, w$  werden. Bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\sigma$  treten an Stelle der zwei Gleichungen (22) die drei folgenden:

$$(23) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1), \\ v_1 = \sigma(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1), \\ w_1 = \sigma(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß es zu jedem Punkte  $P_1$  im allgemeinen eine Polare gibt; nur der Fall führt zu einer Ausnahme, wo die Koordinaten  $x_1|y_1|z_1$  die drei Klammerausdrücke in (23) zum Verschwinden bringen. In diesem Fall muß nach Nr. 45 die aus den Koeffizienten  $a_{ik}$  gebildete Determinante

$$(24) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2,$$

die sogenannte Diskriminante der Gleichung  $f(x, y, z) = 0$ , verschwinden, der Kegelschnitt ist dann nach Nr. 62 ein Geradenpaar. Auch jetzt gehört im allgemeinen zu jedem Punkt der Ebene eine bestimmte Polare, und zwar geht diese durch den ausgezeichneten Punkt  $x_1, y_1, z_1$  hindurch, der mit  $S$  bezeichnet werden soll. Nennen wir im folgenden  $\xi|\eta|\xi$  seine Koordinaten, so erfüllen diese die drei Gleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \xi = 0, \\ a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \xi = 0, \\ a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \xi = 0, \end{cases}$$

seine Polare wird unbestimmt. Man wird also fragen, was für ein ausgezeichneter Punkt der Ebene dieser Punkt  $S$  ist. Daß er dem Geradenpaar angehört, ist klar, denn nach Multiplikation der drei Gleichungen (25) mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  und Addition derselben ergibt sich  $f(\xi, \eta, \xi) = 0$ . Er liegt also jedenfalls auf der einen Geraden des Paares. Verbindet man ferner  $S$  mit einem beliebigen Punkt  $P(x|y|z)$  der anderen Geraden des Paares, so hat ein Punkt dieser Verbindungslinie die homogenen Koordinaten  $x + \nu\xi|y + \nu\eta|z + \nu\xi$ , und  $f(x + \nu\xi, y + \nu\eta, z + \nu\xi)$  wird (vgl. S. 273):

$$\nu^2 f(\xi, \eta, \xi) + \nu(x f'(\xi) + y f'(\eta) + z f'(\xi)) + f(x, y, z).$$

Nun verschwindet jedes Glied dieses Ausdrucks, unabhängig von  $x$ , infolge der gemachten Voraussetzung über  $P$  und auf Grund der Gleichungen (25); die Gerade  $SP$  bildet daher einen Teil des Kegelschnitts, offenbar die zweite Gerade desselben, der ausgezeichnete Punkt  $S$  ist daher der Schnittpunkt des Geradenpaares, aus dem nunmehr der Kegelschnitt besteht. Wir haben somit das Ergebnis: *Jeder Punkt der Ebene hat mit bezug auf einen Kegelschnitt  $k$  eine ganz bestimmte Polare; nur wenn  $k$  aus einem Geradenpaar besteht, ist die Polare des Schnittpunktes  $S$  dieses Paares unbestimmt.* Die Polare irgend eines von  $S$  verschiedenen Punktes  $P_1$  ist in diesem letzten Falle die vierte harmonische Gerade zu der Verbindungslinie  $SP_1$  und dem gegebenen Geradenpaar. Der schon S. 277 f. bewiesene Satz, daß sich die Polare eines Punktes  $P_1$ , der eine Gerade  $g$  durchläuft, um den Pol dieser Geraden dreht, bedarf einer etwas anderen Fassung, wenn die Gerade  $g$  durch  $S$  geht; die den einzelnen Punkten  $P_1$  zugehörigen Polaren fallen alsdann mit der soeben erwähnten vierten harmonischen Geraden  $g'$  zusammen. Jeder Punkt von  $g$  (oder  $g'$ ) kann nun als Pol von  $g'$  (bez.  $g$ ) aufgefaßt werden.

Fragen wir nun umgekehrt, ob es auch zu jeder Geraden  $g$  mit der homogenen Gleichung  $u_1x + v_1y + w_1z = 0$ , die wir

als Polare auffassen, einen zugehörigen Pol  $P_1$  gibt. Damit dies der Fall sei, müssen sich die Gleichungen (23) nach  $x_1, y_1, z_1$  auflösen lassen. Man findet

$$(26) \quad \begin{cases} \sigma A x_1 = A_{11} u_1 + A_{21} v_1 + A_{31} w_1, \\ \sigma A y_1 = A_{12} u_1 + A_{22} v_1 + A_{32} w_1, \\ \sigma A z_1 = A_{13} u_1 + A_{23} v_1 + A_{33} w_1, \end{cases}$$

wo  $A_{ik}$  die Unterdeterminante von  $a_{ik}$  in  $A$  ist. Daher muß  $A \neq 0$  sein, die homogenen Koordinaten des zur Geraden  $g$  gehörigen Poles  $P_1$  sind dann den rechten Seiten der Gleichungen (26) proportional. *Besteht aber der Kegelschnitt aus einem Geradenpaar ( $A = 0$ ), so ist der zu einer vorgelegten Geraden  $g$  gehörige Pol unbestimmt. Geht  $g$  durch  $S$ , so kann jeder beliebige Punkt der zuvor erwähnten Geraden  $g'$  als zu  $g$  gehöriger Pol betrachtet werden.*

B. Für einen Kegelschnitt liegt der Pol der einen Koordinatenachse in der anderen, wenn  $a_{12}''_{33} = a_{13} a_{23}$  ist.

138. **Geradenpaar und Doppelgerade.** In Nr. 62 wurde gezeigt, daß die Kurve  $f(x, y, z) = 0$  ein Geradenpaar ist, wenn die Determinante  $A$  verschwindet, und in Nr. 137 sahen wir, daß die homogenen Koordinaten  $\xi | \eta | \zeta$  des Schnittpunktes  $S$  dieses Geradenpaares die Gleichungen (25) erfüllen. Je nachdem man bei diesen Gleichungen die erste, zweite oder dritte wegläßt und die zwei noch übrigen nach den Verhältnissen  $\xi : \zeta, \eta : \zeta$  auflöst, erhält man für die Koordinaten von  $S$ , falls nicht alle Unterdeterminanten  $A_{ik}$  verschwinden:

$$(27) \quad \begin{cases} \xi : \eta : \zeta = A_{11} : A_{12} : A_{13}, \\ \xi : \eta : \zeta = A_{21} : A_{22} : A_{23}, \\ \xi : \eta : \zeta = A_{31} : A_{32} : A_{33}, \end{cases}$$

oder auch

$$(27a) \quad \xi^2 : \xi \eta : \eta^2 : \xi \zeta : \eta \zeta : \zeta^2 = A_{11} : A_{12} : A_{22} : A_{13} : A_{23} : A_{33}.$$

Die Verschiedenheit der für einen und denselben Quotienten der  $\xi, \eta, \zeta$  erhaltenen Werte ist nur scheinbar, denn es ist z. B.  $A_{12} : A_{13} = A_{23} : A_{23}$  oder  $A_{12} A_{23} = A_{13} A_{22}$ , weil  $A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22}$  nach S. 81 im allgemeinen gleich  $A \cdot a_{13}$ , also jetzt gleich Null ist; entsprechendes gilt von den übrigen Quotienten.



Der Fall, wo das Geradenpaar ein *Parallelenpaar* ist, wird in Nr. 142 und 143 näher betrachtet werden.

Der Satz, daß im Falle  $A = 0$  der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, gestattet auch die Umkehrung: *Stellt  $f(x, y, z) = 0$  ein Geradenpaar dar, so ist die Determinante  $A$  gleich Null.*

Zum Beweis setzen wir  $f(x, y, z) \equiv (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)$ . Alsdann folgt  
 $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \alpha_1 \beta_1 x + \frac{1}{2}(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)y + \frac{1}{2}(\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)z$   
 oder

$2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) = \beta_1(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) + \alpha_1(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)$ ,  
 und analog findet man

$2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = \beta_2(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) + \alpha_2(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)$

$2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) = \beta_3(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) + \alpha_3(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)$ .

Für den Schnittpunkt  $\xi | \eta | \xi$  der beiden Geraden des Paares verschwinden die rechten Seiten der drei letzten Gleichungen, daher auch die linken, es gelten also wiederum die drei Gleichungen (25), die das Verschwinden von  $A$  zur Folge haben.

Bisher hatten wir angenommen, daß nicht sämtliche  $A_{ik}$  verschwinden. *Nun werde der Fall betrachtet, daß alle  $A_{ik} = 0$  sind.* Infolge der Beziehungen

$$(28) \quad A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = Aa_{11}, \quad A_{33}A_{11} - A_{31}^2 = Aa_{22}, \quad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = Aa_{33}$$

ist hierzu hinreichend, daß  $A = 0$  und  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$  sei. *Wir behaupten, daß nunmehr  $f(x, y, z)$  das Quadrat einer homogenen linearen Funktion von  $x, y, z$  sei, also  $f(x, y, z) = 0$  eine Doppelgerade darstelle.*

Zum Beweis dieser Tatsache bemerken wir zunächst, daß nunmehr die drei Größen  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  nicht gleichzeitig Null sein können, denn sonst würden mit Rücksicht auf

$$(29) \quad A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad A_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

auch  $a_{23}, a_{31}$  und  $a_{12}$  verschwinden müssen, die Funktion  $f(x, y, z)$  wäre dann überhaupt nicht mehr vorhanden. Es sei also z. B.  $a_{11} \neq 0$ ; alsdann kann man  $f(x, y, z)$  mit  $a_{11}$  multiplizieren und es ist

$$a_{11}f(x, y, z) \equiv a_{11}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2),$$

wofür nunmehr mit Rücksicht auf  $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ,  
 $A_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = 0$ ,  $A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0$  auch

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 = 0$$

gesetzt werden kann. Bei Multiplikation von  $f(x, y, z)$  mit  $a_{22}$  oder  $a_{33}$  hätte man  $(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 = 0$  bez.  
 $(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = 0$  erhalten. Die drei Gleichungen

$$30) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

stellen jetzt dieselbe Gerade dar, wie sich aus den sechs Beziehungen  $A_{ik} = 0$  leicht ergibt.

Auch die Umkehrung gilt: *Stellt  $f(x, y, z) = 0$  eine Doppelgerade dar, so sind sämtliche Unterdeterminanten  $A_{ik}$  gleich Null.* Aus  $f(x, y, z) \equiv (\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z)^2$  folgt nämlich sofort  $a_{ik} = \alpha_i\alpha_k$  und  $A_{ik} = 0$ .

Man bezeichnet die soeben behandelten Kurven zweiten Grades, nämlich das Geradenpaar und die Doppelgerade, als uneigentliche, ausgeartete oder zerfallende Kegelschnitte; für sie ist  $A = 0$ . In den folgenden Nummern sollen hauptsächlich die *eigentlichen Kegelschnitte* betrachtet werden, bei denen  $A \neq 0$  ist.

**139. Konjugierte Durchmesser. Mittelpunkt.** Die Polare eines Punktes  $P_1$  ist nach S. 275 der Ort für die vierten harmonischen Punkte, die man auf jedem durch  $P_1$  gehenden Strahl zu dem Paar seiner Schnittpunkte mit der Kurve zweiten Grades und zu  $P_1$  konstruieren kann. Rückt der Pol  $P_1$  ins Unendliche, so werden die durch ihn gelegten Strahlen einander parallel und die eben erwähnten vierten harmonischen Punkte sind (S. 33) die *Halbierungspunkte* der auf den einzelnen Strahlen durch den Kegelschnitt ausgeschnittenen *Sehnen*. Man nennt die Polare von  $P_1$  nunmehr den zu der Richtung, in der der unendlich ferne Punkt  $P_1$  gelegen ist, *konjugierten Durchmesser*. So folgt der Satz: *Zieht man durch einen Kegelschnitt beliebig viele parallele Sehnen, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer und derselben Geraden, dem zu der Richtung dieser Sehnen konjugierten Durchmesser.*

Die halben Sehnen werden oft als die dem Durchmesser zugehörigen *Ordinaten* bezeichnet.

Ändert man die Richtung dieses Sehnenystems, läßt man also  $P_1$  die unendlich ferne Gerade  $g_\infty$  durchlaufen, so drehen sich nach S. 277 f. die zu  $P_1$  gehörigen Polaren, also die einzelnen konjugierten Durchmesser, um einen festen Punkt, den Pol der unendlich fernen Geraden. Dieser wird als *Mittelpunkt* des Kegelschnitts bezeichnet, weil er jede durch ihn gelegte Sehne halbiert. Er liegt im allgemeinen im Endlichen; nur wenn die unendlich ferne Gerade  $g_\infty$  den Kegelschnitt berührt, dieser also nach S. 271 eine *Parabel* ist, liegt er im Unendlichen, weil er nun (nach S. 276) mit dem unendlich fernen Berührungspunkt zusammenfällt. Ein Kegelschnitt hat im allgemeinen nur *einen* Mittelpunkt; denn zu einer gegebenen Polare gibt es nach S. 283 im allgemeinen nur *einen* Pol. Besteht aber insbesondere die Kurve aus einem Geradenpaar, durch dessen Schnittpunkt  $S$  die unendlich ferne Gerade hindurchgeht, besteht die Kurve also aus einem Parallelenpaar, so kann nach S. 283 jeder Punkt der in der Mitte zwischen den beiden Parallelen verlaufenden Geraden als Pol von  $g_\infty$ , somit als Mittelpunkt aufgefaßt werden; hier gibt es eine *Mittelpunktsgerade*. Vgl. auch Nr. 140.

Die *Konstruktion des Mittelpunktes* eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts folgt aus dem Vorhergehenden sofort: Die Verbindungsline der Halbierungspunkte zweier parallelen Sehnen der Kurve ist ein Durchmesser derselben. Ihr Mittelpunkt ergibt sich alsdann als Halbierungspunkt der auf diesem Durchmesser gelegenen Sehne oder auch als Schnitt zweier Durchmesser.

Wir haben gesehen, daß einem System paralleler Sehnen ein konjugierter Durchmesser  $d_1$  zugehört; nun ist aber unter diesen Sehnen selbst ein Durchmesser  $d_2$  enthalten, der aus der durch den Mittelpunkt der Kurve gehenden Sehne besteht. Zwei in solcher Weise einander zugeordnete Geraden  $d_1$  und  $d_2$  bilden ein *Paar konjugierter Durchmesser* ( $MM'$  und  $NN'$  in Fig. 76). Jeder von beiden halbiert die zu dem anderen parallel gezogenen Sehnen. Die in den Endpunkten des einen

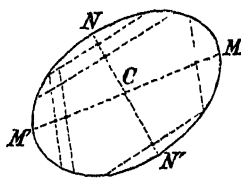


Fig. 76.

gezogenen Tangenten sind dem anderen parallel, denn sie müssen durch dessen Pol gehen, der aber im Unendlichen liegt.

Indem man den *Mittelpunkt*  $C$  eines Kegelschnitts als Pol der unendlich fernen Geraden auffaßt, gelangt man leicht zu den Koordinaten dieses Punktes. Sind  $x_0 | y_0$  seine nicht homogenen Koordinaten, so muß die zugehörige Polare

$$(31) \quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

die unendlich ferne Gerade darstellen, d. h. diese Gleichung (31) muß mit  $z = 0$  gleichbedeutend sein, oder die Koordinaten  $x_0, y_0$  des Mittelpunktes müssen die Gleichungen

$$(32) \quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

erfüllen, aus denen

$$(33) \quad x_0 = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{A_{32}}{A_{33}}$$

hervorgeht. Es sind nun bei der Lage des Mittelpunktes  $C$  drei verschiedene Fälle möglich, die sich am besten ergeben, wenn man die Gleichungen (32) als Gleichungen zweier Geraden in den laufenden Koordinaten  $x_0 | y_0$  auffaßt:

1. Die beiden Geraden schneiden sich im Endlichen; alsdann hat der Kegelschnitt einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt  $C$ ,  $A_{33}$  muß  $\neq 0$  sein.

2. Die beiden Geraden schneiden sich im Unendlichen; alsdann liegt  $C$  im Unendlichen,  $A_{33}$  muß gleich Null sein, aber *mindestens eine* der beiden Größen  $A_{31}, A_{32}$  muß von Null verschieden sein. Es wird später gezeigt werden, daß in diesem Fall die Kurve eine *Parabel* ist.

3. Die beiden Geraden fallen zusammen; alsdann kann jeder Punkt dieser einen Geraden als Mittelpunkt der Kurve angesehen werden, die nun nach S. 286 aus einem *Parallelenpaar* besteht. In diesem letzten Falle hat man die Proportion

$$(34) \quad a_{11}:a_{21} = a_{12}:a_{22} = a_{13}:a_{23} \quad \text{oder es ist} \quad A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0.$$

Die Gleichungen (28) zeigen übrigens, daß das Verschwinden von  $A_{31}$  und  $A_{32}$  schon eine Folge des Verschwindens von  $A$  und  $A_{33}$  ist.

B. 1)  $3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0$ , zum Mittelpunkt  $\frac{7}{2} | -4$  transformiert, ergibt  $12x^2 + 16xy + 4y^2 + 1 = 0$ .

2)  $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$ , zum Mittelpunkt  $-3 | -1$  transformiert, ergibt  $x^2 + 2xy - y^2 = 22$ .

140. **Kegelschnitte mit einem im Endlichen gelegenen Mittelpunkt.** Es soll nun zunächst der *erste* Fall näher betrachtet werden, wo die Kurve einen einzigen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt  $C$  hat. Hier liegt die Vermutung nahe, daß die Gleichung der Kurve  $f(x, y, z) = 0$  sich vereinfachen wird, wenn man  $C$  als Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems  $\xi, \eta$  wählt, dessen Achsen vorläufig zu den Achsen des Systems  $x, y$  parallel sein sollen. Man hat hier die Transformationsformeln

$$(35) \quad x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$$

anzuwenden, wobei nach (33)  $x_0 = A_{31} : A_{33}$ ,  $y_0 = A_{32} : A_{33}$  ist. Zur Einführung von  $\xi | \eta$  an Stelle von  $x | y$  schreibt man die nicht homogene Gleichung der Kurve zweiten Grades zunächst in der Form

$$(36) \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0.$$

Die beiden ersten Klammern dieser Gleichung verwandeln sich bei Anwendung der Transformation (35) und mit Rücksicht auf (32) in  $a_{11}\xi + a_{12}\eta$  bez.  $a_{21}\xi + a_{22}\eta$ ; man erhält daher

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta)(\xi + x_0) + (a_{21}\xi + a_{22}\eta)(\eta + y_0) + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

oder

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\xi + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\eta + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0.$$

Die Klammerfaktoren von  $\xi$  und  $\eta$  verschwinden nach (32), und bei Einführung von  $x_0 = A_{31} : A_{33}$ ,  $y_0 = A_{32} : A_{33}$  folgt

$$(37) \quad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} = 0$$

oder

$$(38) \quad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Durch diese „Transformation auf den Mittelpunkt“ haben sich also die Glieder, die in den Veränderlichen homogen vom

zweiten Grad waren, überhaupt nicht geändert, die in  $x$  und  $y$  linearen Glieder sind weggefallen, an Stelle des früheren absoluten Gliedes  $a_{33}$  ist  $A:A_{33}$  getreten.

Auch die Umkehrung gilt: *Fehlen in der Gleichung einer Kurve zweiten Grades die linearen Glieder, so liegt der Mittelpunkt der Kurve im Koordinatenanfang*, denn die Anwendung der Formeln (33) auf die Gleichung (38) würde nun  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  ergeben.

In dem *zweiten* der auf S. 287 erwähnten Fälle, die bei der Lage des Mittelpunktes eintreten können, ist die Transformation (35) natürlich nicht anwendbar, denn der Mittelpunkt liegt im Unendlichen, alle Durchmesser der Kurve sind einander parallel.

Eigenartig ist der *dritte* Fall, wo die Kurve aus einem *Parallelenpaar* besteht. Dem Umstand entsprechend, daß es hier unendlich viele Mittelpunkte gibt, die eine Gerade erfüllen, sind die Koordinaten  $x_0$ ,  $y_0$  unbestimmt; dies folgt auch aus den Gleichungen (33) und (34). Dennoch ist die Transformation auf den Mittelpunkt durchführbar, denn das in (37) auftretende Glied  $(a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}):A_{33}$  hat, obwohl nun  $A_{31}$ ,  $A_{32}$  und  $A_{33}$  einzeln gleich Null sind, doch einen bestimmten Wert, wie sofort gezeigt werden soll; wir wollen diesen Wert einstweilen mit  $k$  bezeichnen<sup>13)</sup>. Offenbar ist

$$(39) \quad k = \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33},$$

wo  $x_0$ ,  $y_0$  die Koordinaten irgend eines Punktes der Mittelpunktsgerade bezeichnen. Wenn nun auch  $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  verschwindet, soll doch vorausgesetzt werden, daß die drei Größen  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$  nicht gleichzeitig verschwinden, denn wenn dies der Fall wäre, so würde die nicht homogene Gleichung (1) nur eine Gerade, die homogene Gleichung (5) ein aus dieser Geraden und aus  $g_\infty$  bestehendes Paar darstellen; dies soll aber ausgeschlossen sein\*). Es sei also z. B.  $a_{11} \neq 0$ . Alsdann kann  $k = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}$  mit  $a_{11}$  multi-

\*) Übrigens muß wegen  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  mit  $a_{11}$  oder  $a_{22}$  immer auch  $a_{12}$  verschwinden, und  $a_{12} = 0$  zieht umgekehrt das Verschwinden von  $a_{11}$  oder  $a_{22}$  nach sich.

pliziert werden, wodurch sich mit Hilfe einer Determinante ergibt:

$$ka_{11} = \begin{vmatrix} a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} & a_{31} \\ 0 & a_{11} \end{vmatrix},$$

oder im Hinblick auf die erste Gleichung (32):

$$ka_{11} = \begin{vmatrix} a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} & a_{31} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{32}y_0 + a_{33} & a_{31} \\ a_{12}y_0 + a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \\ = A_{22} - y_0 A_{23} = A_{22}, \text{ denn } A_{23} \text{ ist } = 0.$$

In den Fällen  $a_{22} \neq 0$  oder  $a_{12} \neq 0$  hätte sich bei entsprechendem Verfahren

$$ka_{22} = A_{11} \text{ bez. } ka_{12} = -A_{12}$$

ergeben. Daß wirklich die drei Werte

$$(40) \quad k = \frac{A_{22}}{a_{11}} = \frac{A_{11}}{a_{22}} = -\frac{A_{12}}{a_{12}}$$

einander gleich sind, folgt leicht aus den nun wegen  $A_{13} = A_{23} = 0$  bestehenden Gleichungen  $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0$ ,  $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = 0$ .

Da die Beziehung  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  zur Folge hat, daß  $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$  ein vollständiges Quadrat wird, nimmt nach (37) die auf einen Mittelpunkt transformierte Gleichung eines Parallelenpaares die Gestalt an

$$(41) \quad (\gamma_1\xi + \gamma_2\eta)^2 + k = 0.$$

**141. Gleichung eines konjugierten Durchmessers. Transformation auf die Achsen.** Im Folgenden möge wieder von einem Kegelschnitt ausgegangen werden, der nur einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt hat. Während ferner die Untersuchungen von Nr. 132 bis Nr. 140 sowohl bei rechtwinkligen als bei schiefwinkligen Koordinaten gültig sind, sollen von nun an *rechtwinklige Koordinaten* zu Grund gelegt werden.

Ein Punkt  $P_1$  der Ebene, dessen Radiusvektor  $OP_1 = \rho$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  bildet, hat die rechtwinkligen Koordinaten  $x_1 = \rho \cos \alpha$ ,  $y_1 = \rho \sin \alpha$ , also nach Nr. 134 eine Polare mit der Gleichung

$$(42) \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\rho \cos \alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\rho \sin \alpha \\ + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Nun möge der Punkt  $P_1$  in der Richtung  $OP_1$  seines Radiusvektors ins Unendliche rücken; die Polare geht dann nach

S. 285 in den zu der Richtung  $\alpha$  konjugierten Durchmesser über. Um seine Gleichung zu erhalten, dividiere man (42) durch  $\varrho$  und setze alsdann  $\varrho = \infty$ . Hierdurch fallen die drei letzten Glieder in (42) weg, und man erhält als *Gleichung des zu der Richtung  $\alpha$  konjugierten Durchmessers*:

$$(43) \quad (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha)x + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha)y \\ + (a_{31} \cos \alpha + a_{32} \sin \alpha) = 0.$$

Es liegt nun die Frage nahe, ob es vorkommen kann, daß dieser Durchmesser mit der Richtung  $\alpha$ , zu der er konjugiert ist, einen rechten Winkel bildet. Da bei der Gleichung einer Geraden in rechtwinkligen Koordinaten die Koeffizienten von  $x$  und  $y$  proportional sind dem Cosinus bez. Sinus des Winkels, den das Lot der Geraden mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet, müßten im Falle der Bejahung der soeben gestellten Frage diese Koeffizienten proportional zu  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  sein. Daher müßten unter Benutzung eines Proportionalitätsfaktors  $\lambda$  zwei Gleichungen bestehen von der Form:

$$(44) \quad a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \lambda \cos \alpha, \quad a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha$$

oder

$$(45) \quad (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0, \quad a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0.$$

Durch Elimination von  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  aus (45) ergibt sich die quadratische Gleichung

$$(46) \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Ihre Diskriminante

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

ist im allgemeinen positiv; nur im Falle  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$  ist sie gleich Null, die Kurve zweiten Grades ist alsdann (nach S. 194) ein *Kreis*. Schließt man diesen Fall aus, so hat die quadratische Gleichung (46) stets zwei voneinander verschiedene reelle Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , denen auf Grund der Formeln (44) oder (45) zwei verschiedene Richtungen  $\alpha_1$  bez.  $\alpha_2$  entsprechen. Die ihnen zugehörigen konjugierten Durchmesser bilden mit diesen Richtungen rechte Winkel. Aber man kann leicht zeigen, daß die Richtungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  selbst zueinander rechtwinklig sind; *daher gibt es in Wahrheit nur ein Paar*



*rechtwinkliger konjugierter Durchmesser.* Zum Nachweis dieser Tatsache geht man von den Gleichungen aus:

$$(a_{11} - \lambda_1) \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1 = 0 \quad (a_{11} - \lambda_2) \cos \alpha_2 + a_{12} \sin \alpha_2 = 0 \\ a_{21} \cos \alpha_1 + (a_{22} - \lambda_1) \sin \alpha_1 = 0 \quad a_{21} \cos \alpha_2 + (a_{22} - \lambda_2) \sin \alpha_2 = 0.$$

Die beiden links stehenden Gleichungen multipliziert man nun mit  $\cos \alpha_2$  bez.  $\sin \alpha_2$ , die rechts stehenden mit  $\cos \alpha_1$  bez.  $\sin \alpha_1$  und zieht alsdann die Summe der beiden letzten Gleichungen von der Summe der beiden ersten ab. Hierdurch ergibt sich

$$(47) \quad (\lambda_1 - \lambda_2) (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) = 0.$$

So lange  $\lambda_1$  von  $\lambda_2$  verschieden ist, und diese Annahme wurde ja gemacht, muß also  $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \cos (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$  sein, es ist daher

$$(48) \quad \alpha_1 = \alpha_2 \pm \frac{1}{2}\pi,$$

w. z. b. w.

Im Falle  $\lambda_1 = \lambda_2$ , der zu dem Kreis führte, gibt es natürlich unendlich viele Paare zueinander rechtwinkliger konjugierter Durchmesser, in den übrigen Fällen nur *ein* solches Paar, man nennt seine beiden Durchmesser die *Achsen* der Kurve. Es liegt nun der Gedanke nahe, den Kegelschnitt auf diese Achsen als Koordinatenachsen zu beziehen. Zur Ausführung dieses Gedankens wird man zuerst die Transformation auf den Mittelpunkt vornehmen, die, wie S. 288 gezeigt wurde, zu der Gleichung

$$(49) \quad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + \frac{A}{A_{22}} = 0$$

führt; alsdann wird man zu dem neuen Koordinatensystem  $X, Y$  übergehen, das aus dem System  $\xi, \eta$  durch Drehung um den Winkel  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$  hervorgeht. Diese Drehung möge in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne erfolgen;  $\alpha_1$  und  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$  (vgl. [48]) seien die Winkel, die die positiven Richtungen der neuen Achsen  $X$  bez.  $Y$  mit der positiven Richtung der Achse  $\xi$  bilden. Man hat daher nach S. 26 die folgenden Transformationsformeln anzuwenden:

$$(50) \quad \xi = X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2, \quad \eta = X \sin \alpha_1 + Y \sin \alpha_2;$$

umgekehrt ist

$$(51) \quad X = \xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1, \quad Y = \xi \cos \alpha_2 + \eta \sin \alpha_2.$$

Zur möglichst raschen Durchführung der Transformation schreiben wir die Gleichung (49) des Kegelschnitts in der Form

$$(52) \quad (a_{11}\xi + a_{12}\eta)\xi + (a_{21}\xi + a_{22}\eta)\eta + \frac{A}{A_{33}} = 0;$$

alsdann ist

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta = (a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1)X + (a_{11}\cos\alpha_2 + a_{12}\sin\alpha_2)Y, \\ \text{wofür nach (44) auch } \lambda_1\cos\alpha_1 \cdot X + \lambda_2\cos\alpha_2 \cdot Y \text{ gesetzt werden kann. Analog ergibt sich}$$

$$a_{21}\xi + a_{22}\eta = (a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1)X + (a_{21}\cos\alpha_2 + a_{22}\sin\alpha_2)Y \\ = \lambda_1\sin\alpha_1 \cdot X + \lambda_2\sin\alpha_2 \cdot Y.$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in (52) und nach Umstellung der Glieder der so erhaltenen Gleichung folgt

$$\lambda_1(\xi\cos\alpha_1 + \eta\sin\alpha_1)X + \lambda_2(\xi\cos\alpha_2 + \eta\sin\alpha_2)Y + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

und hieraus geht mit Rücksicht auf (51) die transformierte Gleichung

$$(53) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

hervor, die bei Benutzung der Abkürzungen

$$(54) \quad m = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \quad n = -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}}$$

in der Form

$$(55) \quad \frac{X^2}{m} + \frac{Y^2}{n} - 1 = 0$$

geschrieben werden kann.

Wie auf S. 290 bemerkt wurde, haben wir bei dieser Transformation auf die Achsen angenommen, daß die ursprüngliche Gleichung des Kegelschnitts auf rechtwinklige Koordinaten bezogen war. Dem Leser sei empfohlen, diese Transformation sowie die in Nr. 143 auch bei *schiefwinkligen Koordinaten* durchzuführen. Vgl. übrigens Nr. 153.

**142. Ellipse, Hyperbel, Geradenpaar.** Natürlich setzen diese Umformungen voraus, daß die Kurve einen im Endlichen liegenden Mittelpunkt oder eine Mittelpunktsgerade hat (vgl. S. 288f.). Je nachdem im Falle  $A \neq 0$  die Größen  $m$  und  $n$  beide positiv oder beide negativ sind oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wird man also (vgl. Nr. 131) auf eine *Ellipse*

oder auf eine *imaginäre Kurve* (*imaginäre Ellipse*) oder auf eine *Hyperbel* geführt. In den beiden ersten Fällen müssen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gleiche Vorzeichen haben, das Produkt  $\lambda_1 \lambda_2$  muß positiv sein. Nun ist aber nach Gleichung (46) und nach den Elementen der Theorie der quadratischen Gleichungen:

$$(56) \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Ellipse und imaginäre Kurve haben daher das gemeinsame Merkmal  $A_{33} > 0$ , in diesen beiden Fällen müssen also auch die Größen  $a_{11}$  und  $a_{22}$  gleiches Vorzeichen haben und zwar, wie die Gleichung  $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$  zeigt, dasselbe Vorzeichen wie  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Aus (55) und (54) folgt, daß eine Ellipse vorliegt, wenn  $-A : \lambda_1$  oder  $-A : \lambda_2$  positiv ist, und hierfür kann, da es jetzt nur auf das Vorzeichen ankommt,  $-A : a_{11} > 0$  oder auch  $-A a_{11}$  oder  $-A a_{22} > 0$  geschrieben werden; noch besser wird man sagen: das charakteristische Merkmal für eine *Ellipse* ist  $A \neq 0$ ,  $A_{33} > 0$ ,  $A a_{11}$  oder  $A a_{22} < 0$ . Bei der *imaginären Kurve* sind die beiden letzten Ungleichungen zu ersetzen durch  $A a_{11}$  oder  $A a_{22} > 0$ .

Im Fall einer *Hyperbel* müssen  $m$  und  $n$  entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h.  $\lambda_1 \lambda_2 = A_{33}$  muß  $< 0$  sein und selbstverständlich  $A \neq 0$ .

Ist  $A = 0$  und  $A_{33} \neq 0$ , so tritt an Stelle von (53) die Gleichung

$$(57) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0,$$

die ein *reelles oder imaginäres Geradenpaar* darstellt, je nachdem  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben, d. h. je nachdem  $\lambda_1 \lambda_2 = A_{33} < 0$  oder  $> 0$  ist.

Im Falle  $A = 0$ ,  $A_{33} = 0$  verschwinden auch  $A_{13}$  und  $A_{23}$ , wie schon S. 287 bemerkt wurde; die Kurve ist ein *Parallelenpaar*. Die quadratische Gleichung (46) hat nunmehr eine Wurzel  $\lambda = 0$ , die andere  $\lambda = a_{11} + a_{22}$  sei  $\neq 0$ , wobei  $a_{11}$  und  $a_{22}$  wegen  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$  entweder gleiche Vorzeichen haben müssen, oder es muß mit  $a_{11}$  oder  $a_{22}$  auch  $a_{12}$  verschwinden. Von dem Fall  $a_{11} + a_{22} = 0$  ist abzusehen, denn er würde wegen  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$  zu  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$  führen, und dies sollte (vgl. S. 289) ausgeschlossen werden.

Ähnlich wie die Transformation (50) die Gleichung (49) in (53) überführte, gelangt man nun zu

$$(58) \quad \lambda_1 X^2 + k = 0 \quad \text{oder zu} \quad \lambda_2 Y^2 + k = 0,$$

je nachdem man die nicht verschwindende Wurzel mit  $\lambda_1$  oder mit  $\lambda_2$  bezeichnet; hierbei ist nach (40):

$$(59) \quad k = \frac{A_{22}}{a_{11}} = \frac{A_{11}}{a_{22}} = -\frac{A_{12}}{a_{12}}.$$

Sind die beiden Unterdeterminanten  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  von Null verschieden, so müssen sie wegen  $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = Aa_{33} = 0$  gleiches Vorzeichen haben. Geht man von der zweiten Gleichung (58) aus, so ergibt die Einführung von  $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$  und von  $k = A_{22} \cdot a_{11}$  oder  $A_{11} : a_{22}$  die Gleichung

$$(60) \quad a_{11}(a_{11} + a_{22})Y^2 + A_{22} = 0 \quad \text{oder auch} \quad a_{22}(a_{11} + a_{22})Y^2 + A_{11} = 0.$$

Sind  $a_{11}$  und  $a_{22}$  von Null verschieden, so ist der Faktor von  $Y^2$  jedesmal positiv, die Kurve also ein *reelles Parallelenpaar*, wenn  $A_{11}$  oder  $A_{22}$  negativ ist; man hat ein *imaginäres Parallelenpaar*, wenn  $A_{11}$  oder  $A_{22}$  positiv ist. Wäre aber z. B.  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ , so hätte  $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = 0$  und  $a_{21} = 0$  das Verschwinden von  $A_{22}$  zur Folge; man würde die zweite Gleichung (60) benutzen, die nun in  $a_{22}^2 Y^2 + A_{11} = 0$  übergeht. Hieraus und aus der entsprechenden Überlegung im Falle  $a_{22} = 0$ ,  $a_{11} \neq 0$  erhält man wieder das soeben ausgesprochene Kriterium für das reelle und das imaginäre Parallelenpaar. Das Verschwinden von  $A_{11}$  und  $A_{22}$  hätte  $A_{12} = 0$  zur Folge, das Parallelenpaar wäre dann nach S. 284 eine *Doppelgerade*.

**143. Parabel und Parallelenpaar.** Es soll nun noch der *zweite* von jenen drei Fällen, die bei der Lage des Mittelpunkts der Kurve unterschieden wurden (S. 287), näher betrachtet werden. Bei ihm ist ein einziger, im Unendlichen liegender Mittelpunkt vorhanden; man hat  $A \neq 0$ ,  $A_{33} = 0$ , während mindestens eine der beiden Größen  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  von Null verschieden sein muß. Selbstverständlich kann hier eine Transformation der Gleichung

$$(61) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

auf den Mittelpunkt nicht vorgenommen werden; wohl aber

läßt sich die Transformation von der Form (50) anwenden; man setze also

$$x = X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2, \quad y = X \sin \alpha_1 + Y \sin \alpha_2,$$

wo bei der Berechnung von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mit Hilfe von (44) zu beachten ist, daß nun eine der beiden Wurzeln von (46), etwa  $\lambda_1$ , verschwindet, während die andere  $\lambda_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} \neq 0$  wird (vgl. S. 294). Man erhält ähnlich wie auf S. 293:

$$(62) \lambda_2 Y^2 + 2(a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1)X + 2(a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2)Y + a_{33} = 0,$$

wobei

$$(63) a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1 = 0, \quad a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1 = 0,$$

$$(64) a_{11} \cos \alpha_2 + a_{12} \sin \alpha_2 = \lambda_2 \cos \alpha_2, \quad a_{21} \cos \alpha_2 + a_{22} \sin \alpha_2 = \lambda_2 \sin \alpha_2$$

und  $\alpha_1 = \alpha_2 \pm \frac{1}{2}\pi$  ist.

Bei Ausschließung des Falles  $a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1 = 0$ , der wegen (63) auf  $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$  und  $A = 0$ , also auf das schon vorhin erledigte Parallelenpaar führen würde, läßt sich die Gleichung (62) mit Hilfe eines zu dem System  $X, Y$  parallelen Koordinatensystems wesentlich vereinfachen. Wir benutzen die Abkürzungen

$$(65) g \equiv a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1, \quad h \equiv a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2$$

und beziehen vermöge  $Y = \mathfrak{Y} + c$ , wo  $c$  noch näher bestimmt werden wird, die Gleichung  $\lambda_2 Y^2 + 2gX + 2hY + a_{33} = 0$  auf eine neue  $X$ -Achse. Man erhält

$$(66) \lambda_2 \mathfrak{Y}^2 + 2gX + 2(\lambda_2 c + h)\mathfrak{Y} + c^2 \lambda_2 + 2hc + a_{33} = 0,$$

und wenn  $c = -h : \lambda_2$  gesetzt wird, folgt

$$(67) \lambda_2 \mathfrak{Y}^2 + 2gX + \frac{a_{33} \lambda_2 - h^2}{\lambda_2} = 0.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieser Gleichung beziehen wir (67) vermöge  $X = \mathfrak{X} + d$  auf eine neue  $Y$ -Achse. Man erhält

$$(68) \lambda_2 \mathfrak{Y}^2 + 2g\mathfrak{X} + 2gd + \frac{a_{33} \lambda_2 - h^2}{\lambda_2} = 0,$$

und wenn man

$$(69) d = \frac{h^2 - a_{33} \lambda_2}{2g \lambda_2}$$

setzt, was geschehen kann, da die Fälle  $g = 0$  und  $\lambda_2 = 0$

ausgeschlossen wurden, ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$(70) \quad y^2 - 2px = 0,$$

wobei

$$(71) \quad 2p = -2g : \lambda_3 = - \frac{2(a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1)}{a_{11} + a_{22}}$$

ist. Die vorstehenden Entwicklungen zeigen, daß sich die Gleichung (61) immer in (70) überführen läßt, wenn  $A \neq 0$ ,  $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  und mindestens eine der Größen  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  von Null verschieden ist. Hierbei hat  $A_{33} = 0$  zur Folge, daß in (61) die Gliedergruppe  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  das Quadrat eines in  $x$  und  $y$  linearen, homogenen Ausdrucks wird. Im vorliegenden Falle stellt daher (vgl. S. 271) die Gleichung (61) eine *Parabel* dar.

Da  $a_{11}:a_{12} = a_{21}:a_{22}$  ist, sind die Durchmesser dieser Kurve, wie auch schon S. 289 erkannt wurde, einander parallel; ihre Richtung ist durch  $\tan \alpha_1 = -a_{11}:a_{12} = -a_{21}:a_{22}$  gegeben.\*)

Ist  $a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1 = 0$ , so liegt nunmehr, wie schon S. 296 erwähnt wurde, ein *Parallelenpaar* vor, und die Gleichung (62) vereinfacht sich in

$$(72) \quad \lambda_3 Y^2 + 2(a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2)Y + a_{33} = 0,$$

wobei  $\lambda_3 = a_{11} + a_{22}$  ist. Die Diskriminante dieses Ausdrucks zweiten Grades in  $Y$  wird

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2)^2 - (a_{11} + a_{22}) a_{33} \text{ oder} \\ &= -A_{22} - A_{11} - a_{13}^2 \sin^2 \alpha_2 - a_{23}^2 \cos^2 \alpha_2 + 2a_{13}a_{23} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ &= -(A_{11} + A_{22}) - (a_{13} \sin \alpha_2 - a_{23} \cos \alpha_2)^2. \end{aligned}$$

Bei Einführung von  $\alpha_1$  an Stelle von  $\alpha_2$  durch  $\alpha_2 = \alpha_1 \mp \frac{1}{2}\pi$

\*) Wenn ein Teil des Kegelschnittes genau verzeichnet ist, so kann man seinen Mittelpunkt und seine Gattung bestimmen. Denn je zwei parallele Sehnen bestimmen durch ihre Halbierungspunkte einen Durchmesser; in derselben Art erhält man durch zwei andere parallele Sehnen einen zweiten Durchmesser. Sind beide Durchmesser parallel, so ist der Kegelschnitt eine Parabel; schneiden sie sich auf der konkaven Seite des Kurvenbogens, so ist er eine Ellipse und im entgegengesetzten Fall eine Hyperbel.

(vgl. Gl. (48), S. 292) wird  $a_{13} \sin \alpha_2 - a_{23} \cos \alpha_2 = \mp (a_{13} \cos \alpha_1 + a_{23} \sin \alpha_1)$ , und dieser Ausdruck ist nach Voraussetzung Null; man hat daher  $\Delta = -(A_{11} + A_{22})$ . Sind beide Unterdeterminanten von Null verschieden, so haben sie wegen  $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = Aa_{33} = 0$  Werte von gleichem Vorzeichen. Hieraus folgt, daß das Parallelenpaar (72) reell oder imaginär ist, je nachdem eine der beiden Größen  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  negativ oder positiv ist, und dies ist dasselbe Kriterium, zu dem wir schon früher (S. 295) auf anderem Wege geführt wurden. Wenn nur eine der Unterdeterminanten  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  verschwindet, so entscheidet das Vorzeichen der nicht verschwindenden in gleicher Weise, ob das Parallelenpaar reell oder imaginär ist, und wenn  $A_{11} = A_{22} = 0$  ist, wird das Parallelenpaar nach S. 295 und 284 zur *Doppelgerade*.

Mit Hilfe der Diskriminante  $\Delta = -(A_{11} + A_{22})$  der Gleichung (72) kann man (72) in der Gestalt

$$\left(Y + \frac{a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{A_{11} + A_{22}}{\lambda_2^2} = 0$$

schreiben, aus der vermöge der Transformation

$$Y = \mathfrak{Y} - \frac{a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2}{\lambda_2}$$

die Gleichung

$$\lambda_2 \mathfrak{Y}^2 + \frac{A_{11} + A_{22}}{\lambda_2} = 0$$

hervorgeht. Diese endlich ist mit Rücksicht auf  $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$  und auf  $A_{22} : a_{11} = A_{11} : a_{22}$  (vgl. Gl. 59, S. 295) identisch mit  $a_{11}(a_{11} + a_{22})\mathfrak{Y}^2 + A_{22} = 0$  oder auch  $a_{22}(a_{11} + a_{22})\mathfrak{Y}^2 + A_{11} = 0$ , also mit den Gleichungen (60), die wir schon früher (S. 295) in andrer Weise erhalten haben.

144. Von der allgemeinen Gleichung der Kurven zweiten Grades ausgehend wird man also durch die in Nr. 141, 143 und 142 angegebenen Transformationen auf die Gleichungen (53) oder (70) oder (57) geführt. Es sind dies, von den Geradenpaaren abgesehen, die schon in Nr. 131 erwähnten Gebilde. Im Folgenden stellen wir die erhaltenen Kriterien in einer Tabelle übersichtlich zusammen:

	$A_{33} \neq 0$		$A_{33} = 0$		
$\neq 0$	$A_{33} < 0$	$A_{33} > 0$	Parabel		
	Hyperbel	$a_{11}A$ oder $a_{22}A$ $< 0$   $> 0$			
		Ellipse   Imag. Kurve			
$= 0$	$A_{33} < 0$	$A_{33} > 0$	$A_{11}$ oder $A_{22}$ $< 0$   $> 0$	$A_{11} = A_{22}$ $= 0$	
	Reelles Geraden- paar (Schnittpkt. im Endlichen)	Imaginäres Geradenpaar	Reelles Parallelenpaar	Imagi- näres	Doppel- gerade

Diese Kriterien gelten auch dann, wenn die ursprüngliche Gleichung der Kurve auf *schiefwinklige Koordinaten* bezogen

Der Leser wird sich hiervon leicht überzeugen, wenn er, am Schluß von Nr. 141 empfohlen wurde, die Untersuchungen von Nr. 141–143 unter Voraussetzung schiefwinkliger Koordinaten durchführt.

B. 1) Man bestimme die Gattung der durch folgende Gleichungen dargestellten Kegelschnitte:

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0. \quad \text{Ellipse.}$$

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0. \quad \text{Hyperbel.}$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0. \quad \text{Parabel.}$$

2) Eine Kurve mit  $a_{12} = 0$  und  $A \neq 0$  ist eine Ellipse oder eine imaginäre Kurve für gleiche, eine Hyperbel für entgegengesetzte Vorzeichen von  $a_{11}$  und  $a_{22}$ .

3) Eine Kurve mit  $a_{11} = 0$  und  $A \neq 0$  ist eine Parabel, in zugleich  $a_{12} = 0$  ist, sonst eine Hyperbel.

$$4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0$$

ist eine Parabel dar, die die Koordinatenachsen in den Punkten  $0$  und  $0|b$  berührt.

$$5) \quad 7x^2 - 16xy + 4y^2 + 5x - 10y = 0. \quad \text{Reelles Geradenpaar.}$$

$$6) \quad 25x^2 - 20xy + 4y^2 + 9 = 0. \quad \text{Imaginäres Parallelenpaar.}$$

$$7) \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 30x - 20y + 25 = 0. \quad \text{Doppelgerade.}$$



## 145. Gleichungen der Paare konjugierter Durchmesser.

Die Gleichung des zu einer Richtung  $\alpha$  konjugierten Durchmessers, also des Durchmessers, der die in der Richtung  $\alpha$  gezogenen Sehnen des Kegelschnitts halbiert, ist bei rechtwinkligen Koordinaten nach (43), S. 291:

$$(73) \quad (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha)x + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha)y + (a_{31} \cos \alpha + a_{32} \sin \alpha) = 0.$$

Für den Winkel  $\alpha'$  dieser Geraden mit der  $x$ -Achse ist

$$(74) \quad \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \alpha}{a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \alpha}, \text{ also } a_{22} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' + a_{12}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') + a_{11} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichung in bezug auf  $\alpha$ ,  $\alpha'$  ist wieder ein Beweis für die schon S. 286 bemerkte Tatsache, daß die Sehnen, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha'$  bilden, ihrerseits von einem Durchmesser halbiert werden, der mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  einschließt. Also gehört zu zwei Richtungskoeffizienten  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha'$ , die der Gleichung (74) genügen, stets ein Paar konjugierter Durchmesser. Nach Nr. 17 und 94 ( $\operatorname{tg} \alpha = \lambda$ ,  $\operatorname{tg} \alpha' = \lambda'$ ) bilden alle diese Paare eine *Involution*. Vgl. auch Nr. 148.

Ist  $a_{12} = 0$ , so gehört zu der Richtung  $\alpha = 0$  die Richtung  $\operatorname{tg} \alpha' = \pm \infty$  des konjugierten Durchmessers, die Koordinatenachsen sind daher in diesem Falle den *Achsen* des Kegelschnitts parallel. Bei *parabolischen* Parallelkoordinaten gilt der entsprechende Satz: Fehlt in der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts das Glied mit  $xy$ , ist also  $a_{12} = 0$ , so sind die Koordinatenachsen einem Paare konjugierter Durchmesser parallel. Denn geben wir  $y$  einen konstanten Wert, so ist die Summe der zugehörigen Abszissen gleich  $-2a_{13}:a_{11}$ , also liegt die Mitte der zur  $x$ -Achse parallelen Sehnen in der Geraden  $a_{11}x + a_{13} = 0$ , d. h. in einer Parallelen zur  $y$ -Achse. Ebenso findet man  $a_{22}y + a_{23} = 0$  als die Halbierungslinie der  $y$ -Parallelen.

B. Für die Parabel ist wegen  $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$  die Involution der konjugierten Durchmesser parabolisch nach Nr. 94 und Nr. 18: Die parallelen Durchmesser sind sämtlich der unendlich fernen Geraden konjugiert.

146. **Gleichung des Achsenpaares.** Für zwei zueinander rechtwinklige konjugierte Durchmesser, also für die *Achsen* des Kegelschnitts, hat man (Nr. 36)  $\operatorname{tg} \alpha' = -1 : \operatorname{tg} \alpha$ , mithin zur Bestimmung von  $\alpha$  die quadratische Gleichung

$$(75) \quad a_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg} \alpha - a_{12} = 0.$$

Eine einfache Umformung ergibt aber

$$(76) \quad a_{12} \cos 2\alpha - \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sin 2\alpha = 0, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Für den Fall  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$  vgl. S. 291 f.

Setzt man in (75)  $\operatorname{tg} \alpha = (y - y_0) : (x - x_0)$ , wo  $x_0, y_0$  die Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve (vgl. S. 287) bedeuten, so erhält man die Gleichung des Achsenpaares:

$$(77) \quad a_{12}(x - x_0)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - a_{12}(y - y_0)^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte der Achsen mit der Kurve nennt man die *Scheitel* der Kurve.

Die Parabel kann nur eine Achse und einen Scheitel im Endlichen haben. Die Richtung der Achse ist nach S. 297 durch  $\operatorname{tg} \alpha_1 = -a_{11} : a_{12} = -a_{12} : a_{22}$  gegeben. Liegt die Gleichung der Kurve in der transformierten Form  $\mathfrak{Y}^2 - 2p\mathfrak{X} = 0$  vor (vgl. (70), S. 297), so ist  $\mathfrak{Y} = 0$  die Gleichung der Achse; für eine durch

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad A \neq 0$$

gegebene Parabel erhält man als Gleichung der Achse nach S. 296 zunächst  $\mathfrak{Y} = Y - c = 0$ . Hier ist

$$Y \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = -x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \text{ oder da } \alpha_1 = \alpha_2 \pm \frac{1}{2} \pi,$$

$$Y = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2;$$

ferner ist nach S. 296  $c = -\frac{h}{\lambda_2} = -\frac{a_{12} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2}{a_{11} + a_{22}}$ , die

Gleichung der Achse wird daher im ursprünglichen Koordinatensystem  $x, y$ :

$$(78) \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = -\frac{a_{12} \cos \alpha_2 + a_{23} \sin \alpha_2}{a_{11} + a_{22}}.$$

Aus  $\operatorname{tg} \alpha_1 = -a_{11} : a_{12} = -a_{12} : a_{22}$  folgt nun  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (\alpha_1 \mp \frac{1}{2} \pi)$ ,  
 $= \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ , man kann daher die Gleichung (78) der Achse  
 der Parabel in einer der beiden Formen

$$(79a) \quad a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

oder

$$(79b) \quad a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

schreiben.

B. Die Achsen der Ellipse  $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$  sind  
 $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$  oder  $(2x - y)(x + 2y) = 0$ .

Man beachte, daß der Mittelpunkt der Kurve im Koordinatenanfang liegt.

147. **Tangentenpaar.** Schon in Nr. 135 wurde gezeigt, daß durch jeden Punkt  $P_1$  der Ebene zwei Tangenten an einen Kegelschnitt gezogen werden können. Die Gleichung dieses Tangentenpaares ergibt sich sofort aus der Bedingung dafür, daß die Verbindungslinie zweier Punkte  $P_1, P_2$  den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, also berührt. Diese Bedingung lautete (vgl. (14), S. 274):

$$\{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\}^2 - 4f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

Faßt man hier  $x_2 | y_2 | z_2$  als laufende Koordinaten auf, was dadurch zum Ausdruck gebracht werden soll, daß man den Index 2 bei  $x_2, y_2, z_2$  wegläßt, so ist

$$(80) \{x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1)\}^2 - 4f(x_1, y_1, z_1) f(x, y, z) = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Verbindungslinie eines Punktes  $P$  mit dem festen Punkte  $P_1$  eine Tangente des Kegelschnitts  $f(x, y, z) = 0$  sei, d. h. die Gleichung (80) stellt das von  $P_1$  an die Kurve gelegte Tangentenpaar dar. Dabei kann der Ausdruck  $x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1)$  auch durch  $x_1 f'(x) + y_1 f'(y) + z_1 f'(z)$  ersetzt werden, wie schon auf S. 273 bemerkt wurde.

Liegt der Punkt  $P_1$  insbesondere im Koordinatenanfang ( $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 1$ ), so erhält man für das von ihm an die Kurve gelegte Tangentenpaar die Gleichung

$$(81) (a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2 - a_{33}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0$$

oder auch

$$(82) (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x^2 - 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})xy + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)y^2 = 0,$$

und hierfür kann kürzer

$$(82a) \quad A_{22}x^2 - 2A_{12}xy + A_{11}y^2 = 0$$

gesetzt werden.

Die beiden Tangenten sind im allgemeinen voneinander verschieden. Stellt man aber die Bedingung dafür auf, daß die Gleichung (82), als quadratische Gleichung für  $y:x$  betrachtet, zwei gleiche Wurzeln hat, so erhält man

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})^2 \text{ oder}$$

$$a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0,$$

d. h.  $a_{33}A = 0$ .

Also fallen einmal die beiden vom Nullpunkt ausgehenden Tangenten zusammen für  $a_{33} = 0$ , d. h. wenn dieser Punkt der Kurve angehört. Daher ist ein Punkt in der Kurve als der Schnittpunkt von zwei zusammenfallenden Tangenten derselben anzusehen, so wie die Tangente als die Verbindungslinie von zwei zusammenfallenden Punkten erklärt worden ist.

Die Tangenten fallen auch zusammen, wenn die Diskriminante  $A$  gleich Null ist:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0,$$

d. h. wenn die Kurve in ein Geradenpaar zerfällt. Denn dann ist die einzige Gerade, die sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden kann, die nach dem Doppelpunkt gezogene; die aus einem Punkt an eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung gehenden Tangenten fallen mit jener Geraden zusammen.

Falls der Kegelschnitt kein Geradenpaar ist und in einem reellen Zug verläuft, trennt er die Ebene in zwei Gebiete, die wir als *Äußeres und Inneres der Kurve* unterscheiden. Wir nennen den Punkt einen äußeren oder inneren, je nachdem das von ihm an die Kurve gelegte Tangentenpaar reell oder imaginär ist.

Die Gleichung (81) des vom Koordinatenanfang  $O$  an den Kegelschnitt zu ziehenden Tangentenpaares zeigt, daß diese Gleichung auch bei schiefwinkligen Koordinatenachsen das

Tangentenpaar darstellt. Denn für die Schnittpunkte dieses Geradenpaares mit der Kurve ist auch  $(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2 = 0$ , d. h. die Verbindungslinie dieser Punkte ist die Polare des Koordinatenanfangs  $O$ . Die linke Seite der Gleichung (81) muß das Produkt von zwei in  $x, y$  linearen, homogenen Faktoren, also von der Form  $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2$  sein, woraus hervorgeht, daß die Gleichung der Kurve in die Gestalt

$$(83) \quad b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 - (a_1x + a_2y + a_3)^2 = 0$$

übergeführt werden kann, wobei  $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0$  das von  $O$  an die Kurve gelegte Tangentenpaar und  $a_1x + a_2y + a_3 = 0$  die zugehörige Berührungssehne darstellt. (Vgl. Nr. 111, S. 221.)

Die Gleichungen (81) bis (83) gelten auch für einen beliebigen Pol  $P_1(x_1|y_1)$  (statt des Koordinatenanfangs  $O$ ), wenn man in ihnen  $x|y$  durch  $x - x_1|y - y_1$  ersetzt. Denn auf ein dem ursprünglichen Koordinatensystem  $x, y$  paralleles System  $X, Y$  bezogen, das seinen Anfangspunkt in  $P_1$  hat, würden die Gleichungen (81) bis (83) für dieses neue System gelten, wenn man in ihnen  $x|y$  durch  $X|Y$  ersetzt. Da aber  $X = x - x_1$ ,  $Y = y - y_1$  ist (vgl. S. 24), hat man nur die Ausdrücke  $x - x_1|y - y_1$  an Stelle von  $x|y$  in (81) bis (83) einzutragen, um die Gleichung des von  $P_1$  an die Kurve  $f(x, y, z) = 0$  gelegten Tangentenpaares in einer von Gleichung (80) nur scheinbar verschiedenen Gestalt und auf das ursprüngliche System bezogen zu erhalten.

148. **Asymptoten.** Da der Mittelpunkt  $C$  einer Kurve zweiten Grades der Pol der unendlich fernen Geraden ist, liegen die Berührungspunkte der von ihm an die Kurve zu ziehenden Tangenten im Unendlichen. Man nennt diese beiden Tangenten die *Asymptoten der Kurve*; sie sind reell im Fall der Hyperbel, konjugiert imaginär im Fall der Ellipse. Zur Ableitung der Gleichung des Asymptotenpaares hat man nur in (80) für  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Mittelpunkts einzutragen; dies sind aber nach S. 287 Zahlen  $x_0, y_0$ , die die Gleichungen

$$\frac{1}{2}f'(x_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$

$$\frac{1}{2}f'(y_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

erfüllen. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache und der Gleichung

$x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1) = 2f(x_1, y_1, z_1)$  geht aus (80) die Gleichung

$$(84) \quad 4z^2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)^2 - 4z_0(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)f(x, y, z) = 0$$

oder

$$(84a) \quad z^2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0) - z_0 f(x, y, z) = 0$$

hervor. Hier ist aber  $a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0$  nach S. 288 gleich  $A : A_{33}$ , die Gleichung des Asymptotenpaares wird also in nicht homogener Schreibweise:

$$(85) \quad A - A_{33}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0.$$

Bei der Parabel ( $A \neq 0$ ,  $A_{33} = 0$ ) ist, wie (84) zeigt, die unendlich ferne Gerade  $z = 0$  die einzige Gerade, die die Kurve in zwei vereinten unendlich fernen Punkten schneidet.

Die unendlich fernen Punkte einer Kurve zweiten Grades sind nach S. 279 die Doppelpunkte einer Involution, die von den auf der unendlich fernen Geraden  $g_\infty$  gelegenen harmonischen Polepaaren der Kurve gebildet wird. Aus der Definition der Paare konjugierter Durchmesser (Nr. 139) folgt daher, daß die Paare ihrer unendlich fernen Punkte zu den Berührungspunkten der Asymptoten harmonisch liegen, und es bilden somit diese Durchmesserpaare selbst eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen aus den beiden Asymptoten bestehen. Die Achsen sind ein Paar zueinander rechtwinkliger konjugierter Durchmesser, sie halbieren daher die von den Asymptoten gebildeten Winkel, und sie sind stets reell, gleichviel ob die Asymptoten reell oder imaginär sind (Nr. 59).

B. 1) Das Asymptotenpaar der Hyperbel

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 32y - 19 = 0$$

hat die Gleichung  $9x^2 - 4y^2 - 54x - 32y + 17 = 0$  oder

$$(3x + 2y - 1)(3x - 2y - 17) = 0.$$

2) Zu zeigen, daß bei einem Parallelenpaar die „Asymptoten“ aus der doppelt zu zählenden Geraden bestehen, die in der Mitte zwischen den beiden Parallelen verläuft.

Für ein Parallelenpaar  $f(x, y, z) = 0$  (vgl. S. 287)  $A = 0$ ,  $A_{33} = 0$ , daher auch  $A_{13} = 0$ ,  $A_{23} = 0$ , ferner nach S. 289/90

$$A : A_{33} = A_{11} : a_{22} = A_{22} : a_{11} = -A_{12} : a_{12}.$$

Unter der Voraussetzung, daß etwa  $a_{22} \neq 0$  sei, erhält man für

das „Asymptotenpaar“ unter Rücksicht auf  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$  und  $a_{13}a_{22} = a_{12}a_{23}$  nunmehr nach (85) die Gleichung

$$(a_{21}x + a_{22}y + a_{23})^2 = 0.$$

Das Parallelenpaar selbst wird durch das Produkt

$$(a_{21}x + a_{22}y + a_{23} + \sqrt{-A_{11}})(a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - \sqrt{-A_{11}}) = 0$$

dargestellt.

149. **Tangentialgleichung.** Es soll nun die Bedingung aufgestellt werden, unter der eine Gerade  $ux + vy + w = 0$  den Kegelschnitt

$$(86) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

berührt.

Es müssen im Falle der Berührung die Koeffizienten  $u, v, w$  der Gleichung der Geraden den Koeffizienten von  $x, y, z$  in der Gleichung einer Tangente  $p_1 = 0$  proportional sein, man hat also (vgl. S. 275f.) bei Benutzung eines Proportionalitätsfaktors  $\sigma$ :

$$(87) \quad \begin{cases} u = \sigma(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) \\ v = \sigma(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) \\ w = \sigma(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}), \end{cases}$$

wobei  $x_1|y_1$  die Koordinaten des Berührungspunktes  $P_1$  der Tangente bedeuten, die die Gleichung der Geraden  $ux + vy + w = 0$  erfüllen müssen. Zu (87) tritt daher noch  $ux_1 + vy_1 + w = 0$  oder

$$(88) \quad \sigma(ux_1 + vy_1 + w) = 0.$$

Durch Elimination von  $\sigma x_1, \sigma y_1$  und  $\sigma$  aus den vier Gleichungen (87) und (88) ergibt sich

$$(89) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Multiplikation mit  $-1$  wird diese Gleichung identisch mit

$$(90) \quad F(u, v, w) \equiv A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33}w^2 = 0,$$

und dies Ergebnis hätte auch ohne Anwendung einer Determinante durch Auflösung von (87) nach  $\sigma x_1, \sigma y_1, \sigma$  (vgl. (26), S. 283) und Einführung der gefundenen Werte in (88) gewonnen werden können.

Die Gleichung (90) heißt die *Tangentialgleichung* des Kegelschnitts (86) oder seine *Gleichung in Linienkoordinaten*, weil sie durch die Koordinaten einer jeden Tangente der Kurve erfüllt werden muß.

Die Formen (90) und (86) entsprechen sich genau dualistisch (Nr. 78 und 82). Es sei noch darauf hingewiesen, daß diese Gleichartigkeit der Darstellung einer Kurve zweiten Grades in Punkt- und Linienkoordinaten die analytische Begründung der schon in der Polarentheorie hervorgehobenen dualistischen Beziehungen an derselben ergibt. Da insbesondere die Tangentialgleichung wiederum vom zweiten Grade ist, so nennt man den Kegelschnitt auch eine *Kurve zweiter Klasse* (Nr. 79). Wenn aber die Ordnung und die Klasse einer Kurve übereinstimmen, spricht man vom *Grade* derselben (S. 267 Anm.).

Besteht der Kegelschnitt (86) aus einem Geradenpaar, ist also  $A = 0$ , so stehen die Koeffizienten  $A_{ik}$  von (90) in engster Beziehung zu den Koordinaten  $\xi|\eta$  des Schnittpunktes  $S$  des Geradenpaares, wie schon S. 283 gezeigt wurde, und an die Stelle der Gleichung (90) tritt alsdann nach (27a), S. 283:

$$(91) \quad (\xi u + \eta v + w)^2 = 0,$$

sie stellt den Schnittpunkt  $S$  doppelt zählend dar. Zu einer Doppelgeraden (alle  $A_{ik} = 0$ ) gibt es keine Gleichung in Linienkoordinaten.

Die Bedingung dafür, daß zwei Punkte mit den homogenen Koordinaten  $x_1|y_1|z_1$  bez.  $x_2|y_2|z_2$  harmonische Pole in bezug auf den Kegelschnitt  $f(x, y, z) = 0$  seien, ist nach S. 277:

$$x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = 0 \text{ oder auch} \\ x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) = 0.$$

Dual folgt nun als Bedingung dafür, daß zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den homogenen Koordinaten  $u_1|v_1|w_1$  bez.  $u_2|v_2|w_2$  harmonische Polaren des Kegelschnitts  $F(u, v, w) = 0$  seien:

$$(92) \quad u_2 F'(u_1) + v_2 F'(v_1) + w_2 F'(w_1) = 0 \text{ oder auch} \\ u_1 F'(u_2) + v_1 F'(v_2) + w_1 F'(w_2) = 0.$$

Ausführlich geschrieben lauten diese Gleichungen:

$$(93) \quad A_{11}u_1u_2 + A_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + A_{22}v_1v_2 + A_{13}(u_1w_2 + u_2w_1) \\ + A_{23}(v_1w_2 + v_2w_1) + A_{33}w_1w_2 = 0.$$



Erfüllen die Koordinaten der beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$  diese Bedingung, so liegen  $g_1$  und  $g_2$  harmonisch zu dem von ihrem Schnittpunkt an die Kurve gezogenen Tangentenpaar. Vgl. auch S. 280/1.

B. Ein Kegelschnitt ist durch fünf seiner Tangenten bestimmt (Nr. 129), und wenn drei seiner Tangenten durch einen Punkt gehen, so besteht er aus diesem Punkte und dem Schnittpunkt der beiden anderen bestimmenden Tangenten: Die Gesamtheit seiner Tangenten besteht aus den zu diesen Punkten gehörigen Strahlenbüscheln.

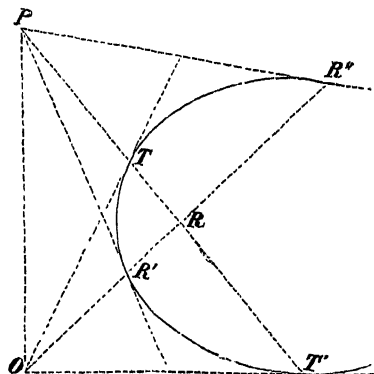


Fig. 77.

150. Sekanten eines Kegelschnitts. Aus der schon in Nr. 130 benutzten Polargleichung des Kegelschnitts (86) ergibt sich für das Produkt  $OR' \cdot OR''$  der Vektoren, die in einer den Nullpunkt ( $O$ ) enthaltenden Sehne  $R'R''$  (Fig. 77) vom Neigungswinkel  $\vartheta$  (oder  $\vartheta + \pi$ ) gemessen sind, der Ausdruck

$$(94) \quad OR' \cdot OR'' = \frac{a_{33}}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta}.$$

Wird durch  $O$  eine zweite Sekante gelegt (Neigungswinkel  $\vartheta'$ ), auf der die Kurve die Sehne  $S'S''$  abschneidet, so ist das Produkt  $OS' \cdot OS''$  durch einen Ausdruck dargestellt, der aus (94) durch Vertauschung von  $\vartheta$  mit  $\vartheta'$  hervorgeht; man hat somit die Gleichung

$$(95) \quad \frac{OR' \cdot OR''}{OS' \cdot OS''} = \frac{a_{11} \cos^2 \vartheta' + 2a_{12} \cos \vartheta' \sin \vartheta' + a_{22} \sin^2 \vartheta'}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta}.$$

Diese gilt, welche Lage auch der Punkt  $O$  haben möge. Denn bei Verlegung des Nullpunktes durch Parallelverschiebung der Koordinatenachsen in einen anderen Punkt der Ebene bleiben die Koeffizienten  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  unverändert. Die Sekanten müssen natürlich ihre Richtungen  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  beibehalten. So folgt:

Werden durch einen Punkt  $O$  zwei Sekanten  $OR$ ,  $OS$  gezogen, die die Kurve in den Punkten  $R'$ ,  $R''$ ;  $S'$ ,  $S''$  schneiden, so ist das Verhältnis

$$OR' \cdot OR'' : OS' \cdot OS''$$

der Rechtecke aus den durch die Kurve gebildeten Abschnitten dieser Sekanten für jede Lage des Punktes  $O$  das nämliche, sobald die Richtungen der Sekanten  $OR$ ,  $OS$  dieselben bleiben.

Auch der folgende Satz gilt: Werden durch zwei feste Punkte  $O$  und  $O_1$  irgend zwei Parallelen  $OR$  und  $O_1R_1$  gezogen, so ist das Verhältniß der Rechtecke

$$OR' \cdot OR'' : O_1R'_1 \cdot O_1R''_1$$

konstant, welches auch die Richtung dieser Sekanten sei. Denn diese Rechtecke sind

$\frac{a_{33}}{\alpha_{11} \cos^2 \vartheta + 2\alpha_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + \alpha_{22} \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{a'_{33}}{\alpha_{11} \cos^2 \vartheta + 2\alpha_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + \alpha_{22} \sin^2 \vartheta}$ ,  
wenn  $a'_{33}$  der Wert ist, den das absolute Glied der allgemeinen Gleichung bei Verlegung des Anfangspunktes der Koordinaten von  $O$  nach  $O_1$  annimmt. Das Verhältniß dieser Rechtecke ist daher  $= a_{33} : a'_{33}$  und somit von  $\vartheta$  unabhängig. Für  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ ,  $\alpha_{12} = 0$ , also bei einem Kreise, ist das Sekantenprodukt (94) von der Richtung  $\vartheta$  unabhängig, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist.

151. Der Satz von Nr. 150 schließt einige Fälle ein, für die besondere Ausdrucksformen wichtig sind.

1. Ist  $O_1$  der Mittelpunkt der Kurve, so ist  $O_1R' = O_1R''$  und die Größe  $O_1R' \cdot R''O_1$  wird das Quadrat des zu  $O_1R$  parallelen Halbmessers oder halben Durchmessers. Also verhalten sich die Rechtecke aus den Abschnitten in zwei sich schneidenden Sehnen zueinander wie die Quadrate der zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser.

2. Wird die Sehne  $OR$  zur Tangente, so ist  $OR' = OR''$  und  $OR' \cdot OR''$  das Quadrat der Tangente. Aus dem eben gefundenen Verhältniß der Quadrate folgt aber, daß die Längen der durch einen Punkt gezogenen Tangenten sich zueinander verhalten wie die Längen der Durchmesser, zu denen sie parallel sind.

3. Ist die Linie  $OO_1$  ein Durchmesser und  $OR$ ,  $O_1R_1$  parallel zu seinen Ordinaten (vgl. S. 285), so ist  $R'O = OR''$ ,  $R'_1O_1 = O_1R''_1$ . Schneidet der Durchmesser die Kurve in den Punkten  $A'$ ,  $A''$ , so ist also  $OR'^2 : A'O \cdot OA'' = O_1R'_1{}^2 : A'O_1 \cdot O_1A''$ , d. h. die Quadrate der Ordinaten irgend eines Durchmessers sind

den Rechtecken aus den Abschnitten proportional, die sie im Durchmesser bestimmen.

Es gibt aber einen Fall, in dem der Satz von Nr. 150 nicht länger gültig bleibt, nämlich wenn die Sekante  $OS$  parallel zu einer Asymptote der Kurve ist. Denn das Rechteck wird mit dem Abschnitt  $OS''$  unendlich, und  $OS$  schneidet die Kurve nur in einem endlichen Punkt  $S'$ . Wir prüfen nun die naheliegende Vermutung, ob in diesem Fall das Verhältnis  $OS' : OR' \cdot OR''$  konstant ist.

Nehmen wir zur größeren Einfachheit  $OS$  zur  $x$ -Achse und  $OR$  zur  $y$ -Achse. Soll die  $x$ -Achse zu einer der Asymptoten parallel sein, so muß in der Gleichung des Kegelschnitts das Glied  $a_{11}x^2$  fehlen, denn die für  $y = 0$  erhaltene quadratische Gleichung  $a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = 0$  muß sich nun auf eine Gleichung ersten Grades für  $x:z$  reduzieren (vgl. Nr. 16 und 27), oder in anderer Ausdrucksweise: bei der eben angeschriebenen Gleichung muß man den Faktor  $z$  ausscheiden können, was einer Wurzel  $z = 0$  entspricht (vgl. S. 142). Die Gleichung der Kurve möge demnach die Form haben

$$(96) \quad 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Indem wir  $y = 0$  setzen, wird der Abschnitt in der  $x$ -Achse gefunden  $OS' = -a_{33} : 2a_{13}$ , und indem wir  $x = 0$  setzen, wird das Rechteck unter den Abschnitten in der  $y$ -Achse gleich  $a_{33} : a_{22}$ . Also ist  $OS' : OR' \cdot OR'' = -a_{22} : 2a_{13}$ . Wenn wir nun zu irgend anderen parallelen Achsen transformieren, so bleibt  $a_{22}$  unverändert, und das neue  $a_{13}$  wird gleich  $a_{12}y' + a_{13}$ . Also verändert sich jenes Verhältnis  $-\frac{a_{22}}{2a_{13}}$  in  $-\frac{a_{22}}{2(a_{12}y' + a_{13})}$ ; es bleibt im allgemeinen nur konstant, solange  $y'$  konstant ist. Die durch zwei parallele Sehnen einer Hyperbel in einer Parallelen zu einer Asymptote gebildeten Abschnitte sind proportional den Rechtecken unter den Abschnitten der Sehnen.

Ist aber die Kurve (96) eine Parabel, so ist  $a_{12} = 0$ , und das Verhältnis immer konstant: Wenn in einer Parabel eine Gerade irgend einen Durchmesser schneidet (Nr. 143), so steht das Rechteck unter den in ihr bestimmten Abschnitten zu dem durch sie im Durchmesser gebildeten Abschnitt in konstantem Verhältnis, solange ihre Richtung dieselbe bleibt.

## Neuntes Kapitel.

### Die Mittelpunktseigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

152. Konstanten der Transformation bei rechtwinkligen Koordinaten. In Nr. 141 wurde gezeigt, daß die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

durch die Transformation auf die Achsen der Kurve die Gestalt annimmt

$$(2) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

vorausgesetzt, daß der Kegelschnitt einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt hat oder eine sogenannte *Mittelpunktskurve* ist. Ist die Gleichung (1) auf rechtwinklige Koordinatenachsen bezogen, so sind hierbei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(3) \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \text{also}$$

$$(4) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Setzen wir  $R^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$ , so lautet daher die auf die Achsen\*) transformierte Gleichung der Kurve (1):

$$(5) \quad (a_{11} + a_{22} - R)x^2 + (a_{11} + a_{22} + R)y^2 + \frac{2A}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = 0.$$

Würde die Gleichung (2) in der Form  $a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33} = 0$  geschrieben, so wäre offenbar

$$(6) \quad a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22}.$$

Man kann nun zeigen, daß überhaupt bei Transformation der auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Gleichung (1) zu einem ganz beliebigen anderen rechtwinkligen System  $x', y'$  die

---

\*) Natürlich bleibt beliebig, welche Achse als  $x$ - oder  $y$ -Achse zu nehmen ist.

Ausdrücke  $a_{11} + a_{22}$  und  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  unverändert bleiben, oder m. a. W.: Denkt man sich die transformierte Gleichung mit Koeffizienten  $a'_{ik}$  geschrieben, so ist

$$(7) \quad a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}^2.$$

Zum Beweis dieser Formeln denken wir uns den Übergang von dem Koordinatensystem  $x, y$  zu dem System  $x', y'$  (Anfangspunkt  $O'$ ) in zwei Schritten ausgeführt, indem wir zunächst (1) auf ein System  $\xi, \eta$  transformieren, dessen Achsen zu  $x, y$  parallel sind, sich aber in  $O'$  schneiden; alsdann führen wir durch Drehung um einen gewissen Winkel  $\vartheta$  das System  $\xi, \eta$  in  $x', y'$  über.

Beide Schritte sind vereinigt in den Formeln (vgl. S. 26 und 27):

$$(8) \quad x = x_0 + x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \quad y = y_0 + x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta.$$

Bei dem ersten Schritt, der nur eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen bedeutet, bleibt die Gliedergruppe  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  unverändert, wir wollen daher sofort den Erfolg des zweiten Schrittes näher betrachten. Durch ihn wird  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  übergeführt in:

$$a_{11}(x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta)^2 + a_{22}(x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta)^2 + 2a_{12}(x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta)(x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta),$$

für die Koeffizienten  $a'_{11}, 2a'_{12}, a'_{22}$  von  $x'^2, x'y'$  und  $y'^2$  gelten daher die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} 2a'_{11} = a_{11} + a_{22} + 2a_{12} \sin 2\vartheta + (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta \\ 2a'_{22} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \sin 2\vartheta - (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt  $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$ , ferner

$$4a'_{11}a'_{22} = (a_{11} + a_{22})^2 - \{2a_{12} \sin 2\vartheta + (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta\}^2;$$

aber es ist  $4a'_{12}^2 = \{2a_{12} \cos 2\vartheta - (a_{11} - a_{22}) \sin 2\vartheta\}^2$ ; daher

$$(10) \quad 4(a'_{11}a'_{22} - a'_{12}^2) = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

B. 1) Die auf die Achsen transformierte Gleichung der Ellipse  $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$  lautet  $2X^2 + 3Y^2 = 12$ .

2) Die Transformation der Hyperbel

$$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$$

auf die Achsen ergibt  $3X^2 - 4Y^2 = 12$ .

153. *Wie ist aber die auf die Achsen transformierte Gleichung herzustellen, wenn die auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung der Kurve in schiefwinkligen Koordinaten  $x, y$  gegeben ist?* Offenbar kann diese Transformation bewerkstelligt werden, indem man zuerst in der einfachsten Weise zu rechtwinkligen Koordinaten  $x', y'$  übergeht und dann wie in Nr. 141 verfährt.

Man hat hierbei die Formeln (55), S. 26 anzuwenden, in denen noch  $\alpha = 0$  zu setzen ist, also

$$x = \frac{x' \sin \omega - y' \cos \omega}{\sin \omega}, \quad y = \frac{y'}{\sin \omega}.$$

Die Koeffizienten  $a'_{11}, a'_{22}, a'_{12}$  von  $x'^2, y'^2$  und  $2x'y'$  werden alsdann

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{22} = \frac{a_{11} \cos^2 \omega - 2a_{12} \cos \omega + a_{22}}{\sin^2 \omega}, \quad a'_{12} = \frac{-a_{11} \cos \omega + a_{12}}{\sin \omega}$$

und ferner ergibt sich

$$(11) \quad a'_{11} + a'_{22} = \frac{a_{11} - 2a_{12} \cos \omega + a_{22}}{\sin^2 \omega}, \quad a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2 \omega}.$$

Die Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2$  sind jetzt die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(12) \quad \lambda^2 \sin^2 \omega - (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega) \lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

deren Auflösung mit

$$R^2 = (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \omega + \{2a_{12} - (a_{11} + a_{22}) \cos \omega\}^2 \text{ durch}$$

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega \pm R}{2 \sin^2 \omega}$$

gegeben ist.

Die auf schiefwinklige Koordinaten mit dem Achsenwinkel  $\omega$  bezogene Gleichung einer Kurve zweiten Grades

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{33} = 0,$$

deren Mittelpunkt im Nullpunkt liegt, geht daher bei der Transformation auf die Hauptachsen über in

$$(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega - R)x^2 + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega + R)y^2 + 2a_{33} \sin^2 \omega = 0.$$

B. 1) Die Gleichung der Kurve sei bezogen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit  $\cos \omega = \frac{3}{5}$  und habe alsdann die Gestalt  $10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10$ . Wie lautet die auf die Achsen transformierte Gleichung?

Hier ist  $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{285}{16}$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1025}{16}$ , folglich  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = \frac{205}{16}$ ; man erhält  $16X^2 + 41Y^2 = 32$ .

2)  $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$  zu den Achsen transformiert, für  $\omega = 60^\circ$ , gibt  $X^2 - 15Y^2 = 3$ .

\* 154. Konstanten der allgemeinen Transformation der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung. Angenommen, daß eine Gleichung bei Koordinatenachsen, die den Winkel  $\omega$  miteinander bilden, zu anderen unter dem Winkel  $\omega'$  geneigten Achsen mit demselben Nullpunkt  $O$  transformiert werden soll, und daß dabei durch die Substitution von Nr. 11 die Größe

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad \text{in} \quad a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2$$

übergehe, so muß doch immer durch die nämliche Substitution

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 \quad \text{in} \quad x'^2 + 2x'y' \cos \omega' + y'^2$$

übergeführt werden, weil die eine wie die andere Funktion das bei der Transformation unverändert gebliebene Quadrat der Entfernung eines Punktes von  $O$  darstellt (Nr. 11, B. 2). Somit muß auch

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \mu(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) \\ &= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + \mu(x'^2 + 2x'y' \cos \omega' + y'^2) \end{aligned}$$

sein, für jeden Wert von  $\mu$ .

Wenn wir nun  $\mu$  so bestimmen, daß die linke Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, so muß die rechte Seite auch ein vollkommenes Quadrat sein, denn, gleich Null gesetzt würde jede der beiden Seiten ein Paar zusammenfallender Geraden darstellen. Aber die Bedingung, unter der die erste ein vollkommenes Quadrat wird, ist

$$(a_{11} + \mu)(a_{22} + \mu) = (a_{12} + \mu \cos \omega)^2,$$

oder  $\mu$  muß eine Wurzel der Gleichung sein

$$\mu^2 \sin^2 \omega + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)\mu + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Wir erhalten eine zweite quadratische Gleichung von derselben Form zur Bestimmung der Werte von  $\mu$ , die die andere Seite der Gleichung zu einem vollkommenen Quadrat machen; aber weil beide Seiten für dieselben Werte von  $\mu$  vollkommene Quadrate werden sollen, müssen diese beiden

Bestimmungsgleichungen identisch sein, d. h. in ihren entsprechenden Koeffizienten übereinstimmen. Es ergibt sich so

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega}{\sin^2 \omega} = \frac{a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} \cos \omega'}{\sin^2 \omega'}, \\ \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2 \omega} = \frac{a'_{11} a'_{22} - a'_{12}^2}{\sin^2 \omega'}. \end{cases}$$

Wenn man also bei der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung eines Kegelschnitts von irgend einem Paar von Durchmessern als Koordinatenachsen zu einem anderen Paare übergeht, so sind die Ausdrücke

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega}{\sin^2 \omega} \quad \text{und} \quad \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2 \omega}$$

unveränderlich.\*)

Unter der Voraussetzung  $a_{12} = 0$ ,  $a'_{12} = 0$  ist die Mittelpunktsgleichung des Kegelschnitts auf ein Paar konjugierter Durchmesser als Koordinatenachsen bezogen (vgl. S. 300). Man hat daher den Satz: Zwischen den auf verschiedene Paare konjugierter Durchmesser als Koordinatenachsen bezogenen Formen der Gleichung eines Kegelschnittes besteht die Beziehung

$$(14) \quad \frac{a_{11} + a_{22}}{a'_{11} + a'_{22}} = \frac{a_{11} a_{22}}{a'_{11} a'_{22}} = \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \omega'}.$$

Hieraus folgt unmittelbar: Je nachdem  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben, weisen auch  $a'_{11}$ ,  $a'_{22}$  das nämliche oder verschiedene Vorzeichen auf.<sup>44)</sup> (Vgl. Nr. 170 und B. 1 daselbst.)

**155. Normalgleichungen der Kegelschnitte mit Mittelpunkt im Endlichen.** Die Gleichung eines Kegelschnittes mit einem im Koordinatenanfang gelegenen Mittelpunkt:

$$(15) \quad a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0$$

stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar (Nr. 142), je nachdem  $a_{11} a_{22} > 0$  oder  $a_{11} a_{22} < 0$  ist; insbesondere ist die Ellipse imaginär (Nr. 142), wenn  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  dasselbe Vorzeichen

\*) Die geometrische Deutung dieser Konstanten folgt in Nr. 170. Später werden wir für die Zähler der Ausdrücke auch die Bezeichnung Invarianten kennen lernen. Als dritte Konstante wäre hinzuzufügen  $A : \sin^2 \omega$ .



haben. Die Abschnitte der Kurve in den Koordinatenachsen, d.h. die in denselben gemessenen konjugierten Halbmesser sind

$$x = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{11}}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}.$$

Unter der Voraussetzung  $a_{11} a_{22} a_{33} \neq 0$  zerfällt der Kegelschnitt nicht, und man kann nunmehr  $a_{33} = -1$  annehmen. Alsdann entsteht eine reelle Ellipse, falls  $a_{11}$  und  $a_{22}$  positive Werte haben. Ihre Abschnitte in den Koordinatenachsen sind reell, und man pflegt den größeren mit  $a$ , den kleineren mit  $b$  zu bezeichnen, als  $x$ -Achse aber den größeren Durchmesser zu wählen. So entsteht durch die Substitution  $1:a_{11} = a^2$ ,  $1:a_{22} = b^2$  die Normalgleichung der reellen Ellipse

$$(16) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von (16) nur durch das Vorzeichen eines Koeffizienten, und zwar nimmt man gewöhnlich  $a_{22}$  negativ an und setzt  $1:a_{22} = -b^2$ . Man wählt also als  $x$ -Achse diejenige, auf der die Hyperbel die reellen Abschnitte  $\pm a$  bildet. Nun kann der konjugierte Durchmesser die Hyperbel nicht auch reell schneiden, das Quadrat seines Halbmessers ist negativ, gleich  $-b^2$ . Über das Größenverhältnis von  $a$  und  $b$  kann man dann keine Voraussetzung mehr machen. Somit ist die Normalgleichung der Hyperbel

$$(17) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Endlich ergibt sich bei negativem  $a_{11}$  und  $a_{22}$  oder  $-a^2$  und  $-b^2$  als den Quadraten konjugierter Halbmesser die Normalgleichung des imaginären Kegelschnittes

$$(18) \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jedoch beschäftigen wir uns in diesen Kapiteln wesentlich mit den reellen Kegelschnitten. (Vgl. nur Nr. 162 und Nr. 167 B. 4, 6.)

Die Gleichungsformen (16) bis (18) gelten, sobald die Koordinaten rechtwinklig sind, auch als die normalen Achsengleichungen der Kegelschnitte mit Mittelpunkt im Endlichen.

**156. Normale Polargleichungen.** Setzen wir in die Gleichung  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$  ein  $a_{33} = -1$ ,  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ , so entsteht die Polargleichung

$$(19) \quad \frac{1}{r^2} = a_{11} \cos^2 \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta.$$

Sie läßt die Symmetrie der Kurve darin erkennen, daß sie denselben positiven Wert des Vektors zu je vier Winkeln  $\pm \vartheta$ ,  $\pi \pm \vartheta$  liefert. Man pflegt dann die unter der Voraussetzung  $a_{11} < a_{22}$ ,  $1:a_{11} = a^2$  stets positiven Größen

$$(20) \quad \frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{22}} = c^2, \quad a_{11}c^2 = e^2$$

einzuführen und  $e$  die *Exzentrizität der Kurve* zu nennen.\*)

Demnach ergeben sich aus den Gleichungen

$$(21) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2}, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2}$$

die Exzentrizitäten als  $e = \frac{c}{a}$  mit den Abkürzungen

$c^2 = a^2 - b^2$  für die Ellipse,  $c^2 = a^2 + b^2$  für die Hyperbel.

*Daher ist die Exzentrizität  $e$  der Ellipse kleiner, die der Hyperbel größer als Eins.*

Die Polargleichung der Ellipse läßt sich in einer der äquivalenten Formen schreiben:

$$(22) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + c^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \vartheta}$$

und in der zumeist gebrauchten *normalen* Form:

$$(23) \quad r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}, \quad \left( e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right).$$

Ebenso erscheint die *Polargleichung der Hyperbel* als:

$$(24) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \vartheta - a^2}$$

und als *normale* Form:

$$(25) \quad r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}, \quad \left( e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \right).$$

Diese Polargleichungen der beiden Gattungen unterscheiden sich wieder nur im Vorzeichen von  $b^2$ .

\*) Man hat zuweilen auch die beiden Größen  $c$  und  $e$  mit den Namen der Exzentrizität bezeichnet, und  $c$  von  $e$  als die *lineare* von der *numerischen Exzentrizität* unterschieden.

**157. Gestalt der Ellipse.** Infolge der Symmetrie der Kegelschnitte mit Mittelpunkt im Endlichen genügt es, das in einem Quadranten des Achsenkreuzes verlaufende Kurvenstück zu betrachten. Die normale Polargleichung  $b^2:r^2 = 1 - e^2 \cos^2 \vartheta$  zeigt, daß  $\vartheta = 0$  den größten,  $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$  den kleinsten Wert des Vektors  $r$  liefert, und zwar gleich  $a$ , bez.  $b$ . Den größten Durchmesser  $2a$  nennt man die *große Achse oder Hauptachse*, den kleinsten  $2b$  die *kleine Achse oder Nebenachse*,  $a$  und  $b$  die *Halbachsen*, ihre Endpunkte die *Scheitel* der Ellipse.

Alle Halbmesser (Vektoren  $r$ ) der Ellipse\*) sind reell, denn, da die Exzentrizität  $e$  kleiner als Eins ist, so ist  $1 - e^2 \cos^2 \vartheta > 0$ . Offenbar nimmt  $r$  stetig ab, wenn  $\vartheta$  von 0 an wächst, d. h. jeder Halbmesser ist um so länger,

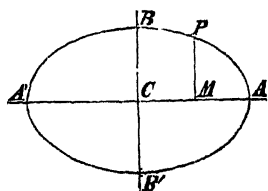


Fig. 78.

je weniger seine Richtung von der großen Achse abweicht. Die Tangenten in den Scheiteln einer Achse sind zu ihr rechtwinklig, denn sie sind parallel zur konjugierten Achse. Daher ist die Ellipse eine gegen den Mittelpunkt hin *konkave* Kurve von dem in Fig. 78

dargestellten Typus, deren einzelne Punkte nach der Methode von Nr. 24 aufgetragen werden können.

Das endliche Gebiet der Ebene, das den Mittelpunkt enthält, heißt *das Innere der Ellipse*. Setzt man die Koordinaten eines inneren Punktes in die linke Seite der auf Null gebrachten Normalgleichung ein, so erhält sie einen *negativen* Wert, insbesondere für den Mittelpunkt  $0|0$  den Wert  $-1$ . Eine reelle Tangente der Ellipse enthält nur äußere Punkte (Nr. 150).

Die Achsen halbieren die Winkel zwischen gleichlangen Durchmessern, und umgekehrt (Nr. 156). Daher können wir sie bestimmen, wenn der Mittelpunkt des Kegelschnittes gegeben ist und wir ihn mit einem konzentrischen Kreis schneiden, um in den Durchmessern der Schnittpunkte solche von gleicher Länge zu erhalten.

\*) Im gegenwärtigen Kapitel werden nur Durchmesser in reellen Geraden betrachtet.



messer  $OL$  liegen, je eine Parallele zu der Achse  $A'A$  bez.  $B'B$ , die der Durchmesser des anderen Kreises ist: die Schnittpunkte  $P$  dieser Parallelen sind Punkte der Ellipse.

159. **Parametergleichungen der Ellipse.** Die einfache Ableitung der Ellipse aus dem Kreis ist sachgemäß, weil *der Kreis nur die besondere Ellipse mit gleichen Achsen ist*. Die Normalgleichung der Ellipse geht ja mit  $a = b = \rho$  in die des Kreises über.

Analytisch ist dieser Zusammenhang dadurch ausgedrückt, daß, wenn ein Punkt  $x|y'$  den Kreis  $x^2 + y'^2 = a^2$  durchläuft, der Punkt  $x|y$  die Ellipse  $x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$  beschreibt, falls stets  $y':y = a:b$  ist. Nun können wir die Koordinaten  $x|y'$  eines Punktes des Kreises  $a$  nach Nr. 107 durch *einen Parameter*  $\varphi$  darstellen als  $x = a \cos \varphi$ ,  $y' = a \sin \varphi$ . Daher sind nun auch die Koordinaten  $x|y$  eines Punktes der Ellipse durch die *eine* unabhängige Veränderliche  $\varphi$  auszudrücken als

$$(27) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = \frac{b}{a} \cdot a \sin \varphi = b \sin \varphi.$$

In der Tat überzeugen wir uns sofort davon, daß durch diese Substitution die Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

identisch erfüllt wird.<sup>45)</sup> Der Parameter  $\varphi$  wird als *excentrische Anomalie* bezeichnet.

Auch aus Fig. 80 folgen für die Koordinaten des Punktes  $P$  der Ellipse die Werte  $x = OM = OL \cos \varphi = a \cos \varphi$ ,  $y = MP = RK = b \sin \varphi$ . In Fig. 79 ist  $\sphericalangle ACQ = \varphi$ . Anwendungen in Nr. 169, 194, 229.

160. **Ellipsenzirkel.** Wird durch  $P$  eine Parallele  $NMP$  zum Radius  $CQ = a$  gelegt (Fig. 79), so ist  $NP = a$  und  $MP:CQ = LP:LQ = b:a$ , daher  $MP = b$ . Wenn also von irgend einem Punkt der Ellipse eine Strecke  $PN = a$  bis zur kleinen Achse gezogen wird, so ist der durch die große Achse in ihr bestimmte Abschnitt  $PM = b$ . Wird die Ordinate  $PL$  bis zum Schnittpunkt  $Q'$  mit dem Kreis rückwärts verlängert,

so ergibt sich ebenso, daß in einer durch  $P$  zum Radius  $CQ'$  gezogenen Parallelen von den Achsen Teile von konstanter Länge abgeschnitten werden.

Wenn sich daher umgekehrt eine Gerade  $MN$  von konstanter Länge so bewegt, daß ihre Endpunkte die Schenkel eines rechten Winkels durchlaufen, und ein Punkt  $P$  in ihr oder auf ihrer Verlängerung fest angenommen ist, so beschreibt  $P$  eine Ellipse, deren Achsen  $a, b$  gleich  $NP, MP$  sind. Wirklich ist

$$CM = MN \frac{a}{\alpha}, CN = MN \frac{y}{b}, \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2, \text{ also } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Nach diesem Prinzip sind Instrumente zur Erzeugung der Ellipsen durch eine kontinuierliche Bewegung, sogenannte *Ellipsenzirkel*, konstruiert worden.  $CA, CD'$  sind zwei feste Lineale,  $MN$  ein drittes Lineal, von dem zwei Punkte  $M$  und  $N$  in den Geraden  $CA, CD'$  gleiten; alsdann beschreibt ein in einem beliebigen Punkt von  $MN$  befestigter Stift eine Ellipse; wird der Stift aber im Mittelpunkt von  $MN$  befestigt, so beschreibt er einen Kreis.<sup>46)</sup>

161. **Gestalt der Hyperbel.** Wir untersuchen den Verlauf der durch die Polargleichung  $r^2 = b^2 : (e^2 \cos^2 \vartheta - 1)$  (vgl. (25), S. 317) definierten Kurve innerhalb des ersten Quadranten. Der kleinste Wert, den  $r$  annehmen kann, gehört zu  $\vartheta = 0$ , er ist  $r = \pm a$ ; mit wachsendem  $\vartheta$  wächst auch  $r$ , bis  $r$  unendlich groß wird, was für  $\cos \vartheta_0 = a : +\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sin \vartheta_0 = b : +\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{tg} \vartheta_0 = b : a$  eintritt. Läßt man  $\vartheta$  weiter zunehmen, so wird  $r^2$  negativ, also  $r$  imaginär; insbesondere gehört zu  $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$  der Wert  $r = bi$ . In dem Intervall  $\vartheta_0 < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$  des ersten Quadranten schneiden die Durchmesser die Kurven nicht mehr. Der Quadrant der Hyperbel verläuft daher vom Scheitel  $A$

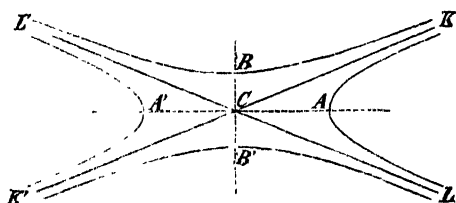


Fig. 81.

aus (Fig. 81) zum Mittelpunkt stets *konvex*, gegen einen bestimmten Punkt  $K$  im Unendlichen, sich der Asymptote  $CK$

stetig nähernd (Nr. 164). Der ganze reelle Zug der Hyperbel wird daher von den durch  $A$  und  $A'$  gehenden, im Endlichen getrennten *Zweigen* der Kurve gebildet.

Man nennt  $2a$  die reelle oder transversale Achse oder die *Hauptachse*,  $2bi$  die imaginäre oder *Nebenachse*. Die Hyperbel hat nur zwei auf der Hauptachse liegende reelle Scheitel, deren Tangenten zu dieser Achse rechtwinklig sind.

Die Hyperbel trennt zwei unendlich große Gebiete der Ebene, die im Endlichen als drei Gebiete erscheinen. Der Mittelpunkt liegt in dem Gebiet der Ebene, das wir *das Äußere der Hyperbel* nennen müssen, weil von seinen Punkten aus an die Kurve reelle Tangenten gehen, nämlich aus dem Mittelpunkt selbst die Asymptoten. Die Ergebnisse der Substitution der Koordinaten äußerer Punkte in die *auf Null* gebrachte Normalgleichung (17), S. 316 sind negativ. Die beiden im Endlichen getrennten, konkav begrenzten Gebiete bilden somit das Innere der Hyperbel; sie hängen im Unendlichen als *ein* Gebiet zusammen. Denn da wir uns bei unbegrenzter Bewegung auf einer Geraden in beiderlei Sinn demselben unendlich fernen Punkt nähern, gehört der unendlich ferne Punkt eines jeden reell schneidenden Durchmessers den beiden Teilen des Innern zugleich an. Wegen der Symmetrie folgen wiederum aus zwei gleich langen Durchmessern der Hyperbel die Achsen als Winkelhalbierende. Der mit dem Radius  $a$  aus dem Mittelpunkt beschriebene Kreis geht durch die reellen Scheitel und heißt der *Scheitelskreis*.

162. *Konjugierte Hyperbeln*. Offenbar trennen die Asymptoten die Durchmesser, die die Hyperbel in reellen Punkten treffen, von denen, die sie in imaginären Punkten schneiden. Für alle Vektoren, die in den die Nebenachse enthaltenden Scheitelwinkeln der Asymptoten liegen, ergibt die Gleichung negative Zahlen  $r^2 = -r'^2$  als Halbmesserquadrate. Man kann die reellen Längen  $\pm r'$  dadurch geometrisch darstellen, daß man sie in demselben Durchmesser abträgt, zu dem die Vektoren  $\pm r'$  gehören.

Die Gleichung des Ortes der Endpunkte der so abgetragenen Längen wird gefunden, indem man in der Hyperbelgleichung

das Vorzeichen von  $r^2$  umkehrt oder  $r^2$  durch  $-r'^2$  ersetzt:

$$(28) \quad \frac{1}{r'^2} = \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} - \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Dies ist wiederum eine Hyperbel, die die Hauptachse  $2b$  in der  $y$ -Achse, die Nebenachse  $2ai$  in der  $x$ -Achse und dieselben Asymptoten wie die ursprüngliche hat; dies letzte, weil  $r$  und  $r'$  offenbar für dieselben Werte  $\vartheta$  unendlich groß werden. Diese durch die Punkte  $B, B'$  (Fig. 81) gehende Kurve heißt die zur gegebenen *konjugierte Hyperbel*.

Die beiden von denselben Konstanten  $a, b$  abhängigen Hyperbeln stehen in enger Beziehung zueinander, ebenso wie die reelle Ellipse zu der imaginären mit den entgegengesetzt gleichen Halbachsenquadraten in Nr. 155. (Vgl. auch Nr. 167,4.) Wenn wir die bei der reellen Vertretung des imaginären Kreises eingeführte Redeweise anwenden, so haben wir den reellen Zug der einen Kurve als den *Stellvertreter* des imaginären der anderen zu bezeichnen. Daher werden sich wieder Konstruktionen, die an der gegebenen Hyperbel nicht ausführbar sind, an der konjugierten reell vollziehen lassen.

Genau in demselben Sinn kann man die reelle Ellipse von den Achsen  $2a, 2b$  als Stellvertreter der imaginären von den Achsen  $2ai, 2bi$  und demselben Mittelpunkt behandeln und von konjugierten Ellipsen in diesem Sinne sprechen. (Nr. 167,4.)

Man pflegt geradezu die reellen Bezeichnungen, die sich auf die konjugierte Hyperbel beziehen, auch für die gegebene zu benutzen. Statt die reelle Zahl  $r'$  als reellen Faktor des imaginären Halbmessers  $r'i$  oder als einen Halbmesser der konjugierten Hyperbel zu bezeichnen, erlaubt man sich die Abkürzung,  $r'$  (statt  $r'i$ ) *Halbmesser*,  $b$  (statt  $bi$ ) *Halbachse*,  $2b$  die *Nebenachse der gegebenen Hyperbel* zu nennen. Es ist dies zulässig, solange nur solche reelle und imaginäre *Längen* miteinander verglichen werden.

Sobald jedoch Quadrate von Längen auftreten, sind  $-r'^2$  und  $-b^2$  als die Quadrate von  $r'$  und  $b$  einzuführen. Mit diesen Festsetzungen sind auch alle für die Ellipse gültigen Sätze auf die Hyperbel übertragbar, indem man nur  $b^2$  durch  $-b^2$  er-



setzt, überhaupt die Quadrate von Nebenhalbmessern als negativ behandelt.

163. **Asymptoten.** Neu treten bei der Hyperbel, verglichen mit der Ellipse, Eigenschaften auf, die sich auf die Asymptoten beziehen. Da diese Tangenten aus dem Mittelpunkt zu den Achsen symmetrisch liegen, sind sie durch Angabe ihres Winkels bestimmt, falls man als *Asymptotenwinkel*  $2\vartheta_0$  diejenigen Scheitelwinkel bezeichnet, in deren Feldern die reellen Zweige der Hyperbel verlaufen.

Der Winkel  $2\vartheta_0$  ist durch die Exzentrizität der Hyperbel mit definiert (Nr. 161); *er ist das Doppelte des Winkels  $\vartheta_0$ , dessen Sekante der Exzentrizität  $e$  gleich ist:*

$$(29) \quad \cos \vartheta_0 = \frac{1}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \vartheta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{b}{a}.$$

Das Verhältnis der Nebenachse zur Hauptachse ist die Tangente des halben Asymptotenwinkels. Je nachdem die Nebenachse kleiner oder größer als die Hauptachse ist, unterscheidet man *spitz- und stumpfwinklige Hyperbeln*.

Dies erlaubt, zu gegebenen Achsen die Asymptoten zu konstruieren. Ziehen wir durch die Punkte  $A, A'$  und  $B, B'$  die Parallelen zu den Achsen, so sind die *Asymptoten die Diagonalen des so gebildeten Rechtecks der Scheiteltangenten der konjugierten Hyperbeln*. Daher haben konjugierte Hyperbeln dieselben Asymptoten, aber supplementäre Asymptotenwinkel.

Demnach sind die Gleichungen der Asymptoten

$$(30) \quad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Diese letzte Gleichungsform wird aber auch nach Nr. 155 erhalten, indem man die quadratischen Glieder der Normalgleichung gleich Null setzt, ganz unabhängig davon, ob die Gleichung auf die Achsen oder ein anderes Paar konjugierter Durchmesser  $a, b$  bezogen sei. Auch sind immer  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  die Gleichungen der Diagonalen des von  $x = \pm a, y = \pm b$  gebildeten Parallelogramms.

Zieht man also durch die Endpunkte von irgend zwei konjugierten Durchmessern  $AA', BB'$  die Parallelen zu ihnen, so

liegen die Ecken  $T, T'$  des entstehenden Parallelogramms auf den Asymptoten (Fig. 82). Dabei sind nach Nr. 139 die Durchmesserparallelen in den Enden des konjugierten Durchmessers Tangenten der Hyperbel (in  $A, A'$ ), beziehungsweise an die konjugierte Hyperbel (in  $B, B'$ ) nach den vorigen Festsetzungen. Somit kann man die Asymptoten finden, sobald zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel gegeben sind.

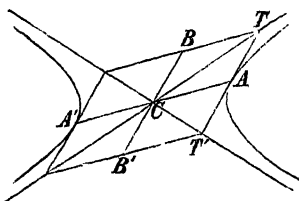


Fig. 82.

164. **Asymptotengleichung der Hyperbel.** Es liegt nahe, die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen zu beziehen, denn sie muß eine außerordentlich einfache Gestalt annehmen. In der Tat ist sie von der Form der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (38), S. 288, aber aus ihr müssen die Koeffizienten  $a_{11}, a_{22}$  verschwinden, weil die Koordinatenachsen die Kurve in unendlicher Entfernung schneiden. Also reduziert sie sich auf

$$(31) \quad xy = k^2.$$

Die Transformation der Achsengleichung bestätigt dies und liefert die Abhängigkeit der Konstanten  $k^2$  von den Achsen. Der Übergang von rechtwinkligen Achsen  $x, y$  zu solchen Achsen  $x', y'$ , die mit der  $x$ -Achse die Winkel  $\pm \vartheta_0$  machen, ergibt sich, direkt oder nach Nr. 12, aus

$$x = (x' + y') \cos \vartheta_0, \quad y = (y' - x') \sin \vartheta_0.$$

Aber die transformierte Gleichung

$$\left(\frac{x' + y'}{a}\right)^2 \cos^2 \vartheta_0 - \left(\frac{y' - x'}{b}\right)^2 \sin^2 \vartheta_0 = 1$$

reduziert sich infolge der Werte von  $\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0$  (S. 324) auf

$$(32) \quad x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Umgekehrt hat die Hyperbel  $xy = k^2$  bei einem Asymptotenwinkel  $2\vartheta_0$ , infolge  $a^2 + b^2 = 4k^2$  und  $b = a \operatorname{tg} \vartheta_0$ , die Halbachsen  $2k \cos \vartheta_0, 2k \sin \vartheta_0$ .

Die geometrische Bedeutung der Asymptotengleichung ist offenbar: *Zieht man durch einen Punkt der Hyperbel Paral-*

leben zu den Asymptoten, so ist der Inhalt des so gebildeten Parallelogramms konstant. Hiernach kann man Punkte der Hyperbel konstruieren, indem man als Koordinaten Strecken von konstantem Produkt aufträgt.

Je größer die eine Koordinate genommen wird, desto kleiner wird die andere; nimmt man also jene hinreichend groß, so wird diese kleiner als jede noch so kleine gegebene Größe. Dies ist der Sinn des Ausdruckes: *Die Hyperbel nähert sich den Asymptoten als Grenzen im Unendlichen.*

165. **Gleichseitige Hyperbel.** Die Asymptoten einer Hyperbel können jeden beliebigen Winkel einschließen, insbesondere auch zueinander rechtwinklig sein. Dann ist aber (Nr. 163)

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = + \frac{b}{a} = + 1, \quad \text{also } b = a,$$

die beiden Achsen sind gleich. Umgekehrt folgt aus  $a = b$ , daß sich die Asymptoten rechtwinklig schneiden. Man nennt eine solche besondere Hyperbel eine *gleichseitige oder rechtwinklige Hyperbel*. Ihre auf die Achsen bezogene Gleichung ist

$$(33) \quad x^2 - y^2 = a^2$$

mit  $x^2 - y^2 = 0$  (vgl. Nr. 58) als Asymptoten.

Die Bedingung, daß die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel darstelle, lautet

$$(34) \quad a_{11} + a_{22} = 0^*),$$

denn nach Nr. 58 ist dies die Bedingung, unter der die Asymptoten  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$  zueinander rechtwinklig sind. *Konjugierte Durchmesser einer „gleichseitigen“ Hyperbel sind gleich.* (Vgl. Nr. 162.) Ist nämlich  $a_{11} = -a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$ , so gehören nach S. 300 konjugierte Durchmesser zu Neigungswinkeln  $\alpha, \alpha'$  für die  $\operatorname{tg} \alpha = \cot \alpha'$  ist; also werden die Winkel  $\alpha' - \alpha$  zwischen konjugierten Durchmessern durch die Asymptoten halbiert. Die zu einer gleichseitigen Hyperbel konjugierte ist aber mit ihr kongruent\*\*), daher sind die bezüglich der Asymptoten symmetrischen Durchmesser gleich lang.

\*) Bei schiefwinkligen Koordinaten  $a_{11} + a_{22} = 2a_{12} \cos \omega$ .

\*\*) Ihre Asymptotengleichungen lauten  $xy = \pm \frac{1}{2}a^2$ . Man konstruiert sie daher als die Orte der freien Ecke flächengleicher Rechtecke, von denen die Gegenecke und eine Seitenrichtung gegeben ist.

Die gleichseitige Hyperbel hat dieselbe Analogie zum Kreise, wie die allgemeine Hyperbel zur Ellipse. Die beiden besonderen Kurven können aus ihren Gleichungen  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$  mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke konstruiert werden. Man verwendet bei dieser Konstruktion mit Vorteil den Scheitelkreis (S. 322), auf Grund des aus  $x^2 - y^2 = a^2$  leicht folgenden Satzes: Die Kreistangente und die Hyperbelordinate ( $y$ ), die von einem Punkt der Hauptachse ausgehen, sind gleich lang. Ebenso: Die von einem Punkt der Nebenachse ausgehende Hyperbelordinate ( $x$ ) ist gleich seinem Abstand von den Scheiteln.<sup>47)</sup> Man kann auch in der durch Fig. 83 verständlichen Weise die Scheiteltangenten benutzen.

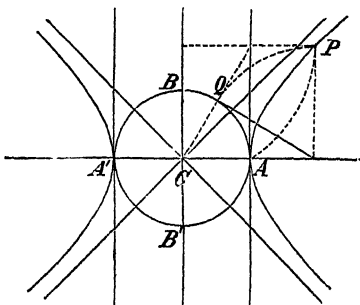


Fig. 83.

B. 1) Die gleichseitige Hyperbel ist der Ort der Endpunkte der zur Achse senkrechten Durchmesser in den Kreisen eines Büschels. (Vgl. Nr. 120.)

2) Eine gleichseitige Hyperbel, die durch drei gegebene Punkte geht, enthält auch den Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks.<sup>48)</sup>

Eine Gleichung, in der  $a_{22} = -a_{11}$  ist, reduziert sich für  $y=0$  auf  $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ , und für  $x=0$  auf  $-a_{11}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ . Die gleichseitige Hyperbel bestimmt also Achsenabschnitte  $x'$ ,  $x''$ ;  $y'$ ,  $y''$ , mit  $x'x'' = -y'y'' = a_{33} : a_{11}$ . Gemäß Nr. 41, 7 ist aber  $0|y''$  der Höhenschnittpunkt im Dreieck  $x'|0$ ,  $x''|0$ ,  $0|y'$ . Die vier Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einem rechtwinkligen Geradenpaar bilden vier Dreiecke mit dem vierten Punkt als Höhenschnittpunkt.

3) Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umschriebene Kreis durch den Mittelpunkt der Kurve.<sup>49)</sup>

Wenn die Beziehung Nr. 137, B. besteht, ist die Gleichung des Kreises durch die Pole der Achsen und den Koordinatenanfang:

$$a_{12}(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + a_{23}x + a_{13}y = 0, \quad \text{oder}$$

$$x(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) + y(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega)xy = 0,$$

eine Gleichung, der offenbar durch die Koordinaten des Mittelpunktes genügt wird, vorausgesetzt, daß  $a_{11} + a_{22} = 2a_{12} \cos \omega$ , d. h. die Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist.

4) Ein durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei beliebige Punkte beschriebener Kreis geht auch durch den Schnittpunkt der Geraden, die durch jeden dieser Punkte parallel zur Polare des anderen gezogen werden.

**166. Parametergleichungen und Konstruktion der Hyperbel.** Die allgemeine Hyperbel geht aus der gleichseitigen durch dieselbe Substitution hervor, wie in Nr. 158 und 159 die Ellipse aus dem Kreis. Sind die Achsen  $2a$ ,  $2b$  der Hyperbel gegeben, so zeichne man einen Kreis vom Radius  $a$  und eine Parallele zur Nebenachse im Abstand  $b$ . Dann schneidet ein

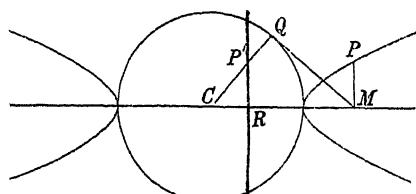


Fig. 84.

Radius  $CQ$  auf dieser ein Stück  $RP'$  ab, das so groß wie die Ordinate  $MP$  desjenigen Hyperbelpunktes ist, dessen Abszisse  $CM$  von der Kreistangente in  $Q$  abgeschnitten wird

(Fig. 84). Für die gleichseitige Hyperbel ist jene Hilfssparallele eine Scheiteltangente.

Somit hängt die Bewegung eines Punktes  $P$  in der Hyperbel von der Drehung eines Radius  $CQ$  im Scheiteltkreis ab, d. h. von dessen Neigungswinkel  $MCQ = \varphi$  als einem Parameter. In der Tat ergeben sich unmittelbar aus der Figur die *Parametergleichungen der Hyperbel* als

$$(35) \quad x = a \sec \varphi = a : \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Auf diese wird man auch geführt, wenn man für  $x:a$  und  $y:b$  trigonometrische Funktionen eines Winkels sucht, die die Hyperbelgleichung identisch erfüllen

$$1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sec^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Die konjugierte Hyperbel wird gleichzeitig durch

$$(36) \quad x = a \cot \varphi, \quad y = b \operatorname{cosec} \varphi = b : \sin \varphi$$

gegeben und wird ebenso aus ihrer Hauptachse und ihrem Scheiteltkreis konstruiert.

Eine andere Parameterdarstellung ergibt die auf die Asymptoten bezogene Gleichung von Nr. 164  $xy = k^2$ , nämlich

$$(37) \quad x = k\lambda, \quad y = k:\lambda.$$

Anwendungen findet man in Nr. 169 und 194.

167. **Polaren und Tangenten.** Um Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel zu untersuchen, übertragen wir einige der für die allgemeine Gleichung im VIII. Kapitel erhaltenen Ergebnisse auf die Normalgleichungen

$$(38) \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Wenn wir das Vorzeichen von  $b^2$  unbestimmt lassen, bezieht sich das obere stets auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel. Die *Halbachsen* seien  $a$  und  $b$ , *konjugierte Halbmesser* im allgemeinen  $a'$  und  $b'$  (akzentuiert), so daß sich das erste Gleichungspaar auf rechtwinklige, das zweite auf schiefwinklige Koordinaten bezieht.

Die Gleichung der Tangente im Punkt  $x'|y'$  ist nach S. 276

$$(39) \quad \frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1, \quad \frac{x'x}{a'^2} \pm \frac{y'y}{b'^2} = 1.$$

Ist  $x'|y'$  überhaupt ein *beliebiger* Punkt, so stellt die nämliche Gleichung die *Polare dieses Punktes* dar, d. h. die Berührungssehne der von  $x'|y'$  ausgehenden Tangenten oder den Ort der durch die Kurve von  $x'|y'$  harmonisch getrennten Pole (Nr. 135). Die Gleichung entsteht aus der Kurvengleichung durch Einsetzen von  $x'x$ ,  $y'y$  statt  $x^2$ ,  $y^2$ .

Für die Länge  $p$  des vom Mittelpunkt auf die Polare des Punktes  $x'|y'$  gefällten Lotes hat man also nach Nr. 35

$$(40) \quad p^2 = \frac{a^4 b^4}{b^4 x'^2 + a^4 y'^2} \quad \text{oder man hat} \quad \frac{1}{p^2} = \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}.$$

Insbesondere ist die Polare eines Punktes  $x'|0$  eines Durchmessers durch  $x'x = a'^2$  gegeben, also zum konjugierten Durchmesser parallel, ebenso wie die Tangenten in den Endpunkten des ersten (S. 286f.). Um daher die Polare eines Punktes  $P$  zu finden, verbinden wir  $P$  mit dem Mittelpunkt  $O$  des Kegelschnitts, bestimmen alsdann den Punkt  $P'$  auf der Geraden  $CP$  so, daß das Rechteck  $CP \cdot CP'$  dem Quadrate dieses Halbmessers gleich ist, und ziehen durch  $P'$  eine Parallele zu dem ihm konjugierten Durchmesser (S. 219).

Umgekehrt finden wir zu einer gegebenen Geraden  $ux + vy + 1 = 0$  den Pol  $x'|y'$ , indem wir die Gleichung mit der einer Polare (39) vergleichen, als

$$(41) \quad x' = -a^2 u, \quad y' = \mp b^2 v \quad \text{bez.} \quad x' = -a'^2 u, \quad y' = \mp b'^2 v.$$

Wenn  $x'|y'$  der Kurve selbst angehört, so wird sie von der Geraden in diesem Punkte berührt. Daher ist die Bedingung, daß eine Gerade  $u|v$  Tangente des Kegelschnittes sei:

$$(42) \quad a^2 u^2 \pm b^2 v^2 = 1, \quad a'^2 u^2 \pm b'^2 v^2 = 1.$$

Dies ist somit die *Tangentialgleichung der Ellipse bez. Hyperbel*, wobei man bemerkt, daß dieselbe ebenfalls in der rein quadratischen einfachen Gestalt erscheint. (Vgl. S. 306.)

**B. 1) Normalform für die Gleichung der Tangente.** Um  $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$  auf die Normalform  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  zu bringen, haben wir zu setzen  $\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}$ ,  $\frac{y'}{b^2} = \pm \frac{\sin \alpha}{p}$  und erhalten mit Hilfe der Gleichung der Kurve für den Abstand  $p$  der Tangente vom Mittelpunkt  $p = +\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha}$ . Daher lautet die verlangte Gleichungsform

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha} = 0,$$

oder

$$x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - \sqrt{a'^2 \cos^2 \alpha \pm b'^2 \cos^2 (\omega - \alpha)} = 0,$$

wenn  $\omega$  der Winkel zwischen zwei beliebigen konjugierten Durchmesser ist.

2) *Gleichung des Tangentenpaares aus  $x'|y'$  an den Kegelschnitt.* Nach S. 302 findet man

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

Hieraus folgt die Gleichung paralleler Tangenten der Richtung  $m$  als

$$(mx - y)^2 = m^2 a^2 \pm b^2.$$

3) *Winkel  $\varphi$  des Tangentenpaares aus  $x'|y'$ .*

Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei Geraden darstellt, so bezeichnen die gleich Null gesetzten drei quadratischen Glieder zwei zu ihnen parallele Linien durch den Anfangspunkt: also hängt der durch das Geradenpaar eingeschlossene Winkel nur von den drei höchsten Gliedern der allgemeinen Gleichung ab. Ordnen wir also die Gleichung des Tangentenpaares in 2), so finden wir nach Nr. 58:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{2ab \sqrt{\pm \left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}}{x'^2 + y'^2 - a^2 \mp b^2},$$

wobei unter der Wurzel und im Nenner bei  $\mp b^2$  entweder alle oberen oder alle unteren Vorzeichen zusammengehören.

4) Die Polaren desselben Punktes in bezug auf zwei konjugierte Kegelschnitte (Nr. 155 und 162) sind zueinander parallel und gleich entfernt vom gemeinsamen Mittelpunkt. Die Pole derselben Geraden für solche Kegelschnitte liegen im nämlichen Durchmesser symmetrisch zum Mittelpunkt.

5) Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist zu ihr parallel. Die Pole aller Asymptotenparallelen liegen auf der Asymptote.

6) *Der Ort des Schnittpunktes zueinander rechtwinkliger Tangenten ist der Hauptkreis der Kurve*

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2.$$

Wir haben in 3) nur den Nenner des für  $\operatorname{tg} \varphi$  gefundenen Wertes gleich Null zu setzen, oder wir berechnen die Entfernung des Schnittpunktes  $x|y$  vom Mittelpunkt nach 1) aus dessen Abständen  $p_1, p_2$  von zwei zueinander rechtwinkligen Tangenten:

$$x^2 + y^2 = p_1^2 + p_2^2 = (a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha) + (a^2 \sin^2 \alpha \pm b^2 \cos^2 \alpha) = a^2 \pm b^2.$$

Statt des Ausdrucks „Hauptkreis“ ist auch, vom englischen director circle stammend, der Name „Direktorkreis“ gebräuchlich.

Der *Hauptkreis* ist reell für Ellipsen und spitzwinklige Hyperbeln, rein imaginär dagegen für stumpfwinklige Hyperbeln ( $b > a$ ).

Sollen sich die Tangenten unter einem gegebenen schiefen Winkel  $\varphi$  schneiden, so ist der Ort ihres Schnittpunktes im allgemeinen eine gewisse Kurve vierter Ordnung (B. 3).

**168. Gleichungen konjugierter Durchmesser.** Die Gleichung desjenigen Durchmessers, der zu dem durch einen gegebenen Punkt  $P'(x'|y')$  der Kurve gehenden  $y'x - x'y = 0$  konjugiert ist, lautet

$$(43) \quad \frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 0, \quad \text{bez.} \quad \frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 0,$$

denn dieselbe stellt die durch den Nullpunkt gehende Parallele zur Tangente in  $P'$  dar. Wir erhalten die Koordinaten eines Endpunktes  $P''(x''|y'')$  dieses Durchmessers, indem wir die Gleichung nach  $x$  und  $y$  auflösen und die Werte in die Gleichung der Kurve einsetzen, wobei zu beachten ist, daß  $x'|y'$  dieser auch genügen. Man findet leicht für die Ellipse, bez. Hyperbel

$$\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \mp \frac{x'}{a}; \quad \text{bez.} \quad \frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}i, \quad \frac{y''}{b} = \pm \frac{x'}{a}i,$$

wo die Unterdrückung des Faktors  $i$  bei den Hyperbelpunkten



die Schnittpunkte des konjugierten Durchmessers der ersten mit der konjugierten Hyperbel liefert. Genau dasselbe gilt, wenn wir die Kurvengleichung nicht auf die Achsen, sondern auf konjugierte Durchmesser  $a'$ ,  $b'$  beziehen.

Die Betrachtung der Vorzeichen von  $x'|y'$  und  $x''|y''$  lehrt: *Die Paare konjugierter Durchmesser der Ellipse trennen einander* (vgl. Nr. 157), d. h.  $P'$  und  $P''$  liegen auf verschiedenen Seiten einer Koordinatenachse. Und: *Die Paare konjugierter Durchmesser der Hyperbel trennen einander nicht*, d. h.  $P'$  und  $P''$  liegen im gleichen oder im entgegengesetzten Koordinatenfeld. Also liegen konjugierte Durchmesser der Ellipse auf verschiedenen, solche der Hyperbel auf denselben Seiten der Kurvenachsen.

Dies erkennt man auch durch Einführung der Winkel  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ , die zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptachse bilden. Für sie ist nach S. 300

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y'}{x'}, \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{y''}{x''} = \mp \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \mp \frac{b^2}{a^2} \cot \alpha',$$

wobei die oberen Vorzeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel gelten. Ferner erkennt man, daß es auch Durchmesser gibt, mit denen ihre konjugierten zusammenfallen, nämlich für  $\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 = \mp b^2 : a^2$ . Somit (vgl. (29) in Nr. 163) sind die Asymptoten die zu sich selbst konjugierten Durchmesser. Ist  $\vartheta_0$  reell und  $\operatorname{tg} \alpha' < \operatorname{tg} \vartheta_0$ , so muß  $\operatorname{tg} \alpha'' > \operatorname{tg} \vartheta_0$  sein, also liegen konjugierte Durchmesser der Hyperbel auf verschiedenen Seiten jeder Asymptote; in der Tat können beide nicht gleichzeitig reell schneiden (Nr. 161).

Übrigens wurde schon früher (S. 305) gezeigt, daß die Paare konjugierter Durchmesser eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen aus den Asymptoten bestehen; je zwei konjugierte Durchmesser liegen daher harmonisch zu den Asymptoten. Für die Hyperbel wird daher Fig. 82 von Nr. 163 auf die harmonischen Eigenschaften des Parallelogramms zurückgeführt. So liefert jede Tangente des Kegelschnittes durch ihre Schnitte mit seinem Hauptkreis (Nr. 167, 6) zwei konjugierte Durchmesser als Diagonalen eines umgeschriebenen Rechtecks.

169. Die Konstruktion konjugierter Durchmesser ist nach den Proportionen

$$x'' : y' = -x' : y'' = \pm a : b \text{ bez. } \pm \frac{ai}{b}$$

leicht und stets auf reellem Wege ausführbar.

Eine andere Methode gründet sich darauf, daß die Aufgabe für die besonderen Kurven mit  $a=b$  in der einfachsten Form gelöst werden kann. Konjugierte Durchmesser des Kreises sind zueinander rechtwinklig; solche der gleichseitigen Hyperbel liegen in bezug auf die Halbierungslinien des Achsenwinkels symmetrisch: hier wie dort sind sie gleich lang (Nr. 165.) Diese Eigenschaften lassen sich nach Nr. 159 und Nr. 166 für die Ellipse und schiefe Hyperbel umformen.

Im Falle der *Ellipse* benutzen wir die Parametergleichungen (Nr. 159) und erhalten die den Durchmessern  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  entsprechenden Winkelparameter  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  aus  $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha'$ ,  $\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha''$ , so daß  $\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = -b^2 : a^2$  in die Orthogonalitätsbedingung  $\operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi'' = -1$  übergeht. Man konstruiert also (Fig. 85)  $CP'$  zu  $CP$  nach dem Satz: die Endpunkte  $P$ ,  $P'$  konjugierter Durchmesser der Ellipse bestimmen in den verlängerten Ordinaten  $MP$ ,  $M'P'$  auf dem umgeschriebenen Kreise Punkte  $Q$ ,  $Q'$ , deren Kreisdurchmesser  $CQ$ ,  $CQ'$  zueinander rechtwinklig sind, und umgekehrt.

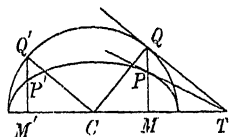


Fig. 85.

Im Falle der *Hyperbel* könnten wir ebenso (Nr. 166) statt ihrer Punkte  $P$ ,  $P'$  die Punkte  $Q$ ,  $Q'$  einführen, die in der gleichseitigen Hyperbel von derselben Hauptachse auf den Ordinaten  $MP$ ,  $M'P'$  liegen. Alsdann sind  $CP$ ,  $CP'$  konjugierte Durchmesser, wenn  $CQ$ ,  $CQ'$  mit den Achsen gleiche Winkel bilden. Aber hier bietet die harmonische Lage zu den Asymptoten ein besseres Mittel in der Form des Satzes von Nr. 163. Ist in der Figur daselbst  $CA$  gegeben, so findet man den Endpunkt des konjugierten Durchmessers  $CB$ , indem man bedenkt, daß  $AB$  zu  $CT'$  parallel und in  $CT$  halbiert ist.

Der Übergang von  $P$  zu  $Q$  oder die Substitution von  $x \left| \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \right. y$  statt  $x | y$  gibt auch das Mittel, die Tangente in einem

Punkt  $P$  des Kegelschnittes zu konstruieren. Denn jene Substitution verwandelt

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1 \text{ in } \frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{a^2} = 1;$$

die Tangente des Kreises bez. der gleichseitigen Hyperbel in  $Q$  und die des Kegelschnittes in  $P$  schneiden sich in einem Punkt  $T$  der Hauptachse  $y = 0$ . Soll man also die Ellipsentangente in  $P$  ziehen, so gibt man die Kreistangente in  $Q$  an und verbindet  $P$  mit ihrem Schnittpunkt  $T$  in der Hauptachse.

Die Vorteile der Parametermethode zeigen die Beispiele.

B. 1) Die Quadrate zweier konjugierten Halbmesser sind  $a'^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$ ,  $b'^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$ .

Hierbei hat der auf dem Kegelschnitt gelegene Endpunkt des einen Halbmessers die Koordinaten  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  (vgl. Nr. 159).

2) Die Sehne der Punkte mit den Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  einer Ellipse hat die Gleichung

$$\frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

und schneidet die zugehörige Sehne  $\alpha$ ,  $\beta$  des konzentrischen Kreises vom Radius  $a$  (Nr. 107) auf der Hauptachse.

Der Pol der Sehne ist

$$a \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \mid b \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Ebenso ist die Gleichung der Tangente in  $\varphi = \alpha$

$$\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha = 1.$$

3) Die Länge  $l$  der Sehne  $\alpha$ ,  $\beta$  ist zu bestimmen.

$$l = \sqrt{a^2 (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + b^2 (\sin \alpha - \sin \beta)^2},$$

$$l = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Aber nach 1) ist die letzte Wurzel gleich der Länge des dem Durchmesser vom Punkte  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  konjugierten Halbmessers, und nach 2) ist die Tangente im Punkte  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  parallel zur Sehne  $\alpha$ ,  $\beta$ ; wenn also  $b'$  die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbmessers bedeutet, so ist  $l = 2b' \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ .

4) Der Inhalt des durch drei Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gebildeten Dreiecks ist

$$\begin{aligned} F &= \pm \frac{1}{2}ab \{ \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma) + \sin(\beta - \alpha) \} \\ &= \pm 2ab \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha). \end{aligned}$$

5) Wenn sich die Halbierungslinien der Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks im Mittelpunkt des Kegelschnitts schneiden, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks konstant.

6) Der Kreis, der dem durch drei Punkte  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmten Dreieck umgeschrieben ist, hat, wenn  $b', b'', b'''$  die zu den Seiten parallelen Halbmesser bedeuten<sup>50</sup>), den Radius

$$R = \frac{b'b''b'''}{ab}.$$

Dies folgt mit Hilfe von 3) und der Tatsache, daß das Produkt der drei Seiten gleich dem mit  $R$  multiplizierten vierfachen Inhalt ist.

Die Gleichung dieses Kreises ist mit  $c^2 = a^2 - b^2$ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{2c^2x}{a} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) \\ + \frac{2c^2y}{b} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) \\ = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}c^2\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)\} \end{aligned}$$

und hieraus folgen leicht die Koordinaten des Mittelpunktes.

7) Der Inhalt des durch drei Tangenten gebildeten Dreiecks ist nach Nr. 37, B. 5  $\pm ab \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ .

8) Ist  $x = k\lambda, y = k:\lambda$  ein Punkt einer gleichseitigen Hyperbel, so ist von vier Punkten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  jeder der Höhenschnittpunkt des Dreiecks der anderen (Nr. 165, 2), wenn  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = -1$  ist; jeder der vier Punkte hat seinen symmetrischen  $-x|-y$  auf dem durch die drei anderen gehenden Kreis.

**170. Winkel und Längen konjugierter Durchmesser.** Beziehen wir eine auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung auf verschiedene Paare konjugierter Durchmesser, so sind gewisse Koeffizientenfunktionen nach Nr. 154 unveränderlich, nämlich  $a_{11}a_{22} : \sin^2 \omega$  und  $(a_{11} + a_{22}) : \sin^2 \omega$ , wenn  $\omega$  den von dem Paar eingeschlossenen *Konjugationswinkel* bezeichnet. Setzt man nun (Nr. 155) in der Achsengleichung  $a_{11} : a_{33} = 1 : a^2, a_{22} : a_{33} = \pm 1 : b^2$  und in der Durchmessergleichung

$$a_{11} : a_{33} = 1 : a'^2, \quad a_{22} : a_{33} = \pm 1 : b'^2,$$

so bestehen also die Beziehungen

$$(44) \quad \frac{1}{a'^2 b'^2 \sin^2 \omega} = \frac{1}{a^2 b^2}, \quad \frac{1}{\sin^2 \omega} \left( \frac{1}{a'^2} \pm \frac{1}{b'^2} \right) = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$$

oder, wenn man die zweite Gleichung durch die erste dividiert,

$$(45) \quad a'b' \sin \omega = ab, \quad a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2.$$

Die geometrische Bedeutung der ersten Beziehung (45) ist offenbar, wenn für die Hyperbel die reelle Ausdrucksweise von Nr. 162 gebraucht wird: *Das durch Verbindung der End-*

*punkte konjugierter Durchmesser gebildete Dreieck hat konstanten Inhalt, oder auch: Die Fläche jedes umgeschriebenen Parallelogramms von konjugierten S. . . . . ist gleich dem Produkt der Achsen  $4ab$ .*

Die zweite Beziehung (45) ergibt: *Die algebraische Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser ist konstant, nämlich: Die Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser der Ellipse ist gleich der Summe der Achsenquadrate, die Differenz der Quadrate konjugierter Durchmesser konjugierter Hyperbeln ist gleich der Differenz der Achsenquadrate.*

Vermöge der beiden Beziehungen (45) sind unter fünf Größen  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $\omega$  je zwei durch die übrigen bestimmt, z. B. die Achsen durch zwei nach Größe und Lage gegebene konjugierte Durchmesser, die Längen konjugierter Durchmesser von vorgeschriebenem Winkel bei gegebenen Achsen. Man bildet die nötigen Gleichungen durch Elimination, hat dann aber noch die gegenseitige Lage der Achsen und Durchmesser zu ermitteln. Hierzu dient die Beziehung  $\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = \mp b^2 : a^2$ , die zwischen den Neigungswinkeln konjugierter Durchmesser gegen die Hauptachse besteht (Nr. 168).

B. 1) *Die Quadratsumme der Reziproken je zweier zueinander rechtwinkligen Halbmesser ist konstant.*

Auf ein solches Paar als Koordinatenachsen bezogen ist die Gleichung der Kurve von der Form  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k = 0$ ; die Quadrate der betr. Halbmesser sind daher  $x^2 = -k : a_{11}$ ,  $y^2 = -k : a_{22}$ , und es folgt  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = -\frac{a_{11} + a_{22}}{k}$ . Hierbei ist  $k = A : A_{33}$  (vgl. S. 292), somit  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$  (vgl. S. 293). Bezogen auf ein anderes Paar zueinander rechtwinkliger Durchmesser habe die Kurve die Gleichung  $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + k' = 0$ ; hier erhält man  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = -\frac{b_{11} + b_{22}}{k'}$  oder (analog wie zuvor)  $\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$ . Das Plus- oder Minuszeichen ist zu setzen, je nachdem eine Ellipse oder eine Hyperbel vorliegt.

2) *Abstand des Mittelpunkts von der Tangente des Punktes  $P'$ .*

Für den Abstand  $CT = d$  des Nullpunkts von  $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$  ist (Nr. 42; vgl. Nr. 167)

$$\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{1}{ab} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2}.$$

Setzen wir also  $CP' = a'$ ,  $CP'' = b'$ , so ist  $d = ab : b'$ , das Produkt eines Halbmessers in den Abstand der zu ihm parallelen Tangente ist konstant. Damit ist auch die Konstanz von  $a'b' \sin \omega$  wieder bewiesen, da  $\sin \omega = \sin CP'T = \frac{d}{a'} = \frac{ab}{a'b'}$ .

### 3) Bestimmung der Aachsen aus zwei konjugierten Durchmessern.

Indem man die Gleichungen  $\alpha'' - \alpha' = \omega$  und  $\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = \mp b^2 : a^2$  in den Formen  $\cos \alpha' \cos \alpha'' + \sin \alpha' \sin \alpha'' = \cos \omega$  und  $a^2 \sin \alpha' \sin \alpha'' \pm b^2 \cos \alpha' \cos \alpha'' = 0$  schreibt und hieraus  $\cos \alpha' \cos \alpha''$  sowie  $\sin \alpha' \sin \alpha''$  berechnet, findet man

$$\cos(\alpha' + \alpha'') = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2 \mp b^2} \cos \omega.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (45) folgt aber

$$\frac{\cos(\alpha' + \alpha'')}{\cos \omega} = \frac{a'^2 \pm b'^2}{\sqrt{(a'^2 \pm b'^2)^2 \mp 4a'^2 b'^2 \sin^2 \omega}}$$

zur Bestimmung von  $\alpha'$  und  $\alpha''$ , und endlich

$$\frac{2a^2}{a'^2 \pm b'^2} = 1 + \frac{\cos \omega}{\cos(\alpha' + \alpha'')}, \quad \frac{\pm 2b^2}{a'^2 \pm b'^2} = 1 - \frac{\cos \omega}{\cos(\alpha' + \alpha'')}.$$

### 4) Aachsenlängen und Exzentrizität eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes.

Nach Nr. 153 ist mit der dort gegebenen Abkürzung  $R$

$$(46) \begin{cases} \frac{2A}{a^2} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega - R) : \sin^2 \omega \\ \frac{2A}{b^2} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega + R) : \sin^2 \omega \end{cases}$$

$$(47) \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} = e^2 = b^2 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2R}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega + R}.$$

Den letzten Ausdruck erhält man auch direkt, wenn man den Kosinus des halben Winkels des Geradenpaares

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \quad \text{bestimmt.}$$

171. Die Konstruktion der Aachsen eines Mittelpunktskegelschnittes aus einem gegebenen Paar konjugierter Durchmesser läßt sich auf folgenden Satz gründen (vgl. auch Nr. 177, 4):

Auf jeder Tangente des Kegelschnittes begrenzen irgend zwei konjugierte Durchmesser vom Berührungspunkt aus Abschnitte, deren Produkt konstant und gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbmessers ist. Zum Beweis nehmen wir diesen Durchmesser  $a'$  und den konjugierten  $b'$ , der den Berührungspunkt enthält, zu Koordinatenachsen. Die konjugierten Durchmesser  $x'y = y'x$ ,  $a'^2y'y \pm b'^2x'x = 0$  (Nr. 168) schneiden in



Tangenten werden gefunden, indem man in der letzten Gleichung nacheinander  $x = \pm a'$  macht und sie nach  $y$  auflöst. Das Produkt der Abschnitte wird  $\frac{b'^4}{y'^2} \left(1 - \frac{x'^2}{a'^2}\right)$  und durch Einsetzen des Wertes von  $y'^2$  aus der Gleichung des Kegelschnittes  $= \pm b'^2$ . Daher verhalten sich die durch die Abschnitte der festen Tangenten und die Abschnitte der veränderlichen Tangenten bestimmten Rechtecke wie die Quadrate der zu diesen Tangenten parallelen Halbmesser (S. 309).

4) Zwei beliebige Halbmesser sind gegeben; wird alsdann vom Endpunkt des einen jedesmal in der zum anderen Halbmesser konjugierten Richtung eine Gerade (Ordinate, vgl. S. 285) gezogen, so sind die so entstehenden Dreiecke inhaltsgleich.

5) Zieht man im Endpunkt eines jeden von zwei beliebigen Halbmessern eine Tangente bis zum Schnitt mit dem anderen Halbmesser, so sind die zwei so entstehenden Dreiecke inhaltsgleich.

172. *Die Bestimmung der Paare konjugierter Durchmesser von vorgeschriebenem Konjugationswinkel* umfaßt die Achsenbestimmung als besonderen Fall. Man geht von den Sehnen aus, die die Enden eines Durchmessers  $AB$  mit einem beliebigen Punkt  $D$  der Kurve verbinden und *Supplementarsehnen* genannt werden.

*Durchmesser, die zu irgend einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, sind konjugiert.* Denn, da im Dreieck  $ABD$  die Verbindungslinie der Halbierungspunkte zweier Seiten mit der dritten Seite parallel ist, so muß der  $AD$  halbierende Durchmesser parallel zu  $BD$  und der  $BD$  halbierende parallel zu  $AD$  sein. Zum analytischen Beweis bildet man die Gleichungen von  $AD$  und  $BD$  und zeigt, daß das Produkt ihrer Richtungskoeffizienten gleich  $\mp b^2 : a^2$  ist (vgl. S. 332).

Um also die Paare konjugierter Durchmesser zu konstruieren, die den Winkel  $\omega$  einschließen, suchen wir zwei Supplementarsehnen, die den Winkel  $\omega$  miteinander bilden. Dazu beschreiben wir über irgend einem Durchmesser den Bogen eines Kreises, in dem  $\omega$  der Peripheriewinkel ist, und verbinden die Punkte, wo dieser Kreis die Kurve schneidet, mit den Enden des angenommenen Durchmessers: so erhalten wir ein Paar Supplementarsehnen, die zu den verlangten Durchmessern parallel sind.



Um die Einsicht in die Lagenverhältnisse zu erleichtern, denken wir uns die Achsen gegeben und legen die Hilfskreise durch ein Scheitelpaar. Eine Hyperbel wird, wie man leicht erkennt, von jedem durch die reellen Scheitel gelegten Kreis in noch zwei reellen Punkten geschnitten, deren Verbindungsgerade zur Hauptachse parallel ist, d. h. *in der Hyperbel schließen stets zwei symmetrische Paare konjugierter Durchmesser einen beliebig gegebenen Winkel ein*. Eine Ellipse hat dagegen mit den durch die Scheitel der großen Achse gehenden Kreisen offenbar nur dann noch zwei reelle, zur kleinen Achse symmetrische Schnittpunkte, wenn der Kreis die kleine Achse nicht zwischen ihren Scheiteln schneidet.

Auf die Achsen bezogen erhält man leicht für die Hilfskreise, die über der Sehne  $2a$  den spitzen Peripheriewinkel  $\omega$  enthalten, die Mittelpunkte  $0 | \pm a \cot \omega$  und die Gleichungen

$$x^2 + y^2 \mp 2ay \cot \omega - a^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} \mp 2 \frac{y}{a} \cot \omega = 1.$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Ellipse genügen einer der letzten Gleichungen und der Ellipsengleichung, also auch je ihrer Differenz

$$y \left\{ \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} y \pm \frac{2}{a} \cot \omega \right\} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der  $x$ -Achse und je einer Parallelen, die die Ellipse nur so lange reell schneidet, als der Abstand der Parallelen von der  $x$ -Achse kleiner als  $b$  ist, also wenn

$$(48) \quad \frac{2ab^2}{a^2 - b^2} \cot \omega \leq b \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \omega \geq \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

*Der kleinste spitze Winkel, den konjugierte Durchmesser der Ellipse einschließen können, ist daher der Winkel der Diagonalen im Rechteck der Scheiteltangenten; denn die  $x$ -Parallele muß berühren und dann sind die Supplementarsehnen die Verbindungsgeraden der Scheitel der großen und der kleinen Achse. Nur zu einem spitzen Konjugationswinkel  $\omega$ , der größer ist als der der Scheitelverbindungsgeraden, gibt es in der Ellipse zwei symmetrische Paare konjugierter Durchmesser.*

**173. Gleichlange konjugierte Durchmesser der Ellipse liegen in den Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten.**

Denn nach Nr. 172 sind sie konjugiert und infolge ihrer symmetrischen Lage haben sie gleiche Länge. Man kann dieses ausgezeichnete Durchmesserpaar auch aus der Betrachtung der Konstanz von  $a'^2 + b'^2$  und  $a'b' \sin \omega$  (Nr. 170) folgendermaßen finden.

Bekanntlich hat unter den Rechtecken von gegebener Diagonale das Quadrat den größten Inhalt, d. h. bei konstanter Quadratsumme  $a'^2 + b'^2$  ist  $a'b'$  ein Maximum, wenn  $a' = b'$  ist. Alsdann ist aber  $\sin \omega = ab : a'b' = ab : a'^2$ , also der spitze Konjugationswinkel  $\omega$  selbst ein Minimum  $\Omega$ . Somit ergibt sich als das Quadrat der gleichlangen konjugierten Halbmesser einer Ellipse  $a'^2 = b'^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$  und

$$\sin \Omega = ab : \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Omega = \pm b : a.$$

In der Hyperbel kann es infolge  $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$  keine gleichen konjugierten Durchmesser geben, außer wenn sie gleichseitig ist (Nr. 165). Aber aus Nr. 163 folgt: *Wenn eine Hyperbel und eine Ellipse dieselben Achsen in Größe und Lage haben, so fallen die Asymptoten der Hyperbel mit den gleichlangen konjugierten Durchmessern der Ellipse zusammen.*

Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die gleichlangen konjugierten Durchmesser als Koordinatenachsen, lautet

$$(49) \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ihre geometrische Bedeutung ist die, daß jeder Punkt der Ellipse von ihren gleichlangen konjugierten Durchmessern senkrechte Abstände  $x \sin \Omega$ ,  $y \sin \Omega$  hat, deren Quadratsumme konstant ist, nämlich  $\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \sin^2 \Omega$ .

Für jede Ellipse gibt es also ein bestimmtes schiefwinkliges Koordinatensystem (Fig. 87), in dem ihre Gleichung die Form einer Kreisgleichung in rechtwinkligen Koordinaten hat:

$$(50) \quad x^2 + y^2 = a'^2.$$

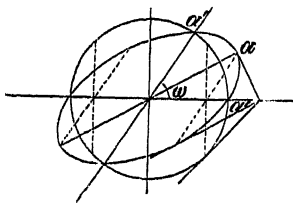


Fig. 87.

Daher entsteht aus einem Kreis stets eine Ellipse, wenn man seine parallelen Sehnen um ihre Halbierungspunkte um einen konstanten Winkel dreht. Denn der die Drehpunkte enthaltende

und der unter  $\Omega$  gegen ihn geneigte Durchmesser sind die Koordinatenachsen und gleichlangen konjugierten Durchmesser der Ellipse.

B. 1) Eine Ellipse, deren gleiche konjugierte Durchmesser  $a'$  den spitzen Winkel  $\Omega$  einschließen, hat die Halbachsen

$$a = \sqrt{2} \cdot a' \cos \frac{1}{2} \Omega, \quad b = \sqrt{2} \cdot a' \sin \frac{1}{2} \Omega$$

und die Exzentrizität  $e = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Omega$ . Mit  $\frac{1}{2} \Omega$  gleich  $45^\circ$  wird diese Null und  $a = b$ , die Ellipse wird ein Kreis.

2) Die Gleichungen der Paare konjugierter Durchmesser, die den Winkel  $\omega$  einschließen, lauten

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} - \frac{xy}{ab} \sqrt{\left(\frac{a^2 \mp b^2}{ab \cot \omega}\right)^2 \mp 4} = 0.$$

174. Eigenschaften der Hyperbel bezüglich der Asymptoten sind die einzigen, die unter denen der Ellipse keine entsprechenden finden.

Die Abschnitte  $ED$  und  $GF$  (Fig. 88), die auf einer Sekante der Hyperbel zwischen der Kurve und den Asymptoten enthalten sind, sind gleich lang. Dies folgt daraus, daß der zur Richtung  $CB$  der Sekante  $GD$  konjugierte Durchmesser  $CA$  sowohl die Sehne  $FE$  der Hyperbel als das Segment  $GD$  zwischen den Asymptoten halbiert, jenes nach der Definition konjugierter

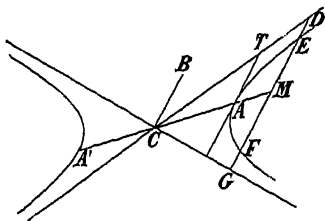


Fig. 88.

Durchmesser (Nr. 139), dieses, weil  $CA$ ,  $CB$  zu den Asymptoten harmonisch liegen (S. 305). Zum analytischen Beweis nimmt man den zu  $GD$  parallelen und den ihm konjugierten Durchmesser zu Koordinatenachsen; alsdann folgt aus der Gleichung  $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$  des Asymptotenpaares  $MD = b'x:a'$ ,  $MG = -b'x:a'$  und aus der Kurvengleichung  $ME = -MF$ , also  $ED = GF$  oder  $FD = GE$ .

Diese Eigenschaft erlaubt, beliebig viele Punkte der Hyperbel zu konstruieren, wenn die Asymptoten und ein einziger Punkt  $E$  gegeben sind. Denn man hat nur beliebige Sekanten durch  $E$  zu ziehen und innerhalb des  $E$  enthaltenden Asym-

ptotenwinkels auf jeder Sekante einen Punkt  $F$  so zu bestimmen, daß  $ED = GF$  ist.

Ein wichtiger besonderer Fall, der schon aus dem Schlußsatz von Nr. 163 abgelesen werden kann, ist: *Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkt halbiert und ist dem zur Tangente parallelen Durchmesser gleich.* Somit ist das von den Asymptoten und der Tangente gebildete Dreieck doppelt so groß als das Parallelogramm aus denselben und den Asymptotenparallelen des Berührungspunktes. Daher (Nr. 164) *begrenzt die Hyperbeltangente mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt.*

*Die von einer Asymptote aus gemessenen Abschnitte  $GE$ ,  $GF$  der Hyperbel in einer Sekante ergeben das Quadrat des parallelen Halbmessers  $CB$  als ihr Produkt.* Denn aus den obigen Annahmen folgt

$$GF = b' \left\{ \frac{x}{a'} - \sqrt{\frac{x^2}{a'^2} - 1} \right\}, \quad GE = b' \left\{ \frac{x}{a'} + \sqrt{\frac{x^2}{a'^2} - 1} \right\}$$

und hieraus  $GF \cdot GE = b'^2 = CB^2$ . Man erkennt darin wiederum die charakteristische Asymptoteneigenschaft (Nr. 164): durch Vergrößerung der Entfernung der Sekante vom Mittelpunkt wird der zwischen der Kurve und der Asymptote enthaltene Abschnitt  $GF$  kleiner als jede angebbare Größe.

Die Verwendung der Asymptotengleichung von Nr. 164 zeigen die Beispiele.

B. 1) Unter Voraussetzung der Asymptotengleichung  $xy = k^2$  ist  $x'y + y''x = k^2 + x'y''$  die Gleichung einer Sehne  $P'P''$ , und die Gleichung der Tangente in  $P'$  wird  $x'y + y'x = 2k^2$  oder

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2.$$

Hiernach sind die in den Asymptoten durch die Tangente eines beliebigen Hyperbelpunktes  $P'$  gemachten Abschnitte gleich  $2x'$  und  $2y'$ , ihr Rechteck ist daher  $= 4k^2$ .

2) Werden zwei feste Punkte  $P'$ ,  $P''$  einer Hyperbel mit irgend einem veränderlichen Punkt  $P'''$  der Kurve verbunden, so fassen diese Sehnen auf jeder der Asymptoten eine konstante Strecke zwischen sich.

Die Gleichung einer der Sehnen ist  $x'''y + y'x = y'x''' + k^2$ ; der von ihr in der  $x$ -Achse vom Nullpunkt aus gebildete Abschnitt wird daher gleich  $x''' + x'$ . Ebenso ist der Abschnitt, der der

anderen Sehne entspricht, gleich  $x''' + x''$ , und die Differenz zwischen beiden  $x' - x''$  ist somit von der Lage des Punktes  $P'''$  in der Kurve unabhängig.

3) Die Koordinaten  $x|y$  des Punktes, in dem sich die in  $P'$  und  $P''$  gezogenen Tangenten der Hyperbel  $xy = k^2$  schneiden, folgen aus

$$x'y + y'x = 2k^2 = 2x'y', \quad x''y + y''x = 2k^2 = 2x''y''$$

$$\text{als} \quad x = \frac{2k^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'} = \frac{2x'x''}{x' + x''}; \quad y = \frac{2y'y''}{y' + y''}.$$

175. Beispiele. Die Methode, die Algebra auf Probleme über Kegelschnitte anzuwenden, ist im wesentlichen dieselbe, wie die in dem Fall der Geraden und des Kreises angewendete. Wir wollen daher aus der großen Anzahl von Aufgaben, die zu Orten zweiten Grades führen, nur einige auswählen.

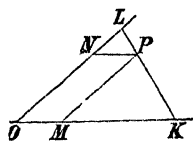


Fig. 89.

B. 1) Bewegt sich eine Gerade von konstanter Länge  $l$  zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels, so beschreibt ein beliebig gewählter Punkt  $P$  der Geraden eine Ellipse.

Bezeichnen wir  $PL$  durch  $n$ ,  $KP$  durch  $m$ , so haben wir aus ähnlichen Dreiecken (Fig. 89):

$$OL = \frac{ly}{m}, \quad OK = \frac{lx}{n},$$

und daraus folgt (vgl. Nr. 160)

$$l^2 = \frac{l^2 y^2}{m^2} + \frac{l^2 x^2}{n^2} - \frac{2l^2 xy \cos \omega}{mn} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{2xy \cos \omega}{mn} = 1,$$

die Gleichung einer *Ellipse*, die den Punkt  $O$  zum Mittelpunkt hat; denn  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  ist hier positiv, nämlich  $= \frac{\sin^2 \omega}{m^2 n^2}$ .

2) Welchen Ort beschreibt ein Punkt  $Q$ , der bei festem  $P$  in  $LK$  so angenommen wird, daß  $QK = PL$  ist?

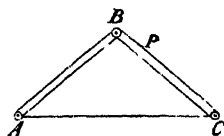


Fig. 90.

3) Zwei gleiche Lineale  $AB$ ,  $BC$  sind durch ein Gelenk in  $B$  vereinigt (Fig. 90); der Endpunkt  $A$  ist befestigt, während  $C$  die Gerade  $AC$  durchlaufen muß. Man soll den durch irgend einen festen Punkt  $P$  in  $BC$  beschriebenen Ort finden.

4) Aus der Basislänge und dem Produkt der Tangenten der halben Basiswinkel den Ort der Dreiecksspitze zu finden.

Indem man die Tangenten der Hälften der Basiswinkel als Funktionen der Seiten ausdrückt, findet man, daß die Summe der Seiten gegeben und daher der Ort eine *Ellipse* ist.

5) Welches ist der Ort der Mittelpunkte der einem Dreieck eingeschriebenen Kreise, wenn die Basis und die Summe der Seiten des Dreiecks bekannt sind?

Man kann aus dem letzten Beispiel und aus Nr. 51,4 unmittelbar erkennen, daß der Ort eine *Ellipse* ist, deren Scheitel die Endpunkte der gegebenen Basis sind.

6) Aus der Basis und der Summe der Seiten eines Dreiecks den Ort des Schwerpunktes (Nr. 45,1) zu bestimmen.

7) Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die in zwei gegebenen Geraden Abschnitte von vorgeschriebener Länge ausschneiden?

8) Man soll den Ort der Mittelpunkte der Kreise finden, die zwei andere Kreise berühren, oder die einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berühren (Nr. 195).

9) Man bestimme den Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und in einer gegebenen Geraden Abschnitte von vorgeschriebener Länge ausschneiden.

10) Man bestimme den Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und deren Abschnitte in einer gegebenen Geraden von diesem Punkte aus unter gegebenem Winkel erscheinen.

11) Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; der Ort der dritten Ecke ist zu finden.

12) Ein Dreieck  $ABC$  ist einem gegebenen Kreis vom Radius  $\varrho$  umgeschrieben, der Winkel  $C = \gamma$  ist gegeben, die Ecke  $B$  bewegt sich längs einer festen Geraden; man soll den Ort von  $A$  finden.

Wir wenden Polarkoordinaten an, deren Pol der Mittelpunkt  $O$  des Kreises ist, und deren Winkel gegen die Normale  $p$  der festen Geraden gemessen werden. Bezeichnen wir in diesem Sinn die Koordinaten von  $A$ ,  $B$  durch  $r \mid \vartheta$ ,  $r' \mid \vartheta'$ , so ist  $r' \cos \vartheta' = p$  der Abstand des Punktes  $O$  von der festen Geraden. Aber man sieht leicht, daß der Winkel  $AOB = \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ , also bekannt ist; und da die Höhe des Dreiecks  $AOB$  gleich  $\varrho$  ist, gilt die Gleichung

$$\varrho = \frac{rr' \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}}$$

Aus ihr geht durch  $\vartheta - \vartheta' = \alpha$  die Polargleichung des Ortes

$$\varrho^2 = \frac{p^2 r^2 \sin^2 \alpha}{r^2 \cos^2 (\alpha - \vartheta) + p^2 - 2pr \cos \alpha \cos (\alpha - \vartheta)}$$

hervor, die einen *Kegelschnitt* darstellt.

13) Eine Gerade bewegt sich so, daß sie stets einen festen Kegelschnitt  $A$  berührt; in jeder ihrer Lagen bestimmt man ihren Pol in bezug auf einen anderen festen Kegelschnitt  $B$ . Der von diesem Pol durchlaufene Ort ist ein Kegelschnitt.

Ist  $\alpha|\beta$  irgend ein Punkt des Ortes, und  $ux + vy + w = 0$  seine Polare in bezug auf den Kegelschnitt  $B$ , so sind nach Nr. 137  $u, v, w$  lineare Funktionen von  $\alpha|\beta$ . Nach S. 306 ist aber die Bedingung, unter der die Gerade  $ux + vy + w = 0$  den Kegelschnitt  $A$  berührt, vom zweiten Grade in bezug auf  $u, v, w$ .

14) Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser ist  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2$ .

Man erhält die Gleichung durch Addition der Quadrate der Gleichungen beider Tangenten unter Berücksichtigung der Beziehungen von Nr. 168.

15) Teile einen Kreisbogen in drei gleiche Teile.

Die Teilpunkte werden als Schnittpunkte des gegebenen Bogens mit einer gewissen Hyperbel bestimmt. (Vgl. Nr. 51, 7.)

16) Durch die Endpunkte einer Sehne von konstanter Länge in einem festen Kreis zieht man Parallelen zu zwei festen Geraden; der Ort ihres Schnittpunktes ist eine Ellipse, deren Achsen die Winkel der durch den Kreismittelpunkt gehenden Parallelen zu den festen Geraden halbieren.

17) Von den parallelen Seiten eines Trapezes ist die eine nach Größe und Lage, die andere der Größe nach gegeben; die Summe der nicht parallelen Seiten ist bekannt; man verlangt den Ort des Schnittpunktes der Diagonalen.

## Zehntes Kapitel.

### Die Fokaleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

176. **Normale einer Kurve** in einem ihrer Punkte  $P$  heißt die durch  $P$  rechtwinklig zur Tangente dieses Punktes gezogene Gerade. Bei den folgenden Untersuchungen, die die Bestimmung von Normalen verlangen, setzen wir stets rechtwinklige Koordinaten voraus.

Nach Nr. 41 ist die Gleichung der durch  $x' | y'$  gehenden Geraden zu bilden, die zur Tangente  $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$  einer auf ihre Achsen bezogenen Mittelpunktskurve rechtwinklig ist; *die Gleichung der Normale einer Ellipse bez. Hyperbel in  $x' | y'$  wird also*

$$(1) \quad \frac{x'}{a^2} (y - y') = \pm \frac{y'}{b^2} (x - x') \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 x}{x'} \mp \frac{b^2 y}{y'} = c^2,$$

wo  $c^2$  (Nr. 156) das Quadrat der linearen Exzentrizität bezeichnet.

Schreibt man die vorige Gleichung in der Form

$$\frac{a^2}{x'} (x - x') = \pm \frac{b^2}{y'} (y - y')$$

und setzt man diesen Ausdruck gleich  $R$ , so folgt aus

$$x - x' = \frac{R x'}{a^2} \quad \text{und} \quad y - y' = \pm \frac{R y'}{b^2}$$

für die von  $x | y$  aus gemessene Länge  $n$  der Normale:

$$(2) \quad n^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = R^2 \left( \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right),$$

d. h. nach dem Werte von  $d^2$  in Nr. 170, 2:

$$(3) \quad n^2 = \frac{R^2}{d^2} \quad \text{oder} \quad n d = R.$$

Man erhält infolgedessen aus

$$\frac{a^2}{x'} (x - x') = n d \quad \text{und} \quad \pm \frac{b^2}{y'} (y - y') = n d:$$

$$(4) \quad x' = \frac{a^2 x}{n d \pm a^2}, \quad y' = \pm \frac{b^2 y}{n d \pm b^2}.$$



Wir finden ferner den Abschnitt  $CN$ , den eine Normale in der Hauptachse vom Mittelpunkt ab bestimmt, als

$$(5) \quad x = \frac{c^2}{a^2} x' \quad \text{oder} \quad CN = e^2 x'.$$

In der Ellipse ( $e < 1$ , Fig. 91) fällt also  $N$  zwischen  $C$  und  $M$ , in der Hyperbel ( $e > 1$ ) über  $M$  hinaus.

Wir können somit zu einem gegebenen Punkt  $N$  der Hauptachse die Abszisse  $x'$  eines Punktes oder vielmehr zweier

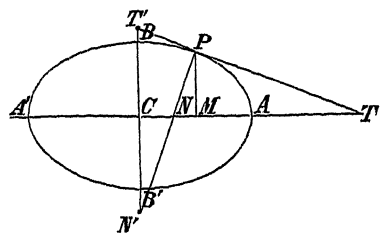


Fig. 91.

zur Hauptachse symmetrisch gelegener Punkte der Kurve bestimmen, deren Normale je durch  $N$  geht. Im Fall der Ellipse sind aber diese Punkte, d. h. die Normalen selbst, nur reell, solange  $x'^2 \leq a^2$ , also wenn  $N$  zwischen den Punkten

von den Abszissen  $\pm e^2 a$  liegt. Ebenso gehören im Fall der Hyperbel reelle Normalen nur zu den Punkten außerhalb der durch  $x = -ae^2$  und  $x = +ae^2$  begrenzten Strecke, da  $x'^2 \geq a^2$  sein muß.

Der Kreis kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Exzentrizität Null ist; daher ist bei einem Kreis immer  $CN = 0$ : jede Normale eines Kreises geht durch seinen Mittelpunkt.

**177. Subnormale und Subtangente.** Das Stück  $NM$  der Hauptachse, das zwischen Normale und Ordinate enthalten ist, wird die *Subnormale* genannt. Die Subnormale hat (Nr. 176) die Länge

$$(6) \quad x' - \frac{c^2}{a^2} x' \quad \text{oder} \quad NM = \pm \frac{b^2}{a^2} x':$$

Die Normale  $NP$  eines Punktes  $P$  teilt seine Abszisse  $CM$  in einem konstanten Verhältnis, und zwar innerlich bei der Ellipse, äußerlich bei der Hyperbel; es ist nämlich  $NM:CM = \pm b^2:a^2$ . Die Subnormale der gleichseitigen Hyperbel ist also ihrer absoluten Länge nach gleich der Abszisse.

Wenn eine im Punkte  $P$  an die Kurve gezogene Tangente die Hauptachse in  $T$  schneidet, so wird der Abschnitt  $MT$  die *Subtangente* genannt. Aus der Gleichung der Tangente

folgt der Achsenabschnitt  $CT = a^2 : x'$ , also ist die Subtangente

$$(7) \quad MT = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Als die Länge  $n$  der Normale bezeichnet man gewöhnlich das von der Normale durch die Hauptachse abgeschnittene Segment  $PN$ :

$$(8) \quad PN^2 = PM^2 + MN^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4} x'^2 = \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 \right).$$

Ist aber  $b'$  der zu  $CP$  konjugierte Halbmesser, so ist die Klammergröße gleich  $b'^2$  (Nr. 170, 2). Also ist die Länge der Normale  $n = bb' : a$ ; insbesondere bei der gleichseitigen Hyperbel wie bei dem Kreis ist sie dem Halbmesser gleich.

Wird die Normale bis zum Schnitt  $N'$  mit der kleinen Achse verlängert, so zeigt man in derselben Art, daß der Abschnitt  $PN'$  der Normale die Länge  $ab' : b$  hat. Die Vergleichung beider Ergebnisse liefert die Sätze: *Das Produkt der durch die Achsen abgeschnittenen Segmente  $PN$  und  $PN'$  der Normale von  $P$  ist gleich dem Quadrat des zur Tangente von  $P$  parallelen Halbmessers; der Quotient  $PN : PN'$  dieser Abschnitte ist gleich dem Quotienten  $b^2 : a^2$  der Quadrate der Halbachsen.*

B. 1) *Das Rechteck aus der Normale  $n$  und dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt ist konstant und zwar gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse.*

Denn dieser Abstand  $d$  wurde in Nr. 170, 2 gleich  $ab : b'$  gefunden.

2) Die Länge der Normale kann auch in Funktion ihres Neigungswinkels  $\alpha$  nach Nr. 167, 1 ausgedrückt werden:

$$n = \frac{b^2}{d} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pm a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}}.$$

3) Schneiden zwei Durchmesser  $CD$ ,  $CD'$  einer Ellipse auf der Normale des Punktes  $P$  Segmente  $PD$ ,  $PD'$  ab, die dem zu  $CP$  konjugierten Halbmesser gleich sind, so halbieren die Achsen der Kurve die Winkel der beiden Durchmesser.

Denn die Punktepaare  $NN'$  (Fig. 91, in die man das Weitere leicht einzeichnen wird) und  $DD'$  sind harmonisch, weil  $PN \cdot PN' = PD^2$  (Nr. 15), also muß auch das Durchmesserpaar  $CD$ ,  $CD'$  zu dem Rechtwinkelpaar  $CN$ ,  $CN'$  harmonisch sein (Nr. 60). Dies liefert eine neue Konstruktion der Achsen aus zwei konjugierten

Halbmessern  $CP = a'$ ,  $CQ = b'$ : Man fällt von  $P$  das Lot auf  $CQ$  und trägt auf dieses Lot von  $P$  aus nach beiden Seiten die Strecken  $PD$  und  $PD'$  ab, deren jede gleich  $b'$  ist. Die Achsen liegen in den Halbierenden des Winkels  $DCD'$ .

4) Die Längen der Halbachsen folgen als halbe Summe und bez. halbe Differenz von  $CD$ ,  $CD'$  in 3; denn diese sind bez.  $a + b$ ,  $a - b$ .

178. **Normalen aus einem Punkt.** Die Gleichung der Normale  $a^2y'x \mp b^2x'y = c^2x'y'$  in Nr. 176 drückte eine Beziehung aus, die zwischen den Koordinaten  $x'|y'$  eines Punktes  $P$  in der Kurve und den Koordinaten  $x|y$  irgend eines Punktes dieser Normale besteht. Nun kann man die Normalen des Kegelschnittes suchen, die durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen; es sind dann ihre Fußpunkte anzugeben. Analytisch sind also in der Gleichung der Normale die Koordinaten  $x|y$  eines Punktes gegeben und die des Fußpunktes  $x'|y'$  aus jener und der Kurvengleichung zu bestimmen. Indem wir die gegebenen Koordinaten akzentuieren und die gesuchten von den Akzenten befreien, erhalten wir für die Fußpunkte der durch  $x'|y'$  gehenden Normalen die neben der Kurvengleichung zu erfüllende Beziehung

$$(9) \quad c^2xy \pm b^2y'x - a^2x'y = 0.$$

Der durch diese Gleichung dargestellte Ort zweiten Grades geht durch den gegebenen Punkt  $P'$  ( $x'|y'$ ) und den Mittelpunkt  $0|0$  der gegebenen Kurve. Da eine bloße Paralleltransformation die linearen Glieder zum Verschwinden bringen kann, ist der Ort eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen des gegebenen Kegelschnittes parallel sind. Die beiden Kurven haben im algebraischen Sinne vier Schnittpunkte (Nr. 28), und eine nähere Untersuchung zeigt, daß sie sämtlich reell sein können, daß aber stets zwei reell sein müssen. *Von einem beliebigen Punkt der Ebene gehen also vier Normalen der Mittelpunktskurve aus, von denen mindestens zwei reell sind.*

Für einen Punkt  $x'|0$  bez.  $0|y'$  einer Achse tritt an Stelle der gleichseitigen Hyperbel die Achse selbst und die dazu normale Gerade  $c^2x - a^2x' = 0$  bez.  $c^2y \pm b^2y' = 0$ . Von den

vier Normalen des Punktes fallen also zwei mit der Achse selbst zusammen, da ihre Fußpunkte die Scheitel sind. Die Realität der beiden anderen Normalen für Punkte  $x' | 0$  ist schon in Nr. 176 erörtert. Für Punkte  $0 | y'$  der Nebenachse sind im Fall der Hyperbel stets reelle Normalen vorhanden, im Fall der Ellipse nur, solange  $y'$  zwischen  $\pm c^2 : b$  liegt.

Die gefundene gleichseitige Hyperbel kann folgendermaßen definiert werden: sie ist der Ort des Schnittpunktes  $P$  eines Durchmessers der Kurve mit dem von  $P'$  auf seinen konjugierten gefälltten Lote. Denn zu  $y = mx$  ist der konjugierte Durchmesser  $b^2x \pm ma^2y = 0$  und das durch  $P'$  gehende Lot zu diesem hat die Gleichung  $a^2m(x - x') \mp b^2(y - y') = 0$ ; die Elimination von  $m$  vermöge  $y = mx$  gibt die Gleichung (9). Da also eine Sehne  $P'P$  der gleichseitigen Hyperbel senkrecht ist zum konjugierten des  $P$  enthaltenden Durchmessers, so ist sie, falls  $P$  auch der gegebenen Kurve angehört, wirklich zur Tangente rechtwinklig.

Substituiert man die in Nr. 176 gewonnenen Ausdrücke

$$\frac{a^2x'}{nd + a^2}, \quad \frac{b^2y'}{nd \pm b^2}$$

der Koordinaten des Normalenfußpunktes durch die Koordinaten ihres Ausgangspunktes, ihre Länge und die Entfernung der Tangente des ersten vom Mittelpunkt des Kegelschnittes in die Gleichung desselben, so erhält man eine biquadratische Gleichung für die Bestimmung der vier zugehörigen Werte von  $nd$

$$(10) \quad \frac{a^2x'^2}{(nd + a^2)^2} \pm \frac{b^2y'^2}{(nd \pm b^2)^2} = 1.$$

Das Produkt der vier Werte von  $nd$  ist, als das von  $nd$  unabhängige Glied in der Entwicklung dieser Gleichung ausgedrückt, gleich

$$a^4b^4 \left\{ 1 - \frac{x'^2}{a^2} \mp \frac{y'^2}{b^2} \right\},$$

also proportional dem *Ergebnis der Substitution der Koordinaten des Punktes  $P'$  in die Normalgleichung des Kegelschnittes.*<sup>51)</sup>

Der Sonderfall des Kreises führt auf die *Potenz* zurück.

B. 1) Eine Gerade  $ux + vy + 1 = 0$  ist eine Normale der Kurve  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ , wenn (vgl. (1), S. 347)

$$\frac{a^2}{u^2} \pm \frac{b^2}{v^2} = c^4 \text{ oder } c^4 u^2 v^2 \mp b^2 u^2 - a^2 v^2 = 0.$$

2) Die Koordinaten  $X'|Y'$  des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten  $x'|y'$  und  $x''|y''$  sind

$$X' = \frac{x'y'' + y'x''}{y' + y''}, \quad Y' = \frac{x'y'' + y'x''}{x' + x''},$$

oder auch

$$X' = \frac{x' + x''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} \pm \frac{y'y''}{b^2}}, \quad Y' = \frac{y' + y''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} \pm \frac{y'y''}{b^2}}.$$

Man findet zunächst nach Nr. 37

$$X' = -a^2 \frac{y' - y''}{x'y'' - y'x''}, \quad Y' = \pm b^2 \frac{x' - x''}{x'y'' - y'x''},$$

kann dies aber umformen mit Hilfe der Beziehungen

$$x'^2 y''^2 - y'^2 x''^2 = \pm b^2 (x'^2 - x''^2) = -a^2 (y'^2 - y''^2),$$

die aus der Kurvengleichung für  $x'|y'$  und  $x''|y''$  folgen.

3) Die Koordinaten  $X|Y$  des Schnittpunktes der Normalen in den Punkten  $x'|y'$  und  $x''|y''$  sind

$$X = \frac{c^2 x' x'' X'}{a^4}, \quad Y = -\frac{c^2 y' y'' Y'}{b^4},$$

wenn hier  $X'|Y'$  die Koordinaten des Tangentenschnittpunktes in 2) bedeuten.

Wenn man endlich noch  $x'x''$  und  $y'y''$  mit Hilfe der Gleichung der Polare von  $X'|Y'$  durch diese Koordinaten rational ausdrückt, so gehört zu jedem Punkt  $X'|Y'$  der Ebene als Normalenschnittpunkt

$$X = \frac{c^2 X'}{a^2} \frac{1 \mp \frac{Y'^2}{b^2}}{\frac{X'^2}{a^2} \pm \frac{Y'^2}{b^2}}, \quad Y = \mp \frac{c^2 Y'}{b^2} \frac{1 - \frac{X'^2}{a^2}}{\frac{X'^2}{a^2} \pm \frac{Y'^2}{b^2}}.$$

4) Wann sind die Normalen zweier Kurvenpunkte zueinander rechtwinklig? (Vgl. Nr. 167, 6.)

Der Ort des Punktes, von dem aus zwei zueinander rechtwinklige Normalen der Kurve gehen, folgt durch 3) aus dem Hauptkreis.

5) Die Elimination von  $y$  zwischen

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \quad \text{und} \quad c^2 xy + b^2 y'x - a^2 x'y = 0$$

liefert eine biquadratische Gleichung zwischen den Abszissen der vier Fußpunkte der von  $P'$  ausgehenden Normalen; die Koeffizienten der Gleichung zeigen, daß die Summe dieser Abszissen, die Summen ihrer Produkte zu zweien und zu dreien, und endlich ihr Produkt bez. gleich sind

$$\frac{2a^2}{c^2}x', \quad \frac{a^2}{c^4}(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4), \quad -\frac{2a^4}{c^2}x' \quad \text{und} \quad -\frac{a^6}{c^4}x'^2.$$

Daraus ergeben sich einige Folgerungen.

**179. Brennpunkte.** Die Normalen von zwei solchen Punkten einer Mittelpunktskurve, die in der Hauptachse dieselbe Abszisse  $x$  haben, also zur Hauptachse symmetrisch liegen, schneiden sich auf dieser Achse in einem Punkt  $P'$  mit der Abszisse  $x' = c^2x:a^2$  (Nr. 176); der Schnittpunkt  $P''$  ihrer Tangenten liegt gleichfalls auf der Hauptachse und hat die Abszisse  $x'' = a^2:x$  (Nr. 177). Diese Punkte  $P'$  und  $P''$  sind stets reell, wenn die Sehne der beiden Kurvenpunkte und daher auch  $x$  reell ist, ob diese nun selbst reell oder konjugiert imaginär sind.

Die Punkte  $P'$  und  $P''$ , die zu demselben  $x$  gehören, ergeben ein konstantes Produkt ihrer Abszissen  $x'x'' = c^2$ . Nach Nr. 15 bedeutet aber diese Beziehung, daß jedes Punktepaar  $P', P''$  durch die beiden festen Punkte  $x = \pm c, y = 0$  harmonisch getrennt wird.

Diese beiden festen Punkte  $F, F'$  (Fig. 92), die in der Hauptachse symmetrisch zum Mittelpunkt in der Entfernung  $\pm c$  von diesem liegen, heißen *die reellen Brennpunkte (foci) der Mittelpunktskurve*. Die Größe  $c = ea$  nennt man daher die *Fokaldistanz*. Aus gegebenen Achsen ergibt sie sich als  $\sqrt{a^2 \mp b^2}$  für die Ellipse bez. Hyperbel, insbesondere 0 für den Kreis,  $a\sqrt{2}$  für die gleichseitige Hyperbel. Die Brennpunkte befinden sich im Inneren der Ellipse ( $c^2 \leq a^2$ ) oder der Hyperbel ( $c^2 \geq a^2$ ), liefern also imaginäre Tangenten, aber auch imaginäre Normalen, da sie zwischen den Scheiteln und den Punkten  $\pm c^2:a$  (Nr. 176) liegen.

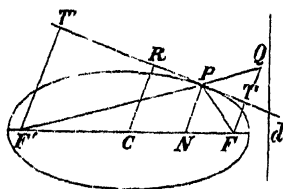


Fig. 92.

Eine analoge Überlegung gilt für die Nebenachse. Zu zwei Kurvenpunkten von gleicher reeller Ordinate  $y$  gehören zwei reelle Punkte der Nebenachse: der Normalenschnittpunkt  $y' = \mp c^2 y : b^2$  und der Tangentenschnittpunkt  $y'' = \pm b^2 : y$ . Die Abstände der Punkte eines Paares vom Mittelpunkt der Kurve ergeben wiederum ein konstantes, aber wesentlich negatives Produkt  $y'y'' = -c^2$ . Daher liegen  $y'$  und  $y''$  wieder zu zwei festen, aber imaginären Punkten  $y = \pm ci$  harmonisch. Diese können in manchen Aufgaben durch ihre reellen Stellvertreter  $y = \pm c$  (Nr. 19 und 20) ersetzt werden.

Die beiden konjugiert imaginären Punkte der Nebenachse  $y = \pm ci$  sind als *die imaginären Brennpunkte der Kurve* zu bezeichnen. Somit haben die *Mittelpunktskurven vier Brennpunkte*, aber nur zwei reelle in der Hauptachse; nur für den Kreis fallen sie sämtlich in seinen Mittelpunkt. Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit den Eigenschaften der reellen Brennpunkte beschäftigen.

180. **Leitlinie (Direktrix) des Kegelschnittes** heißt die **Polare eines Brennpunktes**. Die zu dem reellen Brennpunkt  $\pm c$  gehörige Leitlinie ist (S. 329) die reelle Gerade

$$(11) \quad \pm cx = a^2, \quad \text{oder} \quad a \mp ex = 0,$$

die in der Entfernung  $\pm a^2 : c$  vom Mittelpunkt zur Hauptachse rechtwinklig verläuft. Auf allen durch den Brennpunkt gehenden Sehnen, sog. *Fokalsehnen*, sind die stets reellen Endpunkte durch den Brennpunkt und den Schnittpunkt mit der Leitlinie harmonisch getrennt. Auch ist die Leitlinie die Berührungssehne des vom Brennpunkt ausgehenden imaginären Tangentenpaares.

Ein Punkt  $P$  oder  $a^2 : c | y'$  der einen Leitlinie  $d$  hat eine durch den zugehörigen Brennpunkt  $F$  gehende Polare (S. 277f.)  $\frac{x}{c} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$ , während seine Verbindungsgerade mit dem Brennpunkt die Gleichung ergibt  $y'(x - c) \mp \frac{b^2}{c} y = 0$  (Nr. 40). Die beiden Geraden sind aber zueinander rechtwinklig — natürlich ebensowohl, wenn wir  $c$  durch  $-c$  ersetzen —, d. h. *die Polare eines Punktes der Leitlinie ist die*

zu seiner Verbindungsgeraden mit dem Brennpunkt rechtwinklige Fokalsehne<sup>52)</sup> (Fig. 93). Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Harmonische Pole  $P, P'$  auf der Leitlinie spannen am zugehörigen Brennpunkt einen rechten Winkel  $FPF'$ . Den kürzesten Ausdruck dieser überaus wichtigen Fokaleigenschaft bietet die Redeweise von Nr. 136: *Konjugiert harmonische Polaren aus einem Brennpunkt sind zueinander rechtwinklig*.

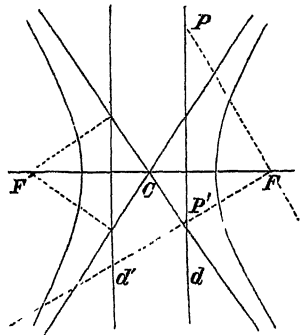


Fig. 93.

✱ 181. **Allgemeine Definition der Brennpunkte.** Die vorstehende Entwicklung, die von den Normalen aus zu den Brennpunkten hinleitet, führt zu dem Satz: Die Brennpunkte sind diejenigen Punkte  $F, F'$ , deren Polare  $d$  bez.  $d'$  die Kurve in den Fußpunkten der von  $F$  bez.  $F'$  zu ziehenden Kurvennormalen schneidet. In der Tat schneidet z. B. die Polare  $d$  des Brennpunktes  $F$  zugleich die Fußpunkte der von  $F$  ausgehenden imaginären Normalen aus, weil nach Nr. 176 für einen solchen Fußpunkt  $x = \pm c : e^2 = \pm \frac{a^2}{c}$  und wenigstens bei der Ellipse  $c > e^2 a$  ist. Dies besagt aber, daß die von einem Brennpunkt ausgehenden Tangenten zu sich selbst normal sind, also die absoluten Richtungen von Nr. 61 haben müssen. Dies folgt auch aus dem Satz, daß die durch einen Brennpunkt gehenden konjugierten Polaren Rechtwinkelpaare sind, weil ihre gemeinsamen harmonischen Strahlen von absoluter Richtung sind (Nr. 61).

Nun lassen sich aus den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zwei Paare konjugiert imaginärer Tangenten an einen reellen Kegelschnitt ziehen, die das *Parallelogramm der Tangenten von absoluter Richtung* (das umgeschriebene isotrope Parallelogramm) bilden. Von seinen vier endlichen Ecken müssen wirklich zwei reell und zwei konjugiert imaginär, die beiden im Endlichen gelegenen Diagonalen also reell sein; diese sind schon infolge der harmonischen Eigenschaften des



Vierseits (Nr. 67) zueinander rechtwinklige konjugierte Durchmesser, d. h. mit den Achsen identisch. Man gelangt so zu der übrigens nicht nur für Kurven des zweiten Grades gültigen allgemeinen Definition: *Brennpunkte einer Kurve heißen die Schnittpunkte ihrer Tangenten absoluter Richtung.*<sup>53)</sup>

Die Leitlinien als Polaren der Brennpunkte schneiden auf dem Kegelschnitt die imaginären Berührungspunkte der vier Tangenten absoluter Richtung aus. Daher sind dies auch die imaginären Schnittpunkte der Kurve mit ihrem Hauptkreis (Nr. 167, 6), denn ihre Tangenten sind zu sich selbst normal. Da demnach ihr Halbmesserquadrat  $a^2 \pm b^2$  beträgt, so ist die Länge ihrer konjugierten, d. h. in absoluter Richtung gemessenen Halbmesser Null (vgl. Nr. 170).

Die Gleichungen der Tangentenpaare von den Richtungskoeffizienten  $\pm i$  folgen leicht (Nr. 167, 2) als  $(y \mp ix)^2 + c^2 = 0$ , diejenigen der Tangentenpaare der Brennpunkte als

$$(12) \quad (x \mp c)^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + (y \pm ci)^2 = 0.$$

Offenbar stellen alle diese Gleichungspaare dieselben vier Tangenten dar.

Zugleich erinnern die letzten Gleichungen daran, daß die reellen und die imaginären Brennpunkte *assoziierte Paare* sind (Nr. 115).

182. **Brennstrahlen** (Fokalaradien) eines Kurvenpunktes  $P$  heißen die Strecken  $FP$ ,  $F'P$  seiner Verbindungsgeraden mit den Brennpunkten  $F$ ,  $F'$ .

Ist die Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt  $c \neq 0$  auszudrücken, so können wir in dem Quadrat  $(x' - c)^2 + y'^2$  derselben  $y'^2$  mit Hilfe der Kurvengleichung eliminieren. Unter Berücksichtigung der Definition  $c^2 = a^2 \mp b^2$  entsteht so der Ausdruck durch  $x$  allein  $e^2 x'^2 - 2cx' + a^2$  oder

$$(13) \quad (x' - c)^2 + y'^2 = \left(\frac{c}{a}x' - a\right)^2 = (ex' - a)^2.$$

Somit ist die Länge des Brennstrahls selbst eine lineare Funktion der Abszisse des Kurvenpunktes.

Betrachten wir nur die absolute Länge  $FP$ , so müssen wir für sie diejenige Wurzel aus  $(ex' - a)^2$  wählen, die einen

positiven Zahlenwert ergibt. Dieselbe ist im Falle einer Ellipse (14)

$$FP = a - ex',$$

denn die Exzentrizität  $e$  ist hier kleiner als Eins (Nr. 156) und für reelle Punkte ist  $x'^2 \leq a^2$ .

In der Hyperbel dagegen, wo  $e > 1$  ist, hat  $a - ex'$  nur für negatives  $x'$  einen positiven Wert, also für jeden Punkt auf demjenigen Zweig, in dessen Inneren der gewählte Brennpunkt nicht liegt. Für ein positives  $x'$ , d. h. einen Punkt des  $F$  umschließenden Zweiges, gibt aber, da dann  $x \geq a$ ,  $ex' - a$  den positiven Wert für die Länge des Brennstrahls.

B. Nach Nr. 178, 5 kann das Produkt der Brennstrahlen für die Fußpunkte der vier Normalen aus einem Punkt  $P$  durch den Abstand dieses Punktes von dem betreffenden Brennpunkt  $F$  ausgedrückt werden. Man findet es gleich

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} \cdot \overline{PF}^2.$$

**183. Definition der Mittelpunktskegelschnitte aus Brennpunkt und Leitlinie.** Der Ausdruck für die Länge des Brennstrahls  $FP$  eines Kurvenpunktes  $P(x|y)$  liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung  $ex - a = 0$  der Leitlinie, die zu dem Brennpunkt gehört. Daher ist die Länge  $FP$  dem Abstand des Punktes  $P$  von dieser Geraden proportional, denn dieser Abstand wird, abgesehen vom Vorzeichen, durch  $x - \frac{a}{e}$  gegeben (Nr. 42).

Wir erkennen als wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte: *Die Entfernung eines Punktes der Kurve vom Brennpunkt steht zu seiner Entfernung von der zugehörigen Leitlinie in einem konstanten Verhältnis, das gleich der Exzentrizität  $e$  ist.* Dasselbe gilt für den anderen Brennpunkt und dessen Leitlinie.

Umgekehrt kann ein Kegelschnitt als der Ort eines Punktes definiert werden, dessen Entfernung von einem festen Punkt, dem Brennpunkt  $F$ , zu seinem Abstand von einer festen Geraden, der Leitlinie  $d$ , proportional ist (Fig. 94). Man kann hier- nach die Kurve leicht konstruieren und ihre ganze Theorie entwickeln. Sind nämlich  $x_0|y_0$  die Koordinaten des Brenn-

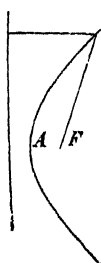


Fig. 94.

punktes, ist  $ux + vy + 1 = 0$  die Gleichung der Leitlinie und  $e$  die Verhältniszahl, so kann die Gleichung des Ortes sofort geschrieben werden als

$$(15) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{e^2}{u^2 + v^2} (ux + vy + 1)^2,$$

also auch (Nr. 35)

$$= e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - d)^2;$$

denn die rechte Seite ist das Quadrat des  $e$ -fachen Abstandes. Die Gleichung stellt, je nachdem  $e$  kleiner oder größer als Eins ist, eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, deren Achsen leicht zu ermitteln sind.

Man kann diese Eigenschaft auch so aussprechen: Wenn eine Kurve so beschaffen ist, daß die Entfernung irgend eines ihrer Punkte  $P$  von einem festen Punkte als eine ganze lineare Funktion der Koordinaten von  $P$  ausgedrückt werden kann, so ist die Kurve ein Kegelschnitt mit dem festen Punkte als Brennpunkt.<sup>54)</sup>

B. 1) Die Brennpunkte der zu einem Punkt einer Ellipse  $E$  als Mittelpunkt und mit der zugehörigen Tangente und Normale als Achsen beschriebenen Ellipsen, die die kleine Achse der gegebenen Ellipse  $E$  in ihrem Mittelpunkt berühren, liegen auf zwei mit  $E$  konzentrischen Kreisen, deren Radien die Summe und Differenz der Halbachsen derselben sind.

2) Wenn eine Ecke eines der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramms den Scheitelberührungskreis durchläuft, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke denselben gleichfalls, und die beiden anderen Ecken liegen auf zur Hauptachse normalen Geraden, den Leitlinien.

184. **Fokalgleichung.** Die Gleichung von Nr. 182 kann auch als das Ergebnis der Transformation der Achsengleichung zum Brennpunkt  $c|0$  als Nullpunkt angesehen werden, indem man sie in der Form schreibt:

$$(16) \quad (x - c)^2 + y^2 = (ex - a)^2 = [e(x - c) \mp p]^2.$$

Dabei ist  $x - c$  die vom Brennpunkt aus gezählte Abszisse

$$\text{und (17) } p = \frac{b^2}{a} = \pm a(1 - e^2)$$

offenbar der zur Hauptachse senkrechte Brennstrahl oder die Ordinate im Brennpunkt. Diese heißt der *Linearparameter* ( $2p = \text{latus rectum}$ ) des Kegelschnittes.

Gebräuchlicher ist es, Polarkoordinaten einzuführen, die vom Brennpunkt und der Hauptachse aus gezählt werden. Dann ist  $x - c = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ , wo  $\vartheta$  die Amplitude oder Anomalie des Brennstrahls  $r$  heißt. Nach Nr. 182 haben wir daher für die Ellipse  $r = a - ex = p - er \cos \vartheta$  zu setzen und erhalten damit als *die Fokalgleichung der Ellipse*

$$(18) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \text{ für } p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Setzen wir umgekehrt für die Hyperbel  $r = ex - a = p + er \cos \vartheta$ , so wird *die Fokalgleichung der Hyperbel*

$$(19) \quad r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta} \text{ für } p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Diese liefert positive Werte von  $r$  nur für Amplituden, die, vom Zeichen abgesehen, größer sind als der halbe Asymptotenwinkel  $\vartheta_0$  ( $\cos \vartheta < \frac{1}{e}$ , Nr. 163), jedoch negative oder rückwärts abzutragende  $r$  für kleinere Amplituden. Will man also nur positive Brennstrahlen, so stellt die Gleichung nur den den Brennpunkt umschließenden Zweig der Hyperbel dar ( $\vartheta_0 < \vartheta < 2\pi - \vartheta_0$ ). Den anderen Zweig definiert dann ebenso die Gleichung

$$(20) \quad r = \frac{-p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (\pi - \vartheta_0 < \vartheta < \pi + \vartheta_0),$$

die aus der ersten hervorgeht, wenn man  $-r | \pi + \vartheta$  statt  $r | \vartheta$  schreibt (Nr. 21), sie ist daher eigentlich keine neue Gleichung.

Die auf den Brennpunkt  $-c | 0$  bezogenen Fokalgleichungen der Ellipse bez. Hyperbel lauten

$$(21) \quad r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}, \quad \text{bez. } r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}.$$

B. 1) Das harmonische Mittel (vgl. Nr. 15, 2) zwischen den Abschnitten einer Fokalsehne ist konstant und dem Linearparameter gleich.

Denn wenn der Brennstrahl  $FP$ , rückwärts verlängert, die Kurve noch in  $P'$  schneidet, so ist

$$FP = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad FP' = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}, \quad \text{somit } \frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'} = \frac{2}{p}.$$

Wenn dagegen  $P$  und  $P'$  auf *verschiedenen* Zweigen dieser Hyperbel

liegen, so müssen ihre Brennstrahlen mit verschiedenen Vorzeichen eingeführt werden.

2) Das Rechteck aus den Abschnitten einer Fokalsehne steht zur ganzen Sehne in einem konstanten Verhältnis.

Dieser Satz ist nur ein anderer Ausdruck des letzten; aber man erkennt auch direkt, daß die Größen  $FP \cdot FP'$ ,  $PF + FP'$  in einem konstanten Verhältnis stehen, denn sie sind

$$\frac{p^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{2p}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}.$$

3) Jede Fokalsehne gibt, mit der Hauptachse multipliziert, das Quadrat des zu ihr parallelen Durchmessers.

Denn das Quadrat des Halbmessers, der mit der Hauptachse einen Winkel  $\vartheta$  bildet, ist (Nr. 156)

$$R^2 = \frac{\pm b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta},$$

und daher ist die in 2) gefundene Länge der Sehne

$$PF + FP' = \frac{2R^2}{a}.$$

4) Die Summe der zu zwei konjugierten Durchmessern parallelen Fokalsehnen ist konstant.

Denn die Summe der Quadrate zweier konjugierten Durchmesser ist konstant (Nr. 170).

5) Die Summe der Reziproken zweier zueinander rechtwinkligen Fokalsehnen ist konstant.

**185. Summe bez. Differenz der Brennstrahlen.** Ein Punkt  $P(x|y)$  einer Ellipse hat nach dem Vorstehenden vom Brennpunkt  $F$  oder  $c|0$ , bez. vom Brennpunkt  $F'$  oder  $-c|0$  die positiven Entfernungen

$$FP = r = a - ex, \quad F'P = r' = a + ex.$$

Daher ist  $FP + F'P = r + r' = 2a$ : Die Summe der Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist konstant und der großen Achse gleich. Vgl. Fig. 95.

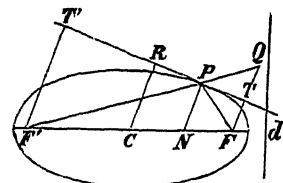


Fig. 95.

Dagegen hat ein Punkt der Hyperbel, je nachdem er auf dem positiven oder negativen Zweige liegt, von  $F$  bez.  $F'$  die positiven Entfernungen

$$r = ex - a, \quad r' = ex + a \quad \text{oder} \quad r = a - ex, \quad r' = -a - ex.$$

Also ist entweder  $r' - r = 2a$  oder  $r - r' = 2a$ , d. h.

*Die Differenz der Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes ist konstant und der Hyperbelachse gleich.*

In allen Fällen ist aber das Produkt

$$(22) \quad rr' = \pm (a^2 - e^2 x^2) = \pm \left( a^2 - x^2 \pm \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) = \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2} = b'^2.$$

*In den Mittelpunktskurven ist daher das Rechteck der Brennstrahlen eines Punktes P gleich dem Quadrat des dem Halbmesser von P konjugierten Halbmessers.*

Weil ferner nach Nr. 177 das Quadrat der Normale den Wert  $b^2 b'^2 : a^2$  hat, verhält sich das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes zum Quadrat seiner Normale wie  $a^2 : b^2$ .

Mit Hilfe der Tatsache, daß in einem Dreieck eine Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen, weist man leicht geometrisch nach, daß für jeden Punkt Q außerhalb, bez. innerhalb der Ellipse

$$FQ + F'Q > 2a, \quad \text{bez.} \quad FQ + F'Q < 2a,$$

und für Q außerhalb, bez. innerhalb der Hyperbel

$$F'Q - FQ < 2a, \quad \text{bez.} \quad F'Q - FQ > 2a.$$

Daher ist die „bifokale Beziehung“  $(r \pm r')^2 = 4a^2$  für Punkte der Ellipse bez. Hyperbel charakteristisch; sie kann als die bipolare Gleichung dieser Kurven bezeichnet werden (S. 45).

**186. Fadenkonstruktion.** Die bifokale Beziehung liefert der elementaren Geometrie die Definition der Mittelpunktskegelschnitte: *Der Ort der Spitze eines Dreiecks, von dem die Basis  $2c$  und die Summe bez. Differenz der Seiten ( $= 2a$ ) gegeben ist, ist eine Ellipse bez. Hyperbel mit den Basisenden als Brennpunkten und mit der Hauptachse  $2a$ .*

Zum direkten Beweis dieser Umkehrung wählt man die Basis zur  $x$ -Achse, ihre Mitte zum Nullpunkt und erhält die Gleichung des Ortes

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} \pm \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a.$$

Durch Entfernung der Wurzelgrößen nimmt sie die Form an

$$(23) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ist die Summe der Seiten gegeben, so ist  $a > c$ , der Koeffizient

von  $y^2$  daher positiv und der Ort eine *Ellipse*. Ist aber die *Differenz* gegeben, so ist  $a < c$ , der Koeffizient von  $y^2$  negativ und der Ort eine *Hyperbel*.

Diese Definition gibt auch in der sog. *Fadenkonstruktion* die Mittel, eine Ellipse oder Hyperbel mechanisch zu beschreiben. Sind die Enden eines Fadens an zwei festen Punkten  $F$  und  $F'$  befestigt, so beschreibt ein Stift, der sich derart bewegt, daß er den Faden immer gleichmäßig gestreckt erhält, eine *Ellipse* mit  $F$  und  $F'$  als Brennpunkten und der Fadenlänge als großer Achse.<sup>55)</sup> Noch besser wird man einen geschlossenen Faden von der Länge  $2a + 2c$  um zwei in  $F$  und  $F'$  befestigte Nadeln herumlegen und mit Hilfe des Zeichenstiftes gestreckt erhalten.

Um eine *Hyperbel* zu beschreiben, lasse man ein Lineal (Fig. 96) an einem Ende  $F'$  drehbar befestigt sein; wenn dann

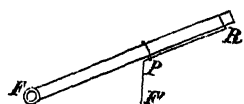


Fig. 96.

ein am festen Punkt  $F'$  befestigter Faden auch an einem Punkt  $R$  des Lineals befestigt ist und durch einen Ring in  $P$  gespannt erhalten wird, so beschreibt der Punkt  $P$  bei der Drehung des Lineals

ein endliches Stück eines Hyperbelastes. Denn da die Summe von  $F'P$  und  $PR$  konstant ist, muß es die Differenz von  $F'P$  und  $F'P$  auch sein.

**187. Der Winkel der Brennstrahlen eines Kurvenpunktes hat die Tangente und die Normale des Punktes zu Halbierungslinien.** Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des in Nr. 179 ausgesprochenen Satzes, daß Tangente und Normale eines Punktes  $P$  die Hauptachse in Punkten schneiden, die zu den Brennpunkten  $F, F'$  harmonisch liegen. Denn dann müssen nach Nr. 60 auch die Brennstrahlen  $FP, F'P$  jenes Punktes in bezug auf  $PT$  und  $PN$  harmonisch, also in bezug auf das rechtwinklige Paar  $PT, PN$  symmetrisch sein (Fig. 95). (Vgl. Nr. 95.)

Zum direkten Beweis bestimmen wir die Winkel der Brennstrahlen mit der Tangente, indem wir ihre Sinus durch die Koordinaten ausdrücken. Zunächst berechnen wir die Abstände der Tangente von den Brennpunkten (Fig. 95). Die

Entfernung des Brennpunktes  $F(c|0)$  von der Tangente  $\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1 = 0$  ist (Nr. 42):

$$FT = \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)}} = \frac{1 - \frac{ex'}{a}}{\frac{b'}{ab}} \quad (\text{Nr. 170, 2}).$$

Also ist

$$(24) \quad FT = \frac{b}{b'} (a - ex') = \frac{b}{b'} \cdot F'P$$

$$\text{und ebenso} \quad F'T' = \frac{b}{b'} (a + ex') = \frac{b}{b'} \cdot F'P.$$

Für die Hyperbel gelten dieselben Formeln mit einem bloßen Zeichenwechsel (Nr. 182).

$$\text{Daher ist } \frac{FT}{F'P} = \sin FPT' = \frac{b}{b'}, \quad \frac{F'T'}{F'P} = \sin F'PT' = \frac{b}{b'},$$

d. h. die Tangente bildet mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes gleiche Winkel. Aus der Betrachtung der Lage der Tangente zur Kurve ist aber offenbar, daß die Tangente der Ellipse die äußere

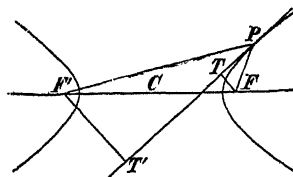


Fig. 97.

und die Tangente der Hyperbel die innere Halbierungslinie des Winkels der Brennstrahlen ist. (Vgl. Fig. 95 und 97.) Dieser Satz erlaubt, die Tangenten des durch die Fadenkonstruktion erhaltenen Kegelschnittes sofort anzugeben.

Auch liegt hierin die Erklärung des Namens Brennpunkte: Lichtstrahlen, die von  $F$  ausgehen, werden von der Ellipse nach  $F'$  konvergent reflektiert, und von der Hyperbel so, daß sie von  $F'$  aus divergieren. Gleiches gilt bei Schallwellen.

B. 1) Das Verhältnis der Sinus zwischen den Winkeln der Normale mit Brennstrahl und Hauptachse ist als Verhältnis ihrer Gegenseiten im Dreieck  $NPF$  (Fig. 95) gleich der Exzentrizität.

2) Die Projektion der Normale auf den Brennstrahl ist gleich dem Linearparameter; die Projektion der vom Kurvenpunkt bis zum Schnitt mit der Nebenachse gemessenen Normalenstrecke ist gleich der halben Hauptachse. (Vgl. Nr. 189, 1.)

3) Wenn für die Endpunkte zweier konjugierten Halbmesser  $a_1, b_1$  einer Ellipse die halben Winkel der Brennstrahlen gleich  $\varphi$  bez.  $\psi$  sind, so daß



$$b_1 \cos \varphi = a_1 \cos \psi = b$$

$$\text{oder} \quad \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{a_1^2 - b^2}{b^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b_1^2 - b^2}{b^2}$$

$$\text{ist, so folgt aus} \quad a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{auch} \quad \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

also konstant.

Für die besondere Ellipse mit  $c = b$  oder  $2c^2 = a^2$  ist der Wert Eins, die Projektion der Normale auf den Brennstrahl gleich  $\frac{1}{2}a$ . Für die gleichseitige Hyperbel wird sie zu  $a$ , weil  $b^2 = a^2$  und  $c^2 = 2a^2$  ist.<sup>56)</sup>

188. Aus dem Hilfssatz von Nr. 187 folgert man:

$$(25) \quad FT \cdot F'T' = \frac{b^2}{b'^2} (a^2 - e^2 x'^2) = b^2 \quad (\text{Nr. 185}):$$

*Das Rechteck aus den Brennpunktsabständen der Tangente ist konstant und gleich dem Quadrat der halben Nebenachse.*

Somit ist für zwei beliebige Tangenten (Fig. 98):

$$FT \cdot F'T' = FS \cdot F'S',$$

$$\text{oder} \quad \frac{FT}{FS} = \frac{F'T'}{F'S'}.$$

Aber  $FT:FS$  ist das Verhältnis der Sinus der Teile, in die der Strahl  $FP$  den Winkel der Tangenten teilt, und  $F'S':F'T'$  ist das Verhältnis der Sinus der Teile, in die  $F'P$  denselben Winkel teilt; wir haben also

$$(26) \quad \sphericalangle TPF = \sphericalangle S'PF'.$$

Daher werden die Winkel  $TPS'$  und  $FPP'$  von derselben Geraden halbiert: *Zwei Tangenten eines Kegelschnittes haben dieselben Winkelhalbierenden wie die Brennstrahlen ihres Schnittpunktes.* Hieraus geht der Satz von Nr. 187 als besonderer Fall hervor, sobald der Tangentenschnittpunkt in die Kurve selbst rückt.

Die Beispiele zeigen, in welcher Weise sich infolge der Analogie zwischen den Gleichungen der Tangente und Polare einige Eigenschaften der Tangente auf die Polare übertragen.

B. 1) Wenn sich ein Punkt in einer festen Senkrechten zur Achse bewegt, so dreht sich die von ihm auf seine Polare gefüllte Senkrechte um einen festen Punkt in der Achse.<sup>57)</sup>

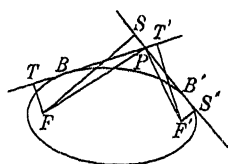


Fig. 98.



rührt der andere  $TP$  einen Kegelschnitt, der  $F$  zum Brennpunkt hat. Eine Ellipse oder Hyperbel entsteht, je nachdem  $F$  innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.

B. 1) Die Länge  $CT'$  einer Geraden, die durch den Mittelpunkt parallel zu einem Brennstrahl  $F'P$  gezogen und durch die in  $P$  berührende Tangente begrenzt wird, ist konstant und gleich  $a$ .

Diese Länge wird gefunden, indem man den Abstand des Mittelpunktes von der Tangente  $ab:b'$  durch  $b:b' = \sin F'PT$  dividiert.

2) Die Normale teilt die Entfernung der Brennpunkte in zwei Abschnitte, die den Brennstrahlen selbst proportional sind.

Die Entfernung des Fußpunktes der Normale in der  $x$ -Achse vom Mittelpunkt ist  $= e^2 x'$  (Nr. 176); seine Abstände von den Brennpunkten sind somit  $c + e^2 x'$ ,  $c - e^2 x'$ , Größen, die offenbar das  $e$ -fache der Brennstrahlen  $a + ex'$ ,  $a - ex'$  sind.

3) Die Fußpunkte der von irgend einem Punkt  $P'$  der kleinen Achse aus gezogenen Normalen zur Ellipse liegen auf dem durch  $P'$  und die beiden Brennpunkte gehenden Kreis (Nr. 178).

4) Polargleichung des Ortes der Fußpunkte der Lote, die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällt werden.

Der Abstand des Brennpunktes von der Tangente wird ausgedrückt, indem man in die Gleichung von Nr. 167,1 einsetzt  $x = c$ ,  $y = 0$ . Demnach ist die Polargleichung des Ortes

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha - c \cos \alpha},$$

$$\text{oder} \quad r^2 + 2cr \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha,$$

$$\text{oder} \quad r^2 + 2cr \cos \alpha = \pm b^2.$$

Dies ist nach Nr. 108 die Polargleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der  $x$ -Achse in der Entfernung  $-c$  vom Brennpunkt liegt;  $a$  ist der Radius.

5) Nimmt man vom Brennpunkt  $F$  in bezug auf jede Tangente den symmetrischen Punkt  $Q$ , so ist der Ort von  $Q$  der um den anderen Brennpunkt  $F'$  mit dem Radius  $2a$  beschriebene Kreis.

6) Man bilde die Gleichung für den Ort der Fußpunkte der Lote zu den Tangenten aus den Punkten der kleinen Achse, die vom Mittelpunkt den Abstand  $c$  haben.

Die Summe der Quadrate der Abstände einer Tangente von den Punkten  $0 | \pm c$  ist konstant und gleich  $2a^2$ .

7) Der Ort des Schnittpunktes des vom Brennpunkt auf die Tangente eines Mittelpunktskegelschnittes gefällten Lotes mit der vom Mittelpunkt nach dem Berührungspunkt gezogenen Geraden ist die entsprechende Leitlinie.

8) Der Ort des Schnittpunktes des vom Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Lotes mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes ist der Kreis, der den betreffenden Brennpunkt zum Mittelpunkt hat und durch die Scheitel der kleinen Achse geht.

9) Der Ort des Fußpunktes des Lotes, das man vom Schnittpunkt der Tangente mit der kleinen Achse auf den Brennstrahl des Berührungspunktes fällt, ist derselbe Kreis wie in B. 8).

190. Der durch eine Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel. Unter Voraussetzung der Achsengleichung seien  $x_1|y_1$  bez.  $x_2|y_2$  die Koordinaten der Endpunkte  $P_1, P_2$  einer Sehne, ihr Pol  $T$  habe die Koordinaten  $x'|y'$ , die Brennstrahlen dieser Punkte seien  $r_1, r_2, r'$  und ihre Anomalien  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta'$  bezogen auf  $F$  oder  $c|0$ . Alsdann gelten die Gleichungen:

$$\cos \vartheta' = \frac{x' - c}{r'}, \quad \sin \vartheta' = \frac{y'}{r'} \quad \text{und} \quad \cos \vartheta_1 = \frac{x_1 - c}{r_1}, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{y_1}{r_1}.$$

Demnach ist für den Winkel, den die Länge  $TP_1$  der vom Pol ausgehenden Tangente am Brennpunkt spannt (Fig. 100),

$$\cos (\vartheta_1 - \vartheta') = \frac{(x' - c)(x_1 - c) + y'y_1}{r'r_1}.$$

Mit Hilfe der Gleichung der Tangente  $\frac{x'x_1}{a^2} \pm \frac{y'y_1}{b^2} = 1$  kann man  $y'y_1$  eliminieren und erhält so

$$\begin{aligned} r'r_1 \cos (\vartheta_1 - \vartheta') &= x'x_1 - c(x' + x_1) + c^2 \pm b^2 \left(1 - \frac{x'x_1}{a^2}\right) \\ &= e^2 x'x_1 - c(x' + x_1) + a^2 = (a - ex')(a - ex_1); \end{aligned}$$

oder, weil  $r_1 = a - ex_1$  ist,

$$(27) \quad \cos (\vartheta_1 - \vartheta') = \frac{a - ex'}{r'}.$$

Weil dieser Wert nur von den Koordinaten  $x'|y'$  abhängt und die Koordinaten  $x_1|y_1$  des Berührungspunktes nicht enthält, so spannt auch die zweite Tangente aus  $T$  denselben Winkel  $\vartheta_1 - \vartheta' = \vartheta' - \vartheta_2$  am Brennpunkt: *Es wird also der von irgend einer Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel  $P_1FP_2 = \delta$  durch die Verbindungslinie des Brennpunktes mit ihrem Pol  $T$  halbiert<sup>58)</sup>, und zwar ist*

$$(28) \quad \cos \frac{\delta}{2} = \frac{a - ex'}{\sqrt{(x' - c)^2 + y'^2}}.$$

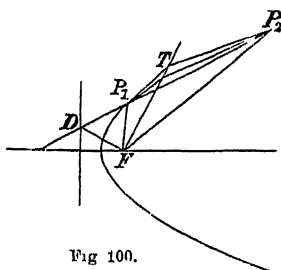


Fig. 100.

Eine durch den Brennpunkt selbst gehende Sehne spannt an ihm einen gestreckten Winkel ( $\pi$ ). Daher ergibt sich als ein besonderer Fall der Satz von Nr. 180 in der Form: *Der Brennstrahl des Poles einer Fokalsehne ist zu ihr senkrecht.* Nun hat die Fokalsehne  $FT$  ihren Pol  $D$  im Schnitt der Leitlinie mit der Polare von  $T$ ,  $\sphericalangle DFT$  ist ein Rechter, somit ist  $FD$  die Halbierungslinie des Nebenwinkels von  $\sphericalangle P_1FP_2$ .

B. 1) Der Winkel, den das zwischen zwei festen Tangenten enthaltene Stück einer veränderlichen Tangente am Brennpunkt spannt, ist konstant.

Führt man die Brennstrahlen der Berührungspunkte ein, so ist der genannte Winkel die Hälfte desjenigen, der durch die Berührungssehne der festen Tangenten gespannt wird.

2) Beschreibt man über dem zwischen den Scheiteltangenten der Hauptachse enthaltenen Stück einer Tangente als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch die Brennpunkte.

3) Werden zwei feste Punkte  $Q, Q'$  eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen Punkt  $P$  desselben verbunden, so fassen diese Verbindungslinien in der Leitlinie des Kegelschnittes einen Abschnitt zwischen sich, der am zugehörigen Brennpunkt einen konstanten Winkel spannt.

Denn, bezeichnen wir die Schnittpunkte jener beiden Sekanten der Kurve mit der Leitlinie durch  $R, R'$ , so ist nach dem Text

$$\sphericalangle PFR = \frac{1}{2} \sphericalangle PFQ + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle PFR' = \frac{1}{2} \sphericalangle PFQ' + \frac{\pi}{2},$$

somit  $\sphericalangle RFR' = \frac{1}{2} \sphericalangle QFQ'$ . Geht die Sehne  $QQ'$  durch den Brennpunkt, so ist dieser konstante Winkel stets ein Rechter: Die Verbindungsgeraden eines beweglichen Punktes  $P$  des Kegelschnittes mit den Enden einer Fokalsehne schneiden die Leitlinie in harmonischen Punktepaaren.

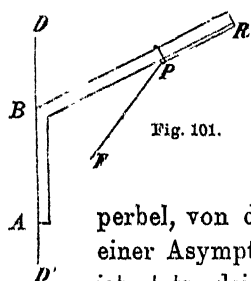
Der Satz ist geeignet, ein gutes Beispiel für den Gebrauch der Polarkoordinaten in der Untersuchung der Kegelschnitte zu geben. Er entspricht übrigens dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen am Kreis.

191. Für die Hyperbel gibt wiederum (vgl. Nr. 174) die Beziehung zu den Asymptoten einige Zusätze. Weil sie Tangenten mit unendlich fernem Berührungspunkt sind, so geht die Leitlinie durch die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die Asymptoten gefällten Lote (Nr. 190). Man sehe die Figur zu Nr. 180, wo sich dieser Satz als besonderer Fall unmittelbar anschließt.

Hieraus folgt mittelst  $c \sin \vartheta_0 = b$  (Nr. 163): Der Abstand der Asymptoten von den Brennpunkten ist gleich der halben Nebenachse  $b$ . Dies ist auch ein Sonderfall von Nr. 189, S. 365, da die Brennpunktsabstände für die Asymptoten offenbar einander gleich, also gleich  $b$  sind.

Der Brennstrahl eines Punktes der Hyperbel ist gleich seiner Entfernung von der Leitlinie, auf einer Parallelen zur Asymptote gemessen. Denn die Entfernung vom Brennpunkt ist das  $e$ -fache des Abstandes von der Leitlinie (Nr. 183), und die Entfernung von der Leitlinie verhält sich zur Länge der bezeichneten Parallelen wie  $\cos \vartheta_0 = 1:e$  (Nr. 163) zu Eins.

Man kann daraus eine Methode zur Erzeugung der Hyperbel durch eine stetige Bewegung ableiten. Ein in  $B$  gebrochenes Lineal  $ABR$  (Fig. 101) bewegt sich mit seiner Kante  $AB$  längs der festen Geraden  $DD'$ . Ein Faden von der Länge  $RB$  ist an den zwei Punkten  $R$  und  $F$  befestigt, während ein Ring in  $P$  den Faden stets gespannt hält. Dann beschreibt der Punkt  $P$  bei der Bewegung des Lineals eine Hyperbel, von der  $F$  ein Brennpunkt,  $BR$  die Richtung einer Asymptote und  $DD'$  die Leitlinie ist; denn  $PF$  ist stets gleich  $PB$ .



192. **Scheitelgleichung.** Da nur solche Gleichungen, die nicht auf den Mittelpunkt bezogen sind, für Kegelschnitte aller Gattungen (Nr. 131) gelten, so erweist sich unter den besonderen Gleichungsformen zu vergleichenden Betrachtungen neben der Fokalgleichung die auf die Hauptachse und eine Scheiteltangente bezogene Gleichung als geeignet, die sog. Scheitelgleichung. Liegt eine Ellipse auf derjenigen Seite der Tangente  $x=0$ , auf der sämtliche Punkte positive Abszissen  $x$  haben, so lautet die „Scheitelgleichung“ dieser Kurve

$$(29) \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Für die Hyperbel ergibt sich, wenn  $x=0$  den Zweig berührt, dessen Punkte positive Abszissen  $x$  haben:

$$(30) \quad \frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Führen wir durch  $b^2 = ap$  nach Nr. 184 den Linearparameter  $p$  ein, so sind die *Scheitelgleichungen der Mittelpunktskurven*

$$(31) \quad y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2.$$

Demnach ist das Quadrat der Ordinate in der Ellipse *kleiner*, in der Hyperbel *größer* als das Rechteck aus der Abszisse und der im Brennpunkt halbierten Sehne  $2p$ . Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß bei der Parabel diese Flächen *gleich* sind. Auf Grund dieser Eigenschaften sind die Namen Ellipse, Hyperbel und Parabel zuerst gegeben worden.<sup>59)</sup>

Dieselbe Gleichungsform bleibt offenbar auch noch bestehen, wenn wir sie auf einen Durchmesser und die Tangente in einem seiner Endpunkte beziehen, jedoch ist dann  $b'^2 : a'$  nicht die durch den Brennpunkt gehende Ordinate (Nr. 184, 3).

193. Zuweilen kann man die Kurve mit Vorteil auf die *Tangente und die Normale in einem Kurvenpunkt als Koordinatenachsen* beziehen. Damit die  $x$ -Achse die Kurve in zwei vereinten Punkten schneide, muß  $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$  ein Quadrat, also  $a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$  sein. Der Berührungspunkt ist der Nullpunkt, wenn  $a_{33} = 0$ , also auch  $a_{13} = 0$  ist. Die Gleichung hat so die Form:

$$(32) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0.$$

B. 1) *Die Hypotenusen der einem Kegelschnitt eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke von gegebener Gegenecke gehen durch einen festen Punkt in der Normale dieser Ecke* (Satz von Frégier).

Ist  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$  die Gleichung eines Geradenpaares, so multiplizieren wir diese Gleichung mit  $a_{11}$ , die der Kurve (32) mit  $A$ , subtrahieren und erhalten

$$2(a_{13}A - a_{11}B)xy + (a_{22}A - a_{11}C)y^2 + 2a_{23}Ay = 0$$

als (Nr. 44) die Gleichung einer durch die Schnittpunkte des Geradenpaares und des Kegelschnittes gehenden Kurve. Aber dieselbe kann in  $y = 0$  und

$$2(a_{12}A - a_{11}B)x + (a_{22}A - a_{11}C)y + 2a_{23}A = 0$$

zerlegt werden; daher muß diese letzte die Gleichung der die Endpunkte der gegebenen Geraden verbindenden Sehne sein. Der Punkt, in dem diese Sehne die Normale, d. h. die  $y$ -Achse, schneidet, ist bestimmt durch seine Ordinate  $y_0 = \frac{2a_{23}A}{a_{11}C - a_{22}A}$ . Sind aber

die Geraden rechtwinklig, so ist  $C = -A$  (Nr. 58), der Abschnitt in der Normale also konstant und gleich

$$y_0 = -2a_{23} : (a_{11} + a_{22}).$$

Für den *Kreis* ist der absolute Wert von  $y_0$  dem Radius gleich, d. h. die Hypotenuse geht durch den Mittelpunkt, für die *gleichseitige Hyperbel* ist  $y_0$  unendlich groß, d. h. die Hypotenuse ist immer der Normale parallel. Wenn man daher durch einen Punkt  $P$  der gleichseitigen Hyperbel zwei zueinander rechtwinklige Sehnen zieht, so ist das von  $P$  auf die Verbindungssehne ihrer Endpunkte gefällte Lot die Tangente der Kurve.

Der Beweis zeigt aber auch, daß dieser Satz *allgemein* wahr ist, sobald  $C:A$  konstant ist. Zieht man also durch einen Kurvenpunkt Geraden, die mit der Normale Winkel bilden, für die das Produkt der trigonometrischen Tangenten konstant ist, so geht die Sehne ihrer Endpunkte durch einen festen Punkt der Normale.

2) Auf einer Tangente eines Kegelschnittes wird die konstante Strecke  $AB$  verschoben; welches ist der Ort des Schnittpunktes der von  $A$  und  $B$  an den Kegelschnitt gelegten Tangenten?

Die Gleichung des Paares von Tangenten, die vom Punkt  $x'|y'$  an den auf die feste Tangente  $y = 0$  bezogenen Kegelschnitt gehen, wird nach S. 302 gefunden; für  $y = 0$  erhalten wir aus ihr eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln nach der Voraussetzung eine konstante Differenz haben sollen. Der Ausdruck dieser Bedingung liefert die Gleichung des Ortes, die eine Kurve zweiten Grades darstellt.

Mit Hilfe derselben Gleichung würde man auch den Ort des Schnittpunktes der Tangenten finden, wenn die Summe, das Produkt usw. der in der Achse gebildeten Abschnitte gegeben wäre.

194. Wir schließen hier einige auf die *Fokaleigenschaften der Kegelschnitte* bezügliche Aufgaben und Sätze an und fordern den Leser auf, die fehlenden Beweise zu entwickeln. Die Beispiele 15) bis 20) zeigen die Anwendbarkeit der Methode der exzentrischen Anomalie (Nr. 159).

B. 1) Die im Endpunkt einer Brennpunktsordinate gezogene Tangente eines Kegelschnittes schneidet die Verlängerung der Ordinate eines beliebigen Punktes  $P$  der Kurve derart, daß der Abstand dieses Schnittpunktes vom Fußpunkt der Ordinate so groß ist wie die Länge des Brennstrahls von  $P$ .

2) Werden vom Brennpunkt eines Kegelschnittes gegen seine Tangenten unter gegebenem Winkel gerade Linien gezogen, so ist der Ort ihrer Fußpunkte ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse des Kegelschnittes liegt.



3) Die Geraden, die je einen Brennpunkt mit dem Fußpunkt des vom anderen Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes verbinden, schneiden einander in der entsprechenden Normale des Kegelschnittes und halbieren sie.

4) Die Fokalphargleichung der Sehne, die die Punkte von den Amplituden  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  verbindet<sup>60</sup>), ist

$$\frac{p}{r} = e \cos \vartheta + \sec \beta \cos (\vartheta - \alpha) \quad (\text{Nr. 47, 3}).$$

5) Die Fokalphargleichung der Tangente in dem Punkt von der Amplitude  $\alpha$  lautet<sup>61</sup>)

$$\frac{p}{r} = e \cos \vartheta + \cos (\vartheta - \alpha).$$

6) Die Halbierungslinien der Winkel, die die Brennstrahlen eines Punktes  $P$  mit der Hauptachse bilden, und die in  $P$  gezogene Tangente der Kurve schneiden sich in den Tangenten der auf der Hauptachse liegenden Scheitel.

7) Geht eine Sehne  $P_1P_2$  eines Kegelschnittes durch einen festen Punkt  $O$ , so ist  $\text{tg } \frac{1}{2} P_1FO \cdot \text{tg } \frac{1}{2} P_2FO$  konstant.

Wir geben einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes;<sup>62</sup>) einen analytischen liefert die Gleichung in 4). Denken wir irgendwo in  $P_1P_2$  (Fig. 100) einen Punkt  $O$  genommen, und sei  $FO$  das  $e'$ -fache der Entfernung dieses Punktes von der Leitlinie; so gelten, da die Abstände der Punkte  $P_1$  und  $O$  von der Leitlinie zu  $P_1D$  und  $OD$  proportional sind, die Gleichungen

$$\frac{FP_1}{P_1D} : \frac{FO}{OD} = \frac{e}{e'} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin P_1DF}{\sin P_1FD} : \frac{\sin ODF}{\sin OFD} = \frac{e}{e'}.$$

Also ist nach Nr. 190  $\cos OFT : \cos P_1FT = e : e'$ , oder, weil (Nr. 190)  $P_1FT$  die Hälfte der Summe und  $OFT$  die Hälfte der Differenz der Winkel  $P_1FO$  und  $P_2FO$  ist,

$$\text{tg } \frac{1}{2} P_1FO \cdot \text{tg } \frac{1}{2} P_2FO = (e - e') : (e + e').$$

Das Produkt dieser Tangenten bleibt konstant, wenn  $O$  einen Kegelschnitt durchläuft, der mit dem gegebenen Brennpunkt und Leitlinie gemeinsam hat.

8) *Unter welcher Bedingung sind zwei Punkte  $x' | y'$ ,  $x'' | y''$  die Endpunkte einer Fokalsehne?*

Die Bedingung kann in verschiedenen äquivalenten Formen ausgedrückt werden, von denen jedoch zwei vorzüglich brauchbare dadurch erhalten werden, daß man ausdrückt, es sei  $\vartheta'' = \vartheta' + \pi$ , für  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$  als die Amplituden dieser Punkte. Die Bedingungen  $\sin \vartheta'' = -\sin \vartheta'$ ,  $\cos \vartheta'' = -\cos \vartheta'$  geben bez.

$$\frac{y'}{a - ex'} + \frac{y''}{a - ex''} = 0, \quad \frac{x' - c}{a - ex'} + \frac{x'' - c}{a - ex''} = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$a(y' + y'') = e(x'y'' + x''y'), \quad 2ex'x'' - (a + ce)(x' + x'') + 2ac = 0.$$

9) Wenn in den Endpunkten einer Fokalsehne die Normalen gezogen sind, so halbiert eine durch ihren Schnittpunkt der großen Achse parallel gezogene Gerade die Sehne.<sup>63)</sup>

Da jede Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert, so ist der Schnittpunkt der Normalen der Kurve in den Endpunkten einer Fokalsehne der Mittelpunkt des Kreises, der dem von der Sehne und den Verbindungslinien ihrer Endpunkte mit dem anderen Brennpunkt gebildeten Dreieck eingeschrieben ist. Sind aber  $a, b, c$  die Seiten eines Dreiecks von den Ecken  $x'|y', x''|y'', x'''|y'''$ , so sind nach Nr. 14, 8 die Koordinaten vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises:

$$x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

Im gegenwärtigen Fall sind die Koordinaten der Ecken  $x'|y', x''|y'', -c|0$  und die Längen der Gegenseiten bez.  $a + ex'', a + ex', 2a - ex' - ex''$ . Daher ist

$$4ay = (a + ex')y'' + (a + ex'')y'$$

oder mit Hilfe der ersten Beziehung von 8)  $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$ , was den Satz beweist. (Vgl. Nr. 178, 3.) In derselben Weise findet man einen Ausdruck für  $x$ , den die zweite Beziehung von 8) reduziert auf

$$2ax = (a + ec)(x' + x'') - 2ac.$$

10) Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten in den Endpunkten einer Fokalsehne mit dem Schnittpunkt der entsprechenden Normalen geht durch den anderen Brennpunkt und ist die Halbierungslinie des Winkels der Brennstrahlen der Endpunkte der Sehne.

Man findet die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten ähnlich wie in 9), weil dieser Punkt der Mittelpunkt des Kreises ist, der dem dort betrachteten Dreieck auf der Außenseite der Basis eingeschrieben ist.

11) Der Ort des Schnittpunktes der Normalen an den Enden einer Fokalsehne ist ein Kegelschnitt.

Ist  $\alpha|\beta$  der Mittelpunkt der Sehne, so ist nach 10)

$$\alpha = \frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{a^2(x + c)}{a^2 + c^2}, \quad \beta = \frac{1}{2}(y' + y'') = y.$$

Und wenn die Gleichung des durch den Punkt  $\alpha|\beta$  beschriebenen Ortes bekannt wäre, so würde durch die eben gewonnenen Substitutionen die Gleichung des durch  $x|y$  beschriebenen Ortes aus ihr abgeleitet werden (Nr. 178, 4). Die Fokalphargleichung des Ortes, den der Mittelpunkt der Sehne beschreibt, ist aber nach Nr. 184

$$r = \frac{1}{2}(r' - r'') = \frac{-b^2}{a} \frac{e \cos \vartheta}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta},$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt  $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = b^2c\alpha$ . Daher ist die Gleichung des gesuchten Ortes

$$a^2b^2(x+c)^2 + (a^2+c^2)y^2 = b^2c(a^2+c^2)(x+c).$$

12) Ist  $\delta$  der Winkel zwischen den von einem Punkt  $P$  an die Ellipse gezogenen Tangenten und bezeichnen  $r, r'$  die Brennstahlen von  $P$ , so ist

$$\cos \delta = \frac{r^2 + r'^2 - 4a^2}{2rr'}.$$

Denn nach Nr. 188 und Fig. 98, S. 364 ist

$$\sin TPF \cdot \sin TPF' = \frac{FT \cdot F'T'}{PF \cdot PF'} = \frac{b^2}{rr'};$$

man hat aber  $\cos FPF' - \cos TPS' = 2 \sin TPF' \cdot \sin TPF'$ , und  $2rr' \cos FPF' = r^2 + r'^2 - 4c^2$ .

13) Sind  $\tau, \tau'$  die Längen  $PB, PB'$  der von einem Punkt  $P$  an eine Ellipse gezogenen Tangenten (Fig. 98) und werden die Längen der zu diesen Tangenten parallelen Halbmesser mit  $d, d'$  bezeichnet, so findet die Beziehung statt

$$\tau\tau' + dd' = rr'.$$

14) Wenn man einen Punkt  $O$  in der Ebene eines Kegelschnittes  $k$  mit dessen Brennpunkten  $F, F'$  verbindet oder aus  $O$  an einen anderen Kegelschnitt, der dieselben Brennpunkte wie  $k$  hat (zu  $k$  konfokal ist), die Tangenten legt und die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve bez. durch  $R, R'; S, S'$  bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR'} = \frac{1}{OS} - \frac{1}{OS'}.^{64})$$

Aus der quadratischen Gleichung, durch die in Nr. 130 der Vektor bestimmt ward, geht hervor, daß die Differenz der reziproken Werte der Wurzeln für solche Werte von  $\vartheta$  die nämliche sein muß, für die

$$A_{22} \cos^2 \vartheta - 2A_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + A_{11} \sin^2 \vartheta \quad (\text{Nr. 150})$$

konstanten Wert hat. Dies ist der Fall für irgend zwei Werte von  $\vartheta$ , die den Richtungen von Geraden entsprechen, die gleich geneigt sind gegen die beiden Geraden

$$A_{22}x^2 - 2A_{12}xy + A_{11}y^2 = 0.$$

Die betrachtete Funktion ist aber gleich Null für die Richtungen der beiden Tangenten durch  $O$  (Nr. 147), und Tangenten zu einem konfokalen sind gleich geneigt gegen diese. Infolgedessen sind Sehnen, die einen konfokalen Kegelschnitt berühren, proportional den Quadraten der parallelen Durchmesser. (Vgl. Nr. 229, 5.)

15) Der Inhalt des durch drei Normalen begrenzten Dreiecks ist

$$\frac{c^4}{4ab} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma - \alpha) \\ \times \{ \sin (\beta + \gamma) + \sin (\gamma + \alpha) + \sin (\alpha + \beta) \}^2;$$

also schneiden sich drei Normalen in einem Punkt, wenn

$$\sin (\beta + \gamma) + \sin (\gamma + \alpha) + \sin (\alpha + \beta) = 0 \quad \text{ist.}^{65)}$$

16) Welches ist der Ort des Punktes, in dem der Brennstrahl  $FP$  den Kreisdurchmesser  $CQ$  schneidet? (Fig. 102.)

Bezeichnen wir die Koordinaten von  $P$  durch  $x' | y'$ , die von  $O$  durch  $x | y$ , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken  $FON$ ,  $FPM$ :

$$\frac{y}{x+c} = \frac{y'}{x'+c} = \frac{b \sin \vartheta}{a(e + \cos \vartheta)}.$$

Wir erhalten die Polargleichung des Ortes von  $O$ , indem wir  $r \cos \vartheta$  für  $x$ ,  $r \sin \vartheta$  für  $y$  schreiben, als

$$\frac{r}{c+r \cos \vartheta} = \frac{b}{a(e + \cos \vartheta)},$$

oder 
$$r = \frac{bc}{c + (a-b) \cos \vartheta}.$$

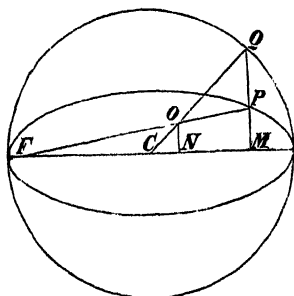


Fig. 102.

Demnach ist der Ort eine Ellipse, von der  $C$  der eine Brennpunkt ist, und man kann leicht nachweisen, daß der andere mit  $F$  zusammenfällt (Nr. 184).

17) Die Normale des Punktes  $P$  wird bis zum Schnitt mit  $CQ$  verlängert; der Ort des Schnittpunktes ist ein Kreis.

Die Gleichung der Normale ist  $\frac{ax}{\cos \vartheta} - \frac{by}{\sin \vartheta} = c^2$  (Nr. 176), die von  $CQ$  ist  $x \sin \vartheta - y \cos \vartheta$ ; aus beiden folgt  $x^2 + y^2 = (a+b)^2$  oder  $r = a+b$ .

Der Schnitt der Normale mit der zu  $CQ$  in bezug auf die Achse symmetrischen Geraden  $y = -x \operatorname{tg} \vartheta$  ist analog der Kreis  $r = a-b$ . Die Normalen der Ellipse können als Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden Kreise betrachtet werden.<sup>66)</sup>

18) Man zeige, daß  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \angle PFC = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta$  ist.

19) Bilde die Orthogonalitätsbedingung von zwei Normalen und die Ortsgleichung ihres Schnittpunktes (Nr. 178, 4).

20) Der Scheitel  $x = -a$ ,  $y = 0$  der Ellipse wird durch einen Strahl mit einem Punkt  $P'$  der Kurve verbunden und zu dieser Verbindungslinie wird durch den Mittelpunkt der Kurve eine Parallele gezogen. Man bestimme den Ort des Punktes, in dem diese letzte Gerade die Tangente des Punktes schneidet.

Die trigonometrische Tangente des durch den Strahl mit der Achse gebildeten Winkels ist  $= y' : (x' + a)$ ; daher ist die Gleichung der durch den Mittelpunkt der Kurve gehenden Parallelen

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x' + a} = \frac{b \sin \vartheta}{a(1 + \cos \vartheta)} = \frac{b}{a} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

oder  $\frac{y}{b} \sin \vartheta + \frac{x}{a} \cos \vartheta = \frac{x}{a}$ ; sonach wird der Ort des Schnittpunktes dieser Geraden mit der Tangente  $\frac{y}{b} \sin \vartheta + \frac{x}{a} \cos \vartheta = 1$  durch  $x = a$  dargestellt, d. h. der fragliche Ort ist die Tangente am anderen Ende der Achse.

Durch den nämlichen Punkt der Scheiteltangente gehen auch die Halbierungslinien der Winkel, die die Brennstrahlen eines Punktes mit der  $x$ -Achse bilden. (6.)

Dieselbe Untersuchungsmethode bleibt anwendbar, wenn der erste Strahl durch einen beliebigen Punkt  $x_1 | y_1$  in der Kurve gezogen wurde; man substituiert alsdann  $a_1$  und  $b_1$  für  $a$  und  $b$ , und der Ort ist die Tangente an dem diametral entgegengesetzten Punkt.

#### \* 195. Kegelschnitte als Mittelpunktsorte von Kreisen.

Offenbar kann man Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten  $\pm c | 0$  eine konstante Summe oder Differenz  $2a \geq 2c$  haben, dadurch erhalten, daß man um den einen Punkt einen Kreis vom Radius  $2a$  beschreibt und die Mittelpunkte von Kreisen sucht, die den gegebenen berühren und durch den zweiten festen Punkt hindurchgehen. Dies führt auf einen Zusammenhang der Lehre von den Kreissystemen in Kapitel VII mit den Orten zweiten Grades.

*Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei feste Kreise  $k_1, k_2$  unter vorgeschriebenen Winkeln  $\sigma_1, \sigma_2$  schneiden, ist ein Kegelschnitt (Nr. 121).* Nehmen wir die Zentrale von  $k_1, k_2$  als  $x$ -Achse, ihre Mitte als Nullpunkt, so seien  $\pm c | 0$  die Mittelpunkte,  $\varrho_1, \varrho_2$  die Radien von  $k_1, k_2$ . Alsdann schneidet ein Kreis vom Mittelpunkt  $\xi | \eta$  und Radius  $r$  die Kreise  $k_1$  bez.  $k_2$  unter dem Winkel  $\sigma_1$  bez.  $\sigma_2$ , wenn

$$(33) \quad \begin{cases} (\xi - c)^2 + \eta^2 = r^2 + \varrho_1^2 - 2r\varrho_1 \cos \sigma_1 \\ (\xi + c)^2 + \eta^2 = r^2 + \varrho_2^2 - 2r\varrho_2 \cos \sigma_2 \end{cases} \quad (\text{Nr. 121}).$$

Den Ort von  $\xi | \eta$  erhalten wir durch Elimination von  $r$  aus diesen Gleichungen. Nun ergibt aber Subtraktion

$$(34) \quad 4c\xi = \varrho_2^2 - \varrho_1^2 - 2r(\varrho_2 \cos \sigma_2 - \varrho_1 \cos \sigma_1),$$

d. h.  $r$  als eine *lineare* Funktion von  $\xi$ , und die Substitution dieser Funktion in eine der Gleichungen (33) liefert in der Tat eine Gleichung zweiten Grades in  $\xi|\eta$ .

Lassen wir insbesondere die festen Kreise von dem beweglichen berührt werden, d. h. nehmen wir entweder  $\cos \sigma_1 = \cos \sigma_2 = \pm 1$ , oder  $\cos \sigma_1 = -\cos \sigma_2 = \pm 1$  (Nr. 121), so werden die Eliminationsergebnisse leicht auf die Formen gebracht

$$(35) \quad \frac{\xi^2}{\left(\frac{e_1 - e_2}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 - c^2} = 1, \quad \text{bez.} \quad \frac{\xi^2}{\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{e_1 - e_2}{2}\right)^2 - c^2} = 1.$$

*Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die zwei gegebene Grundkreise gleichartig, bez. ungleichartig berühren, ist daher ein Kegelschnitt, der die Mittelpunkte der Grundkreise zu Brennpunkten und die Differenz bez. Summe ihrer Radien zur Hauptachse hat.*

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem  $e_1 \mp e_2 > 2c$  oder  $e_1 \mp e_2 < 2c$  ist, also sind genau nach Nr. 115 die drei Lagen der Grundkreise zueinander zu unterscheiden. *Die beiden Serien von Brennpunkten erzeugen zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln, je nachdem die Grundkreise ein- oder ausschließend liegen; wenn sich aber die Grundkreise reell schneiden, erzeugen die gleich- bez. ungleichartig berührenden Kreise eine Hyperbel bez. eine Ellipse.* Die Kegelschnitte gehen natürlich durch die Schnittpunkte  $P_1, P_2$  der Grundkreise  $k_1, k_2$ , da diese die Mittelpunkte der berührenden Nullkreise sind. Also können für jeden Kegelschnitt die Grundkreise dieser Erzeugung in unendlich vielen Paaren gewählt werden.

Ein Kreis entsteht nur aus konzentrischen Grundkreisen, eine *gleichseitige Hyperbel* aus Grundkreisen mit zueinander rechtwinkligen gemeinsamen Tangenten. Denn das Asymptotenpaar des Kegelschnittes ist offenbar stets zu den Paaren gemeinsamer Tangenten normal (Nr. 117). Für die besonderen Fälle bemerken wir nur: Gleiche Grundkreise erzeugen ihre Potenzlinie, sich berührende Grundkreise ihre Zentrale statt des einen Kegelschnittes; hat ein Grundkreis den Radius Null,

so entsteht nur *ein* Mittelpunktort. Weiterhin (Nr. 208) werden wir sehen, daß *eine* Parabel erzeugt wird, wenn einer der Grundkreise eine Gerade wird.

\* 196. **Fokalgleichung in Linienkoordinaten.** In der Lehre von den Brennpunkteigenschaften werden sich weiterhin die Linienkoordinaten zur Behandlung der Probleme als geeignet erweisen. *Die auf einen Brennpunkt als Anfangspunkt bezogene Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes in Linienkoordinaten hat die charakteristische Gestalt der Gleichung eines Kreises in Punktkoordinaten*, d. h. es ist in der allgemeinen Gleichung (90) von Nr. 149  $A_{11} = A_{22}$ ,  $A_{12} = 0$ . (Vgl. Nr. 97.) Transformieren wir zunächst die Achsengleichung  $a^2 u^2 \pm b^2 v^2 = 1$  (Nr. 167) unter Beibehaltung der  $x$ -Achse zu  $c \mid 0$  als Nullpunkt, so lauten die vermittelnden Substitutionen der Linienkoordinaten

$$(36) \quad u = \frac{u'}{1 - cu'}, \quad v = \frac{v'}{1 - cu'} \quad (\text{Nr. 78}).$$

In der Tat ordnet man das Transformationsergebnis wegen  $c^2 = a^2 \mp b^2$  leicht zu folgender *Fokalgleichung in Linienkoordinaten*

$$(37) \quad \left(u \pm \frac{c}{b^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{a}{b^2}\right)^2.$$

Einer Drehung des Achsensystems um den Brennpunkt gehört eine Substitution in Linienkoordinaten zu, die linear und homogen ist. Bezogen auf Achsen, die um den Winkel  $\vartheta$  gedreht sind, lautet die Gleichung (vgl. S. 146):

$$(38) \quad \left(u \pm \frac{c}{b^2} \cos \vartheta\right)^2 + \left(v \mp \frac{c}{b^2} \sin \vartheta\right)^2 = \left(\frac{a}{b^2}\right)^2.$$

Das Charakteristische dieser Gleichungsformen ist die Reduktion der Glieder zweiten Grades auf  $u^2 + v^2$ . Setzt man diese für sich gleich Null, so stellt  $u^2 + v^2 = 0$  das imaginäre Kreispunktepaar dar. Für unendlich große Werte von  $u$  und  $v$  ist die linke Seite auf diese ihre höchsten Glieder reduziert, also haben die Tangenten aus dem Brennpunkte die absoluten Richtungen, in direkter Bestätigung der allgemeinen Definition von Nr. 181.

B. 1) Die Hüllkurve einer Geraden, deren Abstände von zwei festen Punkten konstantes Produkt haben, ist ein Kegelschnitt mit diesen Punkten als Brennpunkten (Nr. 188).

Sind  $\pm c|0$  die festen Punkte, so ist das Produkt der Abstände von der Geraden  $u|v$  positiv oder negativ, je nachdem die Gerade die Punkte auf derselben oder auf verschiedenen Seiten hat; also setzen wir (Nr. 79)

$$\pm b^2 = \frac{1+cu}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{1-cu}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \text{somit } (\pm b^2 + c^2) u^2 \pm b^2 v^2 = 1.$$

Für  $u=0$  wird  $\pm b^2 v^2 = 1$ , für  $v=0$  wird  $(\pm b^2 + c^2) u^2 = 1$ ; daher schneiden die zur  $x$ - bez.  $y$ -Achse parallelen Tangenten der Hüllkurve die  $y$ - bez.  $x$ -Achse in den Abständen

$$\sqrt{\pm b^2}, \quad \sqrt{\pm b^2 + c^2}$$

und  $c$  ist somit die Fokaldistanz; usw.

2) Die Brennpunkte seien aus der allgemeinen Mittelpunkts-gleichung zu bestimmen.<sup>67)</sup>

Ist in rechtwinkligen Koordinaten

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

gegeben und sind die Koordinaten des einen Brennpunktes  $X|Y$ , so sind die des anderen  $-X|-Y$ . Die Gerade  $ux + vy + 1 = 0$  ist nach 1) Tangente, wenn

$$(1 + uX + vY)(1 - uX - vY) = C^2(u^2 + v^2)$$

$$\text{oder } u^2(X^2 + C^2) + v^2(Y^2 + C^2) + 2uvXY - 1 = 0.$$

Andrerseits ist die Tangentialgleichung des Kegelschnittes:

$$a_{33}(a_{22}u^2 + a_{11}v^2 - 2a_{12}uv) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Damit die beiden Bedingungsgleichungen für  $u|v$  identisch seien, muß

$$\frac{X^2 + C^2}{a_{22}} = \frac{Y^2 + C^2}{a_{11}} = \frac{-XY}{a_{12}} = \frac{a_{33}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \quad \text{sein.}$$

Somit sind die Brennpunktskoordinaten aus den Gleichungen zu bestimmen

$$\frac{X^2 - Y^2}{a_{11} - a_{22}} = \frac{a_{33}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{XY}{a_{12}},$$

d. h. die Brennpunkte sind die Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln (Nr. 165). Auch können wir  $C^2$  aus dem Eliminations-ergebnis von  $X|Y$  ermitteln, nämlich aus

$$(a_{11}C^2 + a_{33})(a_{22}C^2 + a_{33}) = a_{12}^2C^4.$$



Durch Vergleichen mit Nr. 170, 4 erkennt man aber die beiden Wurzeln  $C^2$  als die Quadrate der Halbachsen. Der einen Wurzel entspricht das reelle, der anderen das imaginäre Brennpunktpaar.

Die Bestimmung der Brennpunkte einer durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kurve zweiten Grades kann durch Paralleltransformation auf den soeben erledigten Fall zurückgeführt werden.

3) Wenn sich ein rechter Winkel so bewegt, daß sein Scheitel einen Kreis beschreibt, während der eine seiner Schenkel durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt, der diesen Punkt zum Brennpunkt und den nach ihm gehenden Kreisdurchmesser zur Hauptachse hat (Nr. 189).

Mit dem Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt und dem Durchmesser des festen Punktes als  $x$ -Achse hat man für einen Punkt  $x|y$  des Kreises und die ihn enthaltende Tangente der Hüllkurve

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad ux + vy + 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung des durch den Punkt  $x|y$  und durch den festen Punkt  $+c|0$  gehenden Lotes der Tangente der Hüllkurve folgt

$$uy = v(x - c); \quad \text{also } x = \frac{cv^2 - u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v(cu + 1)}{u^2 + v^2},$$

somit durch Einsetzen in die erste Gleichung die Hüllkurve

$$(u^2 + v^2) \{1 + c^2 v^2 - r^2 (u^2 + v^2)\} = 0.$$

Nun stellt  $r^2 u^2 + (r^2 - c^2) v^2 = 1$  eine Ellipse oder Hyperbel dar, je nachdem  $r \geq c$  ist; für  $c = 0$  erhält man den gegebenen Kreis und für  $c = r$  das Paar seiner Durchmesserendpunkte. Der sich absondernde Faktor  $u^2 + v^2 = 0$  sagt wegen  $u = \pm vi$  aus, daß die Verbindungslinien des festen Punktes mit den imaginären Kreispunkten Tangenten der Hüllkurve sind (Nr. 61). Somit ist der feste Punkt Brennpunkt des Kegelschnittes — wie auch der zu ihm symmetrische.

4) Jede der beiden Sehnen, die ein um seinen Scheitel  $O$  sich drehender konstanter Winkel  $\delta$  zwischen zwei festen Geraden  $u_1|v_1$ ,  $u_2|v_2$  spannt, umhüllt einen Kegelschnitt, der  $O$  zum Brennpunkt hat.

Mit  $y = m_1 x$ ,  $y = m_2 x$  als den Schenkeln des sich drehenden Winkels hat man  $(1 + m_1 m_2) \operatorname{tg} \delta = m_2 - m_1$ , falls die erste Gerade zur zweiten so gelegen ist wie die positive  $x$ -Achse zur positiven  $y$ -Achse. Bei Berücksichtigung der einen Sehne gehen einerseits die Tangente  $u|v$  der Hüllkurve, die Geraden  $u_1|v_1$

und  $y = m_1 x$ , andererseits  $u | v$ ,  $u_2 | v_2$  und  $y = m_2 x$  je durch einen Punkt. Es folgt daher

$$m_1 = \frac{u_1 - u}{v - v_1}, \quad m_2 = \frac{u_2 - u}{v - v_2};$$

$$\{(u - u_1)(u - u_2) + (v - v_1)(v - v_2)\} \operatorname{tg} \delta = (u_2 - u)(v - v_1) - (u_1 - u)(v - v_2),$$

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - u \left\{ u_1 + u_2 + \frac{v_1 - v_2}{\operatorname{tg} \delta} \right\} - v \left\{ v_1 + v_2 - \frac{u_1 - u_2}{\operatorname{tg} \delta} \right\} \\ = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{\operatorname{tg} \delta} - u_1 u_2 - v_1 v_2. \end{aligned}$$

Weil  $u = u_1$ ,  $v = v_1$  und  $u = u_2$ ,  $v = v_2$  die Gleichung erfüllen, sind die gegebenen Geraden selbst Tangenten der Hüllkurve.

Die Hüllkurve der anderen Sehne ergibt sich durch Vertauschung von  $m_1$  mit  $m_2$ , d. h. man ersetzt  $\operatorname{tg} \delta$  durch  $-\operatorname{tg} \delta$ .

Man untersuche die besonderen Fälle  $\delta = 0$ ,  $\delta = 90^\circ$ ,  $\delta = 45^\circ$ ,  $\delta$  gleich dem Winkel der festen Geraden;  $u_1 | v_1$ ,  $u_2 | v_2$  als rechtwinklig und als parallel zueinander; endlich  $u_1 = u_2 = 0$ .

## Elftes Kapitel.

### Die Parabel.

197. **Durchmessergleichung der Parabel.** Die Gleichung zweiten Grades stellt eine Parabel dar (Nr. 143), wenn  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$  ist, wenn also die ersten drei Glieder der allgemeinen Gleichung ein vollkommenes Quadrat bilden. Die Gleichung hat alsdann die Form

$$(1) \quad (\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Schon in Nr. 143 wurde gezeigt, daß sich diese Gleichung in die Form

$$(2) \quad y^2 = 2px$$

überführen läßt, falls die Kurve nicht in ein Parallelenpaar ausartet. Bei der Gleichung (2) ist der Koordinatenanfang ein Punkt der Kurve, die Gerade  $y = 0$  die Symmetrieachse der Kurve, die  $y$ -Achse die hierzu rechtwinklige Tangente im Nullpunkt. Werden als Koordinatenachsen ein *beliebiger* nach dem unendlich fernen Mittelpunkt der Kurve gerichteter Durchmesser und die Tangente in seinem im Endlichen liegenden Endpunkt zu Grund gelegt, so nimmt die Gleichung der Kurve gleichfalls die Gestalt

$$(3) \quad y^2 = 2p'x$$

an, denn die linearen Funktionen  $\alpha x + \beta y$  und  $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$  in (1) sind zu den senkrechten Abständen des Punktes  $x|y$  von den durch  $\alpha x + \beta y = 0$  und  $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$  dargestellten Geraden proportional. Die Koordinatenachsen sind aber nun *schiefwinklig* und  $p'$  ist von  $p$  verschieden. Wenn wir also die beiden Geraden konstruieren, so drückt die Gleichung der Kurve aus, daß das Quadrat des Abstandes eines Punktes der Kurve von der ersten Geraden in einem konstanten Verhältnis zum Abstand von der zweiten steht.

Machen wir nun durch Transformation die erste Gerade zur neuen  $x$ -Achse, die zweite zur neuen  $y$ -Achse, so erhält die transformierte Gleichung die Form  $y^2 = 2p'x$ , weil die mit  $x$  und  $y$  bezeichneten linearen Polynome den senkrechten Abständen eines Punktes von den neuen Koordinatenachsen proportional sind.

Offenbar ist der neue Anfangspunkt ein Punkt der Kurve, und, weil wir für jeden Wert von  $x$  zwei entgegengesetzt gleiche Werte von  $y$  erhalten, ist die neue  $x$ -Achse ein Durchmesser, die neue  $y$ -Achse parallel zu seinen Ordinaten (S. 285). Aber die Ordinate eines Durchmessers in seinem Endpunkt ist (Nr. 139) eine Tangente der Kurve, die neue  $y$ -Achse somit die Tangente der Kurve im Nullpunkt. Also ist die Gerade  $\alpha x + \beta y = 0$  der durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehende Durchmesser, und  $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$  die Tangente der Kurve in dessen Endpunkt.

198. **Scheitelgleichung.** Noch in anderer Art als in Nr. 197 kann die Gleichung einer Parabel in die Form (2) übergeführt werden, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Bei Einführung einer zunächst willkürlichen Konstanten  $k$  läßt sich die Gleichung (1) in der Gestalt

$(\alpha x + \beta y + k)^2 + 2(a_{13} - \alpha k)x + 2(a_{23} - \beta k)y + a_{33} - k^2 = 0$  schreiben. Also ist nach Nr. 197

$$(4) \quad \alpha x + \beta y + k = 0$$

die Gleichung eines Durchmessers und

$$(5) \quad 2(a_{13} - \alpha k)x + 2(a_{23} - \beta k)y + a_{33} - k^2 = 0$$

die der Tangente in seinem Endpunkt.

Nun ist die Bedingung, daß diese beiden Geraden zueinander rechtwinklig sind (Nr. 36),  $\alpha(a_{13} - \alpha k) + \beta(a_{23} - \beta k) = 0$ . Also erhalten wir eine lineare Gleichung zur Bestimmung des besonderen Wertes  $k$ , der die neuen Achsen rechtwinklig macht, nämlich

$$(6) \quad k = \frac{\alpha a_{13} + \beta a_{23}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Somit gibt es nur den *einen* Durchmesser

$$(7) \quad (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha x + \beta y) + (\alpha a_{13} + \beta a_{23}) = 0,$$

der seine Ordinaten unter rechtem Winkel schneidet (vgl. Nr. 146).

Dieser Durchmesser wird *die Achse*, sein Endpunkt *der Scheitel* der Parabel genannt. *Die auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Gleichung von der Form*

$$(8) \quad y^2 = 2px$$

stellt also eine auf Achse und Scheiteltangente als Koordinatenachsen bezogene Parabel dar; man nennt (8) ihre *Scheiteltgleichung* oder *Normalgleichung*.

Der einzige Koeffizient  $p'$  der reduzierten Gleichung (3) heißt der *Linearparameter* des zur  $x$ -Achse gewählten Durchmessers, insbesondere heißt der auf die Achse bezogene Parameter  $p$  der Scheiteltgleichung (8) oder (2) der *Hauptparameter* (vgl. Nr. 192).

Nach Multiplikation von (7) mit  $\alpha$  oder mit  $\beta$  und bei Einführung von  $a_{11} = \alpha^2$ ,  $a_{22} = \beta^2$ ,  $a_{12} = \alpha\beta$  erhält man als *Gleichung der Achse* einer durch

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$(A \neq 0, A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0)$$

dargestellten Parabel:

$$(9) \quad (a_{11} + a_{22})(a_{11}x + a_{12}y) + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 0$$

oder auch (falls z. B.  $a_{11} = a_{12} = 0$ ):

$$(9a) \quad (a_{11} + a_{22})(a_{12}x + a_{22}y) + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 0.$$

Als *Gleichung der Scheiteltangente* ergibt sich aus (5) und (6) nach leichter Umformung:

$$(10) \quad 2(a_{11} + a_{22})(A_{13}x + A_{23}y) + A - (a_{11} + a_{22})(A_{11} + A_{22}) = 0.$$

Für den *Hauptparameter* folgt mit Rücksicht auf die Betrachtungen von S. 295—297:

$$(11) \quad p = \frac{A_{13}}{\sqrt{a_{22}}(a_{11} + a_{22})^{\frac{3}{2}}} = \frac{A_{23}}{\sqrt{a_{11}}(a_{11} + a_{22})^{\frac{3}{2}}}.$$

B. 1) Der Hauptparameter der Parabel

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0 \text{ ist } p = \frac{1}{5}.$$

Wir erhalten zuerst  $k = 5$ . Dann kann die Gleichung in der Form  $(3x + 4y + 5)^2 = 2(4x - 3y + 8)$  geschrieben werden. Für  $x'$  bez.  $y'$  als die Entfernungen eines Punktes von  $4x - 3y + 8 = 0$ ,

bez.  $3x + 4y + 5 = 0$  ist dann  $5y' = 3x + 4y + 5$ ,  $5x' = 4x - 3y + 8$ , und die Gleichung kann geschrieben werden  $y'^2 = \frac{3}{5}x'$ .

2) Der Parameter der Parabel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0 \text{ ist } p = \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

199. Wenn die ursprünglichen Koordinatenachsen schiefwinklig sind, wird die Gleichung zunächst reduziert, indem man die Gerade  $\alpha x + \beta y = 0$  und ihre Normale  $(\beta - \alpha \cos \omega) x - (\alpha - \beta \cos \omega) y = 0$  zu Achsen wählt. Für

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \omega$$

werden die Transformationsformeln nach Nr. 42

$$\gamma y' = (\alpha x + \beta y) \sin \omega, \quad \gamma x' = (\beta - \alpha \cos \omega) x - (\alpha - \beta \cos \omega) y;$$

$$\text{also} \quad \gamma x \sin \omega = (\alpha - \beta \cos \omega) y' + \beta x' \sin \omega,$$

$$\gamma y \sin \omega = (\beta - \alpha \cos \omega) y' - \alpha x' \sin \omega.$$

Durch diese Substitution wird die Gleichung zu

$$\gamma^3 y'^2 + 2 \sin^2 \omega (a_{13} \beta - a_{23} \alpha) x' + 2 \sin \omega \{ a_{13} (\alpha - \beta \cos \omega) + a_{23} (\beta - \alpha \cos \omega) \} y' + \gamma a_{33} \sin^2 \omega = 0.$$

Die Transformation zu parallelen Achsen geschieht ganz wie auf S. 296/297; der Hauptparameter ist

$$(12) \quad p = - \frac{a'_{13}}{a'_{22}} = - \frac{(a_{23} \alpha - a_{13} \beta) \sin^2 \omega}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Selbstverständlich bewahren die beiden Ausdrücke von Nr. 153 auch hier ihre Unveränderlichkeit. Der eine hat den Nullwert  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  als Bedingung der Parabel, der andere ist  $\gamma^2 : \sin^2 \omega$ , wovon man sich sofort überzeugt, wenn man die transformierte Gleichung durch  $\gamma \sin^2 \omega$  dividiert.

B. Der Hauptparameter von

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0 \text{ ist } \frac{2a^2b^2 \sin^2 \omega}{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

200. Gestalt der Parabel. Aus der Gleichung  $y^2 = 2px$  können wir sogleich die *Gestalt der Kurve* erkennen. Sie ist in bezug auf die  $x$ -Achse symmetrisch, weil zu jedem Wert  $x$  zwei entgegengesetzt gleiche Werte von  $y$  gehören. Kein Teil der Kurve kann bei positivem  $p$  auf der negativen Seite der  $y$ -Achse liegen, weil  $y$  für negative Werte von  $x$  imaginär

wird. Wenn wir aber dem  $x$  beliebig wachsende positive Werte geben, erhalten wir auch unbegrenzt wachsende Werte für  $y$ . Also ist die Gestalt der Kurve die in Fig. 103 dargestellte, wo ihre konkave Seite gegen die positive Achse gewendet ist.

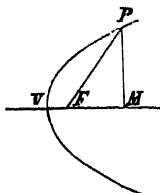


Fig. 103.

Die Konstruktion der Kurve liegt in der Gleichung: Man trägt auf der negativen  $x$ -Achse von  $V$  aus die Länge  $VQ = 2p$  ab, dann schneidet der über  $QM = 2p + x$  als Durchmesser beschriebene Kreis auf der Scheiteltangente die Längen der Ordinaten  $MP$  der zu  $VM$  als Abszisse gehörigen Punkte ab.

Obgleich die Parabel der Hyperbel darin gleicht, daß sie sich ins Unendliche erstreckt, so besteht doch eine wichtige Verschiedenheit zwischen der Natur der unendlichen Zweige der beiden Kurven. Die der Hyperbel strebten unablässig, mit zwei divergierenden geraden Asymptoten zusammenzufallen (Nr. 164). Dies gilt aber nicht für die Parabel, weil wir für die Bestimmung der Punkte, in denen eine Gerade  $x = ky + l$  die Parabel  $y^2 = 2px$  schneidet, die quadratische Gleichung  $y^2 - 2pky - 2pl = 0$  erhalten, deren Wurzeln nie beide unendlich sein können, solange  $k$  und  $l$  endliche Werte haben.

Daher gibt es keine *endliche* Gerade, die die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten im Unendlichen schneidet, d. h. keine endliche Asymptote; denn irgend ein Durchmesser  $y = m$ , der die Kurve allerdings in einem unendlich entfernten Punkte schneidet, trifft sie doch auch in dem Punkte mit der Abszisse  $x = m^2 : 2p$ . Der entsprechende Wert von  $x$  wächst mit  $m$  und wird erst mit  $m$  unendlich, d. h. *nur* die unendlich ferne Gerade berührt die Parabel im Unendlichen (Nr. 131).

**201. Kontinuierliche Gestaltsänderung.** Die Gestalt der Parabel wird dadurch besonders klar erkannt, daß wir sie aus den Gestalten der Ellipse und Hyperbel hervorgehen lassen können, gemäß folgendem Satze: *Wenn von einer Ellipse oder Hyperbel ein Scheitel und ein Brennpunkt gegeben sind, während ihre Hauptachse als unbegrenzt wachsend gedacht wird, so nähert sich die Kurve fortwährend mehr der Parabel.*

Die Scheitelgleichung der Ellipse bez. Hyperbel ist

$$(13) \quad y^2 = \frac{b^2}{a} \left( 2x \mp \frac{x^2}{a} \right) \quad (\text{Nr. 192}).$$

Da wir die Entfernung  $VF = m$  (Fig. 104) als unveränderlich voraussetzen, so haben wir  $b$  durch  $a$  und  $m$  auszudrücken, nämlich aus  $\pm m = a - \sqrt{a^2 \mp b^2}$  (Nr. 179), also  $b^2 = 2am \mp m^2$ ; dadurch wird die Gleichung

$$(14) \quad y^2 = \left( 2m \mp \frac{m^2}{a} \right) \left( 2x \mp \frac{x^2}{a} \right).$$



Fig. 104.

Lassen wir nun  $a$  unendlich groß werden, so verschwinden rechts alle Glieder bis auf  $2m \cdot 2x$ , und die Gleichung reduziert sich auf  $y^2 = 4mx$ , d. i. die Gleichung einer Parabel vom Hauptparameter  $2m$ .

Eine Parabel kann somit als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden, deren Exzentrizität  $= 1$  ist; denn in dem Werte  $e^2 = 1 \mp \frac{b^2}{a^2}$  verschwindet  $\frac{b^2}{a^2}$ , der Koeffizient von  $x^2$  in Gleichung (13), wenn wir  $a$  unbegrenzt wachsen lassen, und endlich wird  $e^2 = 1$ .

Somit entsteht aus zwei Mittelpunktskegelschnitten beider Gattungen durch stetige Gestaltsänderung eine Parabel als gemeinsame Grenzlage. So gehen Ellipsen und Hyperbeln durch Vermittelung der Parabeln stetig ineinander über, und die großen gestaltlichen Unterschiede der Kegelschnitte erscheinen als stetige Umformung eines einheitlichen Typus.

202. Tangente. Die Gleichung der Tangente der Parabel  $y^2 = 2px$  im Punkte  $x' | y'$  ist nach S. 276:

$$(15) \quad y'y = p(x + x').$$

Für den Schnittpunkt der Tangente mit der Achse ergibt sich  $x = -x'$  oder  $VM = TV$ : Die Subtangente  $TM$  der Parabel wird im Scheitel halbiert. Vgl. Fig. 105.

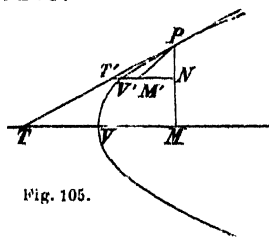


Fig. 105.

Da die Durchmessergleichung der Parabel für schiefwinklige Koordinaten die Form  $y^2 = 2p'x$  behält (Nr. 197), so bleibt auch die Gleichung der Tangente



unverändert, und die Subtangente ist auch dann noch das Doppelte der Abszisse, gemessen zwischen Durchmesserendpunkt und Ordinate des Berührungspunktes.

Dies gibt eine einfache Methode, in irgend einem Punkt der Parabel ihre Tangente zu ziehen, weil wir nur in der Achse  $TV = VM$  zu nehmen und  $PT$  zu ziehen haben. Ferner können wir auch die irgend einem anderen Durchmesser entsprechende Ordinate des Punktes bestimmen, weil wir nur  $V'M' = T'V'$  zu machen und die Gerade  $PM'$  zu ziehen haben, die zur Tangente in  $V'$  parallel ist.

**203. Zusammenhang der Linearparameter.** Wir können nun die Scheitelgleichung  $y^2 = 2px$  durch wirkliche Transformation auf irgend einen Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkt als Koordinatenachsen in der Form  $y^2 = 2p'x$  beziehen und zugleich die Abhängigkeit der Linearparameter  $p'$  untereinander erkennen.

Die Gleichung  $y^2 = 2px$  wird durch Transformation zu parallelen Achsen durch einen Punkt  $x'|y'$  der Kurve, indem wir  $x + x'|y + y'$  für  $x|y$  schreiben, in  $y^2 + 2yy' = 2px$  übergeführt. Wählen wir alsdann mit Beibehaltung der neuen  $x$ -Achse eine neue  $y$ -Achse, die zu jener unter dem Winkel  $\vartheta$  geneigt ist, so ist (vgl. (57), S. 26)  $y \sin \vartheta$  für  $y$ ,  $x + y \cos \vartheta$  für  $x$  zu substituieren, und unsere Gleichung wird

$$(16) \quad y^2 \sin^2 \vartheta + 2yy' \sin \vartheta = 2px + 2py \cos \vartheta.$$

Damit sich diese auf die Form  $y^2 = 2p'x$  reduziere, muß

$$y' \sin \vartheta = p \cos \vartheta \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \vartheta = p : y'$$

sein. Dann ist aber nach der Gleichung  $yy' = p(x + x')$  der von der Tangente mit der  $x$ -Achse gebildete Winkel gleich  $\vartheta$  und zu einer gegebenen Größe von  $\vartheta$  ist der Berührungspunkt der Tangente eindeutig bestimmt als  $y' = p \cot \vartheta$ ,  $x' = \frac{1}{2} p \cot^2 \vartheta$ . Somit nimmt die Gleichung (16), auf einen Durchmesser und die Tangente seines Endpunktes bezogen, die Form an

$$(17) \quad y^2 = \frac{2p}{\sin^2 \vartheta} x \quad \text{oder} \quad y^2 = 2p'x,$$

und es ist  $p' \sin^2 \vartheta = p$ : *Das Produkt des Linearparameters  $p'$  eines Durchmessers in das Quadrat des Sinus des Winkels,*

den seine Ordinaten mit der Achse bilden, ist konstant und gleich dem Hauptparameter  $p$ .

Wir können den Parameter irgend eines Durchmessers aus den Koordinaten seines Endpunktes ableiten, denn wegen  $y' \operatorname{tg} \vartheta = p$  ist

$$(18) \quad \sin \vartheta = \frac{p}{+\sqrt{p^2 + y'^2}} = +\sqrt{\frac{p}{p + 2x'}} \quad \text{und} \quad p' = p + 2x',$$

d. h. die halbe Differenz der Linearparameter zweier Durchmesser ist gleich der Differenz der Abstände ihrer Endpunkte von der Scheiteltangente.

204. **Pol und Polare.** Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes  $x' | y'$  lautet nach S. 275 ebenfalls

$$(19) \quad y'y = p(x + x') \quad \text{oder} \quad y'y = p'(x + x').$$

Sie wird durch  $y = 0, x = -x'$  erfüllt, daher folgt: *Auf einem Durchmesser fassen die Polaren zweier Punkte und die Ordinaten derselben gleiche Abschnitte zwischen sich, nämlich von der Größe  $x' - x''$ , wenn der Durchmesser als  $x$ -Achse genommen ist.*

Die Schnittpunkte der Polare mit der Kurve  $y^2 = 2px$  haben Ordinaten, die sich aus der Gleichung  $y^2 - 2y'y + 2px' = 0$  ergeben, sie sind also reell oder imaginär, je nachdem  $y'^2 - 2px'$  positiv oder negativ ist. Da für Punkte  $x' = 0$  der Scheiteltangente der Ausdruck positiv ist, so ist er es für alle Punkte des konvex abgegrenzten Gebietes: dies ist das Äußere der Kurve. Für einen unendlich fernen Punkt ist die Polare ein Durchmesser, sie hat also im Endlichen nur *einen* Schnittpunkt mit der Kurve: *Zu jeder Richtung gibt es in der Parabel eine und nur eine Tangente.* (Vgl. Nr. 202.)

Der Pol einer Geraden  $ux + vy + 1 = 0$  folgt aus der Vergleichung der Koeffizienten als

$$x' = \frac{1}{u}, \quad y' = -p \frac{v}{u}.$$

Die Tangentialgleichung der Parabel ist daher (vgl. Nr. 167):

$$(20) \quad v^2 = \frac{2}{p} u \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{2}{p'} u.$$

B. 1) Die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten  $x' | y', x'' | y''$  der Parabel  $y^2 = 2px$  folgen aus

$$2y = y' + y'', \quad 2px = y'y''.$$

2) Man bestimme den Winkel der beiden vom Punkt  $x' | y'$  an die Parabel  $y^2 = 4mx$  gezogenen Tangenten.

Die Gleichung des Tangentenpaares wird wie in Nr. 147 ermittelt und ist

$$(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = \{yy' - 2m(x + x')\}^2.$$

Die Gleichung zweier durch den Nullpunkt zu ihnen gezogenen Parallelen ist  $x'y^2 - y'xy + mx^2 = 0$ ; ihr Winkel wird nach Nr. 58 bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\sqrt{y'^2 - 4mx'}}{x' + m}.$$

3) Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks der Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte.<sup>68)</sup>

Bei Einführung der Koordinaten der Ecken des Dreiecks in die Formel (20) von Nr. 7 findet man für den Inhalt des letztgenannten Dreiecks den Ausdruck  $\pm \frac{1}{4p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')$  und für den ersten mit Benutzung des Ergebnisses von B. 1) die Hälfte derselben GröÙe.

4) Man kann die Koordinaten eines Parabelpunktes  $P$  als Funktionen einer einzigen Veränderlichen  $\lambda$  ausdrücken durch

$$x = \frac{p}{2\lambda^2}, \quad y = \frac{p}{\lambda},$$

wo  $2\lambda$  der Richtungskoeffizient der vom Nullpunkt nach  $P$  gehenden Sehne ist.

Dann ist  $2\lambda_1\lambda_2x - (\lambda_1 + \lambda_2)y + p = 0$  die Gleichung der Sehne von  $P_1(\lambda_1)$  nach  $P_2(\lambda_2)$ , die Tangente in  $P(\lambda)$  ist  $\lambda y = \lambda^2x + \frac{1}{2}p$ , usw.

205. **Normale.** Die Gleichung der Normale in  $P'$ , als der Senkrechten zur Tangente  $yy' = p(x + x')$  ist

$$(21) \quad p(y - y') + y'(x - x') = 0.$$

Der von ihr in der  $x$ -Achse gebildete Abschnitt (Fig. 106) ist

$$(22) \quad VN = x' + p;$$

daher ist in der Parabel die Subnormale  $MN = p$  (Nr. 177) konstant und dem Hauptparameter gleich.

Die Länge  $n = NP$  der Normale selbst ist  $\sqrt{MP^2 + MN^2}$ , oder

$$(23) \quad n = \sqrt{y'^2 + p^2} = \sqrt{p(2x' + p)} = \sqrt{pp'}.$$

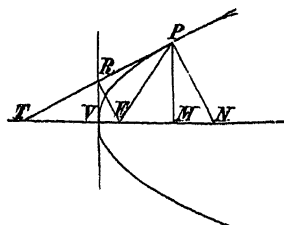


Fig. 106.

Durch einen beliebigen Punkt  $P'$  gehen drei Normalen der Parabel, denn die Gleichung einer durch ihre Fußpunkte gehenden Kurve ist nach Nr. 178

$$(24) \quad xy - (x' - p)y - py' = 0.$$

Dies ist aber eine gleichseitige Hyperbel, die die Achse der Parabel zur Asymptote hat, also den unendlich fernen Punkt derselben als vierten Schnittpunkt enthält. (Vgl. Nr. 178, 5.)

206. **Brennpunkt.** Genau wie in Nr. 179 ergibt ein Punkt  $-x'|0$  als Tangentenschnittpunkt  $T$  und ein Punkt  $x'+p|0$  als Normalenschnittpunkt  $N$  die Bestimmung der beiden Punkte der Parabel auf der zu  $x = x'$  gehörigen Ordinate. Die Abszissen der Punkte der Paare  $T, N$  haben die konstante Summe  $p$ , daher gibt es einen Punkt  $x' = \frac{1}{2}p$ , der die gemeinsame Mitte aller jener Paare ist. Man nennt diesen Punkt  $F$  in der Achse der Parabel, dessen Entfernung vom Scheitel gleich der Hälfte des Hauptparameters ist, den *Brennpunkt der Parabel*. Der Hauptparameter selbst ist nach der Gleichung, wie in den Mittelpunktskegelschnitten, die Ordinate der Kurve im Brennpunkt.

Wenn wir nun auch nur von *einem* reellen Brennpunkt der Parabel sprechen, so werden doch, wie schon nach der Kontinuität von Nr. 201 klar ist, die Entwicklungen des gegenwärtigen Abschnittes zeigen, daß eine Parabel in jeder Beziehung als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden darf, deren einer Brennpunkt der eben definierte Punkt ist, während der andere auf der Achse in unendlicher Entfernung liegt.

\* Dieser Übergang von den Mittelpunktskurven zur Parabel zeigt auch, daß die beiden imaginären Brennpunkte der Parabel (Nr. 179) in den absoluten Richtungen liegen, denn diese Punkte müssen auf der unendlich fernen Achse zu den unendlich fernen Punkten von Tangente und Normale eines jeden Parabelpunktes harmonisch liegen. Dasselbe ergibt die allgemeine Definition von Nr. 181 durch die Schnittpunkte der Tangenten absoluter Richtung, denn nur zwei derselben sind von der unendlich fernen Geraden verschieden und schneiden sich im Endlichen

207. **Fokalgleichung.** Die Entfernung irgend eines Punktes  $P$  der Kurve vom Brennpunkt  $F$  oder der *Brennstrahl* eines *Parabelpunktes*  $x' | y'$  ist  $r = x' + m$  (vgl. Nr. 182), wobei  $\frac{1}{2}p$  durch  $m$  ersetzt worden ist, um Brüche zu vermeiden. Das Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt  $m | 0$  ist nämlich

$$(x' - m)^2 + y'^2 = (x' - m)^2 + 4mx' = (x' + m)^2.$$

Damit lautet das Ergebnis von Nr. 203 einfacher: *Der Parameter  $p'$  irgend eines Durchmessers ist das Doppelte des Brennstrahls seines Endpunktes.*

Nennen wir wieder  $\sphericalangle MFP$  die Amplitude  $\vartheta$  von  $P$  (Fig. 107), so ist

$$(25) \quad r = x' + m = VM + m = FM + 2m = r \cos \vartheta + 2m.$$

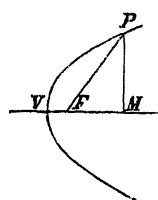


Fig. 107.

Daraus folgt als *Fokalgleichung der Parabel*

$$(26) \quad r = \frac{2m}{1 - \cos \vartheta} = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}.$$

Dieselbe Gleichung geht auch aus der Gleichung (19) in Nr. 184 durch die Annahme  $e \rightarrow 1$  hervor (Nr. 201), so daß die aus ihr gezogenen Folgerungen gültig bleiben.

Übrigens wird  $\vartheta$  zuweilen auch von  $FV$  als Anfangsstrahl aus gezählt; an Stelle der Gleichung (26) tritt alsdann  $r(1 + \cos \vartheta) = 2m$  oder  $r \cos^2 \frac{1}{2}\vartheta = m$  oder  $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta = m^{\frac{1}{2}}$ ; die Parabel gehört daher zu einer Gruppe von Kurven von der allgemeinen Gleichungsform  $r^n \cos n\vartheta = m^n$ , die manche gemeinsame Eigenschaften haben.

208. **Leitlinie (Direktrix).** Die Polare des Brennpunktes einer Parabel wird wie bei der Ellipse und Hyperbel die *Leitlinie* oder *Direktrix* genannt. Weil der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel  $m$  ist, so ist seine Polare (Nr. 204) die Normale zur Achse in demselben Abstand auf der anderen Seite des Scheitels. Die Entfernung irgend eines Punktes  $P'$  von der Leitlinie ist somit gleich  $x' + m$ : *Der Abstand irgend eines Punktes der Kurve von der Leitlinie ist seinem Brennstrahl gleich*, während für Ellipse und Hyperbel der Brennstrahl zum Abstand von der Leitlinie in dem konstanten Verhältnis  $e:1$  steht (Nr. 183). Umgekehrt ist der Ort eines

Punktes, der sich nach dem ausgesprochenen Gesetz bewegt, die Kurve von der Gleichung  $(x - m)^2 + y^2 = (x + m)^2$  oder  $y^2 = 4mx = 2px$ .

*Die Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt, Leitlinie und Exzentrizität erstreckt sich also auf alle Gattungen, wie auch die als Mittelpunktsorte von Kreisen in Nr. 195, hingegen kann die bifokale Beziehung von Nr. 185 nicht zur Erzeugung der Parabel dienen. Offenbar liefert die in Nr. 191 zur mechanischen Beschreibung der Hyperbel gegebene Methode eine Parabel, wenn man den Winkel  $ABR$  als rechten Winkel nimmt.*

Ferner lassen sich Punkte der Kurve leicht konstruieren, indem man um  $F$  mit beliebigem Radius  $r \geq m$  einen Kreis beschreibt und diesen mit einer im Abstand  $r$  parallel zur Leitlinie (auf der Seite, auf der  $F$  liegt) gezogenen Geraden schneidet.

**209. Jede Tangente bildet mit der Achse und dem Brennstrahl des Berührungspunktes gleiche Winkel.**

Denn die Entfernung vom Brennpunkt bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der Achse beträgt  $TV + VF = x' + m$  (Nr. 202). *Der Achsenschnittpunkt der Tangente und ihr Berührungspunkt haben daher gleiche Brennstrahlen.* Das von der Achse, der Tangente und dem Brennstrahl des Berührungspunktes gebildete Dreieck ist gleichschenkelig, hat also gleiche Winkel an der Tangente. Demnach schneidet die Tangente im Endpunkt der Brennpunktsordinate die Achse unter einem Winkel von  $45^\circ$ .

Der Satz ist eine Übertragung der Eigenschaft des Brennstrahlenwinkels der Mittelpunktskegelschnitte (Nr. 187). Denn, wenn wir dort den Brennpunkt  $F'$  unendlich fern denken, so wird der Brennstrahl  $F'P$  parallel zur Achse.

**210. Fokalabstand der Tangente.** Der Abstand des Brennpunktes  $m | 0$  von der Tangente  $y'y = 2m(x + x')$  ist (Fig. 106):

$$(27) \quad FR = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{y'^2 + 4m^2}} = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{4mx' + 4m^2}} = \sqrt{m(x' + m)},$$

also die mittlere Proportionale zwischen dem halben Para-

meter  $VF$  und dem Brennstrahl  $FP$  des Berührungspunktes. Mit Rücksicht auf Gleichung (23) in Nr. 205 folgt: *Der Fokalabstand der Tangente ist gleich der Hälfte der Normale*; dasselbe ergibt sich auch geometrisch aus  $TF = FN$ .

Nennen wir den Winkel  $MFR = \alpha$ , so haben wir  $\cos \alpha = -\sin FTR = \sqrt{m:(x' + m)}$  (Nr. 203) und  $FR = \sqrt{m(x' + m)} = m:\cos \alpha$ . Daher ist  $FR \cdot \cos \alpha = m = VF$ , d. h.  $R$  liegt in der Scheiteltangente: *Der Ort des Fußpunktes der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Normale ist die Scheiteltangente*. In diese und die unendlich ferne Gerade geht offenbar der Scheitelkreis der Mittelpunktskurven über (Nr. 189, Nr. 99). Die Umkehrung dieses Satzes liefert eine *Erzeugung der Parabel durch Tangenten* (vgl. B. 1).

Zugleich ergibt sich die Normalform der auf den Brennpunkt als Nullpunkt bezogenen Gleichung der Parabeltangente

$$(28) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{m}{\cos \alpha} = 0.$$

B. 1) *Der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel eine Gerade  $x = -m$  durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt  $O|O$  geht, berührt eine Parabel.*

Mit der Geraden  $x = -m$  an Stelle des Kreises in Nr. 189 und für  $c = 0$  ergibt sich die leicht direkt aus der Figur abzulesende Gleichung in Linienkoordinaten  $m(u^2 + v^2) = u$ ; diese definiert aber eine Parabel, weil die Koordinaten  $u = 0$ ,  $v = 0$  der unendlich fernen Geraden die Gleichung befriedigen; der Anfangspunkt ist Brennpunkt. Unter denselben Voraussetzungen erzeugt auch ein konstanter, von  $90^\circ$  verschiedener Winkel eine Parabel.

2) Man soll den Ort des Schnittpunktes des vom Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes mit der Geraden finden, die den Scheitel mit dem Berührungspunkt verbindet.

**211. Der Winkel zweier Tangenten ist die Hälfte des Winkels der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte.**

Denn in dem gleichschenkligen Dreieck  $PFT$  der Figur 106, S. 390 ist der Winkel  $PTF$ , den die Tangente mit der Achse bildet, die Hälfte des Winkels  $PFN$ , den der Brennstrahl mit ihr einschließt. Nun ist der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten gleich der Differenz der Winkel, die sie mit der Achse bilden, und der Winkel zwischen den Brennstrahlen ist

gleich der Differenz der von ihnen mit der Achse eingeschlossenen Winkel.

Wenn nun zwei Tangenten miteinander insbesondere einen rechten Winkel einschließen, so bilden die Brennstrahlen der Berührungspunkte einen gestreckten Winkel, d. h. die zwei Tangenten berühren in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne. Dann schneiden sie sich aber in der Polare des Brennpunktes, also folgt (Nr. 208): *Der Ort des Schnittpunktes zweier rechtwinkliger Tangenten ist die Leitlinie.*

Zum direkten Beweis des Satzes bilden wir die Gleichung der Polare irgend eines Punktes  $-m|y'$  der Leitlinie:  $y'y = 2m(x - m)$  und die seiner Verbindungsgeraden mit dem Brennpunkt:  $2m(y - y') + y'(x + m) = 0$ . Diese Gleichungen stellen offenbar ein rechtwinkliges Geradenpaar dar. Oder wir gehen von der in Nr. 210 gegebenen *Fokalgleichung* der Tangente  $x \cos^2 \alpha + y \sin \alpha \cos \alpha + m = 0$  aus. Mit Einsetzung von  $\alpha + 90^\circ$  statt  $\alpha$  folgt die Gleichung der rechtwinkligen Tangente:  $x \sin^2 \alpha - y \sin \alpha \cos \alpha + m = 0$ . Durch Addition dieser Gleichungen wird  $\alpha$  eliminiert und als Gleichung des Ortes  $x + 2m = 0$  erhalten, offenbar die Leitlinie.

**212. Der Brennstrahl des Schnittpunktes zweier Tangenten halbiert den Winkel der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte.** Aus den Fokalgleichungen zweier Tangenten (Nr. 210)

$$(29) \quad \begin{cases} x \cos^2 \alpha + y \sin \alpha \cos \alpha + m = 0, \\ x \cos^2 \beta + y \sin \beta \cos \beta + m = 0, \end{cases}$$

finden wir durch Subtraktion die Gleichung der Geraden, die ihren Schnittpunkt mit dem Brennpunkt  $0|0$  verbindet:

$$(30) \quad x \sin(\alpha + \beta) - y \cos(\alpha + \beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $(\alpha + \beta)$  einschließt. Weil aber in Figur 107  $\sphericalangle V'I'P = 360^\circ - 2\alpha$  ist und analog  $\sphericalangle V'F'P' = 360^\circ - 2\beta$ , so halbiert die Gerade vom Neigungswinkel  $(\alpha + \beta)$  den Winkel  $P'F'P'$ .

Dieser Satz kann auch bewiesen werden, indem man wie in Nr. 190 den Winkel  $\vartheta_1 - \vartheta'$  berechnet, unter dem das



Stück  $TP_1$  der von  $T(x'|y')$  aus an die Parabel gelegten Tangente  $TP_1$  vom Brennpunkt aus gesehen wird; man findet  $\cos(\vartheta_1 - \vartheta') = (x' + m):r'$ , und dieser Ausdruck zeigt die Unabhängigkeit von den Koordinaten des Berührungspunktes, so daß der Winkel für jede der beiden Tangenten aus  $x'|y'$  derselbe ist,  $\sphericalangle TFP_1 = \sphericalangle P_2FT$ .<sup>69)</sup>

*Zusätze.* In dem Falle, wo der Winkel  $P_2FP_1 = 180^\circ$ , also  $P_2P_1$  eine Fokalsehne ist, schneiden sich die Tangenten  $TP_2$  und  $TP_1$  in der Leitlinie, und jeder der beiden Winkel  $TFP_2$  und  $TFP_1$  ist gleich  $90^\circ$ . (Nr. 211.)

Wenn eine Sehne  $P_1P_2$  die Leitlinie in  $D$  schneidet, ist  $FD$  die äußere Halbierungslinie des Winkels  $P_1FP_2$ . (Nr. 190 nebst Figur 100.)

Schneidet eine veränderliche Tangente der Parabel zwei feste Tangenten in  $P$  und  $Q$ , so ist der Winkel  $QFP$ , unter dem das Segment  $QP$  der veränderlichen Tangente vom Brennpunkt aus erscheint, das Supplement des Winkels  $PRQ$  der festen Tangenten. (Fig. 108.)

Fig. 108.

Denn  $\sphericalangle QRT = \frac{1}{2} \sphericalangle pFq$  (Nr. 211), und nach dem vorhin bewiesenen Satze ist auch

$\sphericalangle QFP = \frac{1}{2} \sphericalangle pFq$ , daher  $\sphericalangle QFP = \sphericalangle QRT$ , dem Supplement des  $\sphericalangle PRQ$ .

Der Kreis, der dem von irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch den Brennpunkt.<sup>70)</sup> Denn der durch  $PRQ$  beschriebene Kreis muß durch  $F$  gehen, weil der im Segment  $PFQ$  enthaltene Winkel das Supplement des in  $PRQ$  enthaltenen Winkels ist.

**B.** Sind  $a$  und  $b$  die Längen zweier Tangenten einer Parabel, die sich rechtwinklig schneiden, und ist  $m$  die Hälfte des Parameters, so ist

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}.$$

**213. Beispiele.** Zunächst sind die Beispiele der vorigen beiden Kapitel, besonders von Nr. 175 und Nr. 194 daraufhin

zu prüfen, ob ihre Beweise auch noch gültig bleiben, wenn der fragliche Kegelschnitt statt einer Mittelpunktskurve eine Parabel ist. Außerdem folgt hier eine Anzahl besonderer Beispiele für die Parabel.

B. 1) Der Höhenschnittpunkt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks liegt in der Leitlinie.<sup>71)</sup>

Die Gleichung einer Dreieckshöhe ist nach Nr. 41

$$\frac{y_1 y_3 - y_1 y_2}{2p} \left( x - \frac{y_2 y_3}{2p} \right) + \frac{y_3 - y_2}{2} \left( y - \frac{y_2 + y_3}{2} \right) = 0$$

und nimmt durch Division mit  $(y_3 - y_2)$  die Form an

$$y_1 \left( x + \frac{p}{2} \right) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} + p y - \frac{p(y_1 + y_2 + y_3)}{2} = 0.$$

Aus der Symmetrie der Gleichung folgt, daß sich die drei Höhen in der Leitlinie  $x = -\frac{1}{2}p$  schneiden, und zwar im Punkt

$$y = \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}.$$

2) Das Vierseit derjenigen Tangenten einer Parabel, die den Seiten eines eingeschriebenen Vierecks parallel sind — und nach dem vorigen auch das Viereck ihrer Berührungspunkte — hat die Fläche Null. (Vgl. Nr. 204, 3.)

3) Man bestimme den Radius des Kreises, der einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist.

Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines Dreiecks, das die Seitenlängen  $l_1, l_2, l_3$  und den Inhalt  $F$  hat, wird durch  $l_1 l_2 l_3 : 4F$  ausgedrückt. Wenn aber  $l_1$  die Länge der Sehne zwischen den Punkten  $x_2 | y_2, x_3 | y_3$  und  $\vartheta_1$  der Winkel ist, den diese Sehne mit der Achse bildet, so ist offenbar  $l_1 \sin \vartheta_1 = \pm (y_2 - y_3)$ . Durch Einsetzen des in Nr. 204, 3 abgeleiteten Ausdruckes für den Inhalt des Dreiecks ergibt sich der fragliche Radius:

$$R = \left| \sin \vartheta_1 \frac{p}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3} \right|.$$

Wir können diesen Radius auch durch die zu den Seiten des Dreiecks parallelen Fokalsehnen ausdrücken; denn nach Nr. 207 ist die Länge einer Fokalsehne, die den Winkel  $\vartheta$  mit der Achse bildet, gleich  $2p' = \frac{2p}{\sin^2 \vartheta}$ ; also  $R^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$ . Aus Nr. 203 ergibt sich, daß  $p_1, p_2, p_3$  die Parameter der Durchmesser sind, die die Seiten des Dreiecks halbieren.

4) Man drücke den Radius  $R$  des Kreises, der dem von drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, in

Funktion der Winkel aus, die dieselben mit der Achse bilden. Er ist  $R = \left| \frac{p}{4 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3} \right|$  oder  $R^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{16 p}$ , wenn  $p_1, p_2, p_3$  die Parameter derjenigen Durchmesser sind, die durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen (Nr. 203).

5) Der Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, die sich unter einem gegebenen Winkel  $\varphi$  schneiden (Nr. 204, 2), ist die Hyperbel

$$y^2 - 4mx = (x+m)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad \text{oder} \quad y^2 + (x-m)^2 = (x+m)^2 \sec^2 \varphi.$$

Aus der letzten Form der Gleichung geht hervor, daß die Hyperbel denselben Brennpunkt und die nämliche Leitlinie wie die Parabel hat und daß ihre Exzentrizität  $= \sec \varphi$  ist.

6) Der Ort des Fußpunktes des Lotes, das vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird, ist eine Parabel.

Der Fokalabstand von  $2m(y-y') + y'(x-x') = 0$  ist

$$r = \frac{y'(x'+m)}{\sqrt{y'^2 + 4m^2}} = \sqrt{x'(x'+m)}.$$

Wenn aber  $\vartheta$  der durch das Lot mit der  $x$ -Achse gebildete Winkel ist, so ist nach Nr. 203

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{m}{x'+m}}, \quad \cos \vartheta = \sqrt{\frac{x'}{x'+m}}.$$

Die Polargleichung des Ortes für den Brennpunkt als Nullpunkt ist daher  $r \sin^2 \vartheta = m \cos \vartheta$ , oder  $y^2 = mx$ .

7) Die Koordinaten des Punktes, in dem sich die den Punkten  $x_1|y_1, x_2|y_2$  entsprechenden Normalen der Parabel  $y^2 = 4mx$  schneiden, sind

$$x = 2m + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{4m}, \quad y = -\frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{8m^2}.$$

Sind  $\alpha, \beta$  die Koordinaten des Schnittpunktes der entsprechenden Tangenten (Nr. 178, 3 und Nr. 204, 1), so hat man auch:

$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

8) Es seien  $P_1, P_2, P_3$  die Fußpunkte der drei von einem Punkte  $P'$  nach einer Parabel gezogenen Normalen. Wird alsdann durch den Scheitel der Kurve zur Verbindungslinie zweier der drei Fußpunkte eine Parallele gezogen und wird der dritte Fußpunkt mit dem Scheitel verbunden, so wird der Winkel dieser beiden Geraden durch die Achse der Parabel halbiert.

Indem man zwischen der Gleichung  $y^2 = 2px$  der Kurve und der Gleichung  $p(y' - y) + y(x' - x) = 0$ , die ausdrückt, daß

der Punkt  $P'$  auf der Normale des Parabelpunktes  $P$  liegt, die Größe  $x$  eliminiert (Nr. 205), erhält man  $y^3 + 2(p^2 - px')y = 2p^2y'$ . Die drei Wurzeln sind daher durch die Beziehung  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  verbunden, deren geometrische Bedeutung die in dem Satz ausgesprochene ist.

9) Der Ort des Schnittpunktes der Normalen in den Endpunkten der durch einen festen Punkt  $P'$  ( $x'|y'$ ) gehenden Sehnen ist eine Parabel.

Wir haben die Beziehung  $\beta y' = 2m(x' + \alpha)$  und erhalten durch die Substitution des aus ihr abgeleiteten Wertes von  $\alpha$  in die Ergebnisse von 7):

$$2mx + \beta y' = 4m^2 + 2\beta^2 + 2mx'; \quad 2m^2y = 2\beta mx' - \beta^2 y';$$

sodann folgt durch Elimination von  $\beta$ :

$$2\{2m(y - y') + y'(x - x')\}^2 = (4mx' - y'^2)(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2),$$

die Gleichung einer *Parabel*, deren Achse zu dem vom Punkte  $P'$  auf seine Polare gefüllten Lote parallel ist. Sind die Sehnen einer festen Geraden parallel, so reduziert sich der Ort auf eine Gerade, wie es auch gemäß 8) sein muß.

10) Der Ort des Schnittpunktes der zueinander rechtwinkligen Normalen ist  $y^2 = m(x - 3m)$ .

Denn in diesem Falle ist (vgl. 5) und 7))  $\alpha = -m$ ,  
 $x = 3m + \frac{\beta^2}{m}; \quad y = \beta$ .

11) Man finde aus den Längen  $a, b$  zweier Tangenten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $\varphi$  den Parameter.

Wählt man den die Berührungssehne halbierenden Durchmesser und die in seinem Endpunkt gezogene Tangente als Achsen eines Koordinatensystems  $\xi, \eta$  mit dem Achsenwinkel  $\omega$ , so ist der Parameter dieses Durchmessers  $p' = \eta^2 : 2\xi$  und der Hauptparameter ist

$$p = \frac{\eta^2 \sin^2 \omega}{2\xi} = \frac{s^2 \eta^2}{8\xi^2}, \text{ wo } s \text{ die Länge des vom Schnittpunkt der}$$

Tangenten auf die Sehne gefüllten Lotes ist. Aber es ist  $2s\eta = ab \sin \varphi$  und  $16\xi^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$ ; also

$$p = \frac{2a^2b^2 \sin^2 \varphi}{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Nr. 198, 2 und 199, B}).$$

12) Der Ort des Schnittpunktes zweier Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist entweder 1) das Produkt der Sinus oder 2) das der Tangenten, 3) die Summe oder 4) die Differenz der Kotangenten der Winkel, die sie mit der Achse bilden, ist 1) ein Kreis, der den Brennpunkt der Parabel zum Mittelpunkt hat, 2) eine Parallele zur Leitlinie, 3) eine Parallele zur Achse, 4) eine Parabel, die mit der gegebenen die Achse gemeinsam hat.

## Zwölftes Kapitel.

### Besondere Beziehungen zweier Kegelschnitte.

#### 214. Zwei Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten.

Wir untersuchen diesen Fall des Bézoutschen Theorems (Nr. 28) direkt.

Sind die Gleichungen zweier Kurven zweiter Ordnung gegeben, so können wir sie nach  $y$  geordnet denken:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + (a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) = 0, \\ b_{22}y^2 + 2(b_{12}x + b_{23})y + (b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von  $y$  können wir dadurch ausführen, daß wir aus den Gleichungen  $y$  und  $y^2$  wie zwei Unbekannte berechnen. Die Ausdrücke werden Brüche mit demselben in  $x$  linearen Nenner, der Zähler des Ausdruckes für  $y$  bez.  $y^2$  ist vom 2. bez. 3. Grade in  $x$ . Setzen wir dann das Quadrat des ersten Bruches gleich dem zweiten, so ergibt sich eine Gleichung (Resultante) vom 4. Grade in  $x$ . Jeder ihrer Wurzeln gehört eine den ursprünglichen Gleichungen gemeinsame Wurzel  $y$  zu.

Im allgemeinen sind also vier Schnittpunkte vorhanden, die entweder reell oder in Paaren konjugiert imaginär sein können. Nennen wir die vier Punkte 1, 2, 3, 4, ihre sechs Verbindungsgeraden 12, 34; 13, 24; 14, 23; man sagt alsdann: *Zwei Kegelschnitte haben drei Paare von Schnittpunkten, die ein vollständiges Viereck bilden.* Sind zwei Schnittpunkte konjugiert imaginär, so ist doch ihre Verbindungsgerade immer reell (Nr. 46). *Daher ist von den Schnittpunktpaaren stets eines reell,* auch wenn imaginäre Schnittpunkte vorkommen, wo die übrigen Sehnen imaginär sind. Wir werden im XIV. Kap. sehen, wie infolgedessen diese Geradenpaare zur Bestimmung der Schnittpunkte dienen können.

Nun ist die Tangentialgleichung einer Kurve zweiten Grades in  $u|v$  wieder vom zweiten Grade (Nr. 149). Demnach

erkennen wir durch Wiederholung unserer Schlußweise, daß es im allgemeinen auch vier Wertepaare  $u|v$  gibt, die zwei solchen Kegelschnittgleichungen zugleich genügen. Geometrisch heißt dies aber: *Zwei Kurven zweiten Grades haben vier Tangenten gemeinsam* (vgl. Nr. 117) *mit drei Paaren von Schnittpunkten* usw. In jeder derselben haben die Kurven im allgemeinen verschiedene Berührungspunkte. Auch gelten bei Gleichungen in Linienkoordinaten ganz analoge Erörterungen, wie wir sie im folgenden nur für die Gleichungen in Punktkoordinaten anstellen.

Die Schnittpunkte können verschiedene Besonderheiten ihrer gegenseitigen Lage bieten. Einerseits kann die Resultante dadurch, daß ein oder mehrere Koeffizienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen Null sind, von niedrigerem Grade sein. Dann haben wir einen oder mehrere der Schnittpunkte als unendlich fern anzusehen (Nr. 16).

Andrerseits kann die Resultante mehrfache Wurzeln haben, und diese liefern entweder mehrere getrennte oder vereinte, dann aber mehrfach zu zählende Schnittpunkte. Es sind folgende Fälle möglich: 1) ein zweifacher reeller Schnittpunkt und zwei reelle oder konjugiert imaginäre einfache Punkte, 2) zwei reelle oder konjugiert imaginäre zweifache, 3) ein dreifacher und ein einfacher, beide reell, oder endlich 4) ein vierfach zählender Schnittpunkt. Wir betrachten die dadurch charakterisierten besonderen Lagen der Kegelschnitte.

215. **Berührung zwischen Kegelschnitten.** Wenn 1) zwei der Schnittpunkte in  $T$  zusammenfallen, so berühren sich die Kegelschnitte (Fig. 109 links) in  $T$ , und die Verbindungsgerade der zusammenfallenden Punkte ist ihre gemeinschaftliche Tangente. Die Kegelschnitte schneiden sich in diesem Fall noch in zwei reellen oder imaginären Punkten  $L, M$ , die vom Berührungspunkt verschieden sind und eine stets reelle Schnittsehne  $LM$  ergeben. Zugleich sind, falls  $L, M$  nicht reell sind,  $TL, TM$  konjugiert imaginäre Geraden.

Wenn insbesondere 2)  $L$  und  $M$  zusammenfallen, also die Schnittsehne  $LM$  zu einer zweiten, beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangente wird, so haben die Kegelschnitte

eine doppelte Berührung. Nun kann aber auch der Fall eintreten, daß die Kurven in einem imaginären Punkt dieselbe imaginäre Tangente berühren. Dann können sie weder einen reellen Punkt noch eine reelle Tangente gemeinsam haben, denn nach S. 50 gilt der Satz: *Wenn sich zwei Kegelschnitte in einem imaginären Punkt berühren, so berühren sie sich auch in dem konjugierten.* Das Schnittsehnenviereck enthält dann nur die Verbindungsgerade der Berührungspunkte, doppelt gezählt, als reelles Seitenpaar: *Kegelschnitte in doppelter Berührung haben eine stets reelle Berührungsschne.*

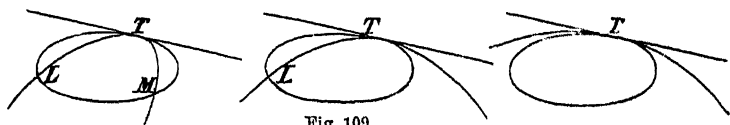


Fig. 109.

Die Berührung der Kegelschnitte heißt 3) eine *Berührung der zweiten Ordnung* (mittlere Fig.), wenn drei ihrer Schnittpunkte zusammenfallen. Dazu muß einer der Punkte  $L$ ,  $M$  in 1), z. B.  $M$ , sich  $T$  ohne Ende nähern und schließlich mit  $T$  zusammenfallen. Die Punkte  $T$  und  $L$  sind reell, denn  $T$  zählt für das eine,  $TL$  für ein zweites Schnittpunktpaar. Kurven, die eine Berührung zweiter Ordnung haben, heißen *oskulierende Kurven*. *Kegelschnitte, die einander oskulieren, schneiden sich noch in einem reellen Punkt.*

Die Berührung zweier Kegelschnitte ist 4) die möglichst innige (Fig. rechts), wenn sie vier einander folgende Punkte gemein haben. In diesem Fall muß sich auch  $L$  dem Punkte  $T$  nähern, bis die Linie  $LT$  mit der Tangente in  $T$  zusammenfällt. Zwei Kurven haben eine *Berührung dritter Ordnung*, wenn sie vier aufeinander folgende Punkte gemein haben, und da zwei verschiedene Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte miteinander gemein haben können, so entsteht die Berührung höchster Ordnung, die zwischen zwei solchen Kegelschnitten stattfinden kann, wenn alle Schnittpunkte in einem reellen Punkt vereint sind.

216. Die analytischen Bedingungen dieser verschiedenen Berührungen können wir leicht übersehen, indem wir sie unter der besonderen Voraussetzung aufstellen, daß eine der Koordi-

natenachsen, z. B. die  $y$ -Achse, eine gemeinschaftliche Tangente im Nullpunkt ist. Nach Nr. 193 haben solche Kegelschnitte die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von  $y^2$  ergibt die Gleichung eines durch die vier Schnittpunkte gehenden Ortes

$$x\{(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x + 2(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})y + 2(a_{13}b_{22} - a_{22}b_{13})\} = 0.$$

Da der erste Faktor die gemeinsame Tangente darstellt, so bezeichnet der zweite die durch die beiden anderen Schnittpunkte gehende Schnittsehne  $LM$  in 1).

Die Bedingung der Doppelberührung ist 2) diejenige, unter der die Sehne  $LM$  von voriger Gleichung jeden der Kegelschnitte berührt. Wir bilden die Gleichung des Geradenpaares, das den Nullpunkt mit den Schnittpunkten  $L$  und  $M$  verbindet; dies ist eine homogene Gleichung, die sich durch Elimination von  $2a_{13}x$  und  $2b_{13}x$  aus (2) ergibt:

$$(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})x^2 + 2(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})xy + (a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})y^2 = 0.$$

Damit  $L$  und  $M$ , also auch die Geraden  $TL$ ,  $TM$  zusammenfallen, ist die geforderte Bedingung (Nr. 57):

$$(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})(a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22}) = (a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})^2.$$

Oskulation im Nullpunkt haben wir 3), wenn die Gerade  $LM$  durch diesen Punkt geht, also  $a_{13}b_{22} = a_{22}b_{13}$  ist. Wir können alsdann durch Multiplikation mit einem Faktor  $k = a_{22} : b_{22} = a_{13} : b_{13}$  die zweite Gleichung auf die Form bringen

$$(3) \quad b'_{11}x^2 + 2b'_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Die Subtraktion der beiden Gleichungen liefert dann

$$(4) \quad (a_{11} - b'_{11})x + 2(a_{12} - b'_{12})y = 0$$

als die Gleichung der Oskulationssehne  $TL$ .

Endlich fällt 4) diese letzte mit der Tangente zusammen, wenn auch noch  $a_{12} = b'_{12}$  ist; also lautet die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit dem ersten im Nullpunkt eine Berührung dritter Ordnung mit der Tangente  $x = 0$  hat,

$$(5) \quad b'_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Setzen wir die ursprünglichen Gleichungsformen voraus, so



ergeben die Gleichungen der Geradenpaare unter 1) oder 2) als Bedingungen dieser Berührung dritter Ordnung

$$a_{13}b_{22} = a_{22}b_{13}, \quad a_{12}b_{22} = a_{22}b_{12}.$$

217. **Krümmungskreis.** Da ein Kegelschnitt stets so bestimmbar ist, daß er fünf gegebenen Bedingungen genügt (Nr. 129), so kann immer ein Kegelschnitt gefunden werden, der einen anderen, der Kürze halber durch  $k$  bezeichneten, in einem gegebenen Punkt  $P$  berührt und drei weitere Bedingungen erfüllt. Soll er in dem gegebenen Punkt  $P$  eine Berührung zweiter Ordnung mit  $k$  haben, so kann er dabei *zwei* andere Bedingungen und bei einer Berührung dritter Ordnung nur *eine* erfüllen.

So kann stets eine Parabel gefunden werden, die im Anfangspunkt der Koordinaten eine Berührung dritter Ordnung mit dem Kegelschnitt  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$  hat. Nach Gleichung (5) von Nr. 216 erhellt, daß die Parabelgleichung entsteht, wenn man nur  $b_{11}$  statt  $a_{11}$  einsetzt, wo  $b_{11}$  nach Nr. 131 und 143 durch  $b_{11}a_{22} = a_{12}^2$  bestimmt ist.

*Im allgemeinen können wir aber keinen Kreis beschreiben, der eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt  $k$  eingeht*, weil zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Gleichung zweiten Grades einen Kreis darstelle. In anderen Worten: wir können nicht durch jede vier aufeinander folgende Punkte eines Kegelschnittes  $k$  einen Kreis beschreiben, weil zur Bestimmung des Kreises drei Punkte hinreichen. Durch drei aufeinander folgende Punkte von  $k$  geht jedoch stets ein Kreis, dessen Gleichung man leicht findet.

Ist der Kegelschnitt  $k$  durch die erste Gleichung (2) gegeben und liegen schiefwinklige Koordinaten mit dem Achsenwinkel  $\omega$  zugrunde, so ist

$$(6) \quad x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 - 2\rho x \sin \omega = 0$$

die Gleichung eines die Kurve  $k$  im Nullpunkt berührenden Kreises vom Radius  $\rho$  (vgl. Nr. 102, 3), und die Bedingung, daß dieser Kreis oskulierend sei (Nr. 216), ist

$$(7) \quad a_{13} = -\rho a_{22} \sin \omega, \quad \text{oder} \quad \rho = -\frac{a_{13}}{a_{22} \sin \omega}.$$

Der Kreis, der eine Kurve im Punkt  $P$  oskuliert, heißt der Krümmungskreis der Kurve in diesem Punkt, sein Radius  $\rho$  heißt der Krümmungsradius, denn der reziproke Wert von  $\rho$  kann als Maß der Krümmung der Kurve an der Stelle  $P$  dienen: je stärker die Kurve dort gekrümmt ist, um so kleiner ist  $\rho$ , und umgekehrt. Der auf der Normale von  $P$  gelegene Mittelpunkt des Kreises heißt der Krümmungsmittelpunkt.

**218. Mittelpunkt und Radius des einem Punkt eines Mittelpunktskegelschnittes zugehörigen Krümmungskreises, Konstruktion dieses Kreises.** Da der Mittelpunkt des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Schnittpunkt der Mittellote der Seiten ist, so sind, wenn das Dreieck durch drei aufeinander folgende Punkte der Kurve gebildet wird, zwei seiner Seiten aufeinander folgende Tangenten der Kurve und die Senkrechten zu ihnen die entsprechenden Normalen. Der zu einem Punkt  $P_1$  gehörige Krümmungsmittelpunkt ist daher der Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Normalen. Hat  $P_1$  die Koordinaten  $x_1 | y_1$ , so erhält man die Koordinaten  $x_0 | y_0$  des Krümmungsmittelpunktes des Kegelschnitts  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ , indem man in den Formeln von Nr. 178, 3

$$x' = x'' = X' = x_1, \quad y' = y'' = Y' = y_1$$

setzt; es folgt

$$(8) \quad x_0 = \frac{c^2 x_1^3}{a^4}, \quad y_0 = -\frac{c^2 y_1^3}{b^4}.$$

Ist  $\rho$  die Länge des Krümmungsradius, so hat man daher

$$\rho^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = x_1^2 \left(1 - \frac{c^2 x_1^2}{a^4}\right)^2 + y_1^2 \left(1 + \frac{c^2 y_1^2}{b^4}\right)^2,$$

woraus bei Einführung von  $c^2 = a^2 \mp b^2$  und mit Rücksicht auf  $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$$\text{die Gleichung } \rho^2 = b^4 x_1^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^2 + a^4 y_1^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$(9) \quad \rho = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

hervorgeht.

Nun ist  $\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}$  der reziproke Wert des Abstandes  $d$  des Nullpunktes von der Tangente des Punktes  $P_1$  (vgl. Nr. 170, 2), somit wird schließlich

$$(10) \quad \rho = \frac{a^2 b^2}{d^3}.$$

Diese Gleichung läßt sich in eine andere Gestalt bringen, aus der leicht eine Konstruktion des zu  $P_1$  gehörigen Krümmungsmittelpunktes  $M$  folgt. Die Länge der Normale vom Kurvenpunkt  $P_1$  bis zum Schnittpunkt  $N$  mit der Hauptachse ist nämlich (vgl. Nr. 177, 1) gleich  $\frac{b^2}{a}$ , und für die Strecke von  $P_1$  bis zum Schnittpunkt  $R$  der Normale mit der Nebenachse (Fig. 110) findet man leicht  $P_1R = a^2 : d$ . Ist  $L$  der Fußpunkt des von  $O$  auf die Tangente der Kurve gefällten Lotes, so wird daher

$$(11) \quad \varrho = \frac{a^2 b^2}{d^3} = \frac{P_1 N \cdot P_1 R}{LO} = P_1 M.$$

Insbesondere findet man die zu den Scheiteln der Hauptachse gehörigen Krümmungsradien ( $d = a$ ) gleich  $\frac{b^2}{a}$ , die zu den Scheiteln der Nebenachse gehörigen ( $d = b$ ) gleich  $\frac{a^2}{b}$ .

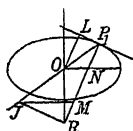


Fig. 110.

Der Ausdruck für  $P_1 M$  in (11) liefert die folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $M$ . Rechtwinklig zur Normale von  $P_1$  zieht man durch ihren Schnittpunkt  $R$  mit der Nebenachse eine Gerade, die den zu  $P_1$  gehörigen Durchmesser in  $J$  treffen möge (Fig. 110); die durch  $J$  parallel zur Hauptachse gezogene Gerade schneidet die Normale von  $P_1$  in  $M$ . In der Tat folgt aus der Figur  $P_1 N : P_1 M = P_1 O : P_1 J = LO : P_1 R$ .

B. 1) Die zu den Scheiteln der Ellipse gehörigen Krümmungsmittelpunkte haben die Koordinaten

$$x_0 = a - \frac{b^2}{a}, y_0 = 0 \text{ bez. } x_0 = 0, y_0 = b - \frac{a^2}{b}.$$

Man konstruiert sie, indem man aus einer Ecke des Rechtecks der Scheiteltangenten auf die zugehörige Scheitelsehne ein Lot fällt; die Schnittpunkte dieses Lotes mit den Achsen sind die gesuchten Krümmungsmittelpunkte.

2) Ist  $b'$  der zu dem Halbmesser  $a'$  von  $P_1$  konjugierte Halbmesser, so wird  $\varrho = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{d}$ .

Dies folgt aus (11) mit Rücksicht auf  $d = ab : b'$  (vgl. Nr. 170, 2).

3) Die dritte Potenz von dem Radius  $R$  des Kreises, der einem der Ellipse eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist, ist

gleich dem Produkt der Krümmungsradien in den Endpunkten der zu seinen Seiten konjugierten Durchmesser. (Insbesondere in seinen Ecken, wenn der Schwerpunkt des Dreiecks im Mittelpunkt der Ellipse liegt.)

Diese Durchmesser sind nämlich konjugiert zu den Durchmessern, die man *parallel* zu der betreffenden Seite ziehen kann; sind  $b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$  ihre halben Längen, so ist  $R = \frac{b'b''b'''}{ab}$  (Nr. 169, 6). Mit Hilfe des soeben in B. 2 abgeleiteten Ergebnisses folgt der zu beweisende Satz.

219. Wir zeigten in Nr. 177, daß die Länge  $PN$  der Normale  $n = bb' : a$ , und in Nr. 187, daß  $\cos \psi = b : b'$  ist, wenn  $\psi$  der vom Brennstrahl mit der Normale gebildete Winkel ist; dies gestaltet den Ausdruck  $\rho = \frac{b'^3}{ab}$  von Nr. 218, 2 für den Krümmungsradius um in

$$(12) \quad \rho \cos^2 \psi = n.$$

Wenn wir eine Senkrechte  $NQ$  zur Normale in dem Punkte errichten, wo sie die Fokalachse schneidet, und ferner im Punkte  $Q$ , wo diese Senkrechte den Brennstrahl trifft,  $QC$  senkrecht zu ihm bis zur Normale ziehen, so ist  $C$  der Krümmungsmittelpunkt und  $CP$  der Krümmungsradius. Vgl. Fig. 111.

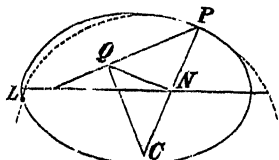


Fig. 111.

Eine andere Konstruktion benutzt den mit dem Radius  $\sqrt{a^2 \pm b^2}$  beschriebenen Hauptkreis des Kegelschnittes (Nr. 167, 6): *Derjenige Kreis  $k_1$ , der den Kegelschnitt  $k$  in  $P$  berührt und den Hauptkreis von  $k$  rechtwinklig schneidet, hat einen Durchmesser, der so groß wie der Krümmungsradius von  $k$  ist.* Infolge des rechtwinkligen Schneidens der beiden Kreise trifft nun die Normale den Kreis  $k_1$  und den Hauptkreis in Punktpaaren  $P$ ,  $C_1$  bzw.  $R$ ,  $S$ , die sich harmonisch trennen (Fig. 112). Also konstruiert man den zu  $P$  auf der Normale harmonisch konjugierten Pol  $C_1$  des Hauptkreises; dieser und der Krümmungsmittelpunkt  $C$  liegen symmetrisch in bezug auf  $P$ . Die Kon-

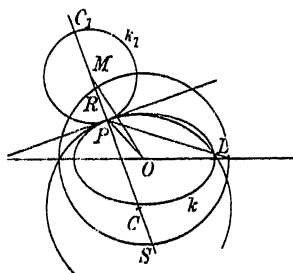


Fig. 112.

struktion ist selbst für eine stumpfwinklige Hyperbel, also bei einem imaginären Hauptkreis reell.<sup>72)</sup>

Zum Beweis des Satzes beachte man, daß nach Nr. 170  $a^2 \pm b^2 = a'^2 \pm b'^2$  und  $a'b' \sin \omega = ab$  ist, wo  $\omega$  den Winkel der beiden konjugierten Halbmesser  $a'$ ,  $b'$  bedeutet. Mit Rücksicht auf die Formel  $\varrho = b'^3 : ab$  (Nr. 218, 2) wird daher  $b'^2 = a'\varrho \sin \omega$  und  $a^2 \pm b^2 = a'^2 \pm a'\varrho \sin \omega = a'^2 \mp a'\varrho \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right)$  oder  $a^2 \pm b^2 + \left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2 = a'^2 + \left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2 \mp 2a' \frac{\varrho}{2} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right)$ . In dem Dreieck  $OPM$ , wo  $M$  den Mittelpunkt des Kreises  $k_1$  bedeutet, ist nun  $OP = a'$ ,  $OM^2 = a^2 \pm b^2 + MP^2$ ,  $\angle MPO = \frac{3\pi}{2} - \omega$ , daher

$$a^2 \pm b^2 + MP^2 = a'^2 + MP^2 \mp 2a' \cdot MP \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right),$$

und wenn man diese Formel mit der früheren vergleicht, folgt sofort  $PM = \frac{1}{2}\varrho$ ,  $PC_1 = \varrho$ .

220. **Krümmungssehne.** Eine andere Konstruktion kann auf die Bemerkung gegründet werden: *Die Schnittsehnen eines Kreises und eines Kegelschnitts bilden mit der Achse des Kegelschnitts gleiche Winkel.*<sup>73)</sup> Da nämlich die Rechtecke aus den vom Schnittpunkt  $S$  der beiden Kreissehnen gemessenen Abschnitte gleich sind (Nr. 109), so sind es auch die parallelen Durchmesser des Kegelschnittes (Nr. 151, 1); diese bilden also mit der Achse gleiche Winkel (Nr. 157). Überdies liegt der Mittelpunkt des Kreises stets in dem vom Schnittpunkt  $S$  der Sehnen auf die Polare von  $S$  gefällten Lote, hier also in der Normale des Oskulationspunktes. Nun sind im Fall des Krümmungskreises Schnittsehnen (Nr. 215) erstens die Tangente in  $P$  und zweitens die Sehne  $PL$  des Kreises, die *Krümmungssehne*. Man hat daher nur  $PL$  so zu ziehen, daß diese Gerade mit der Achse den gleichen Winkel bildet wie die Tangente mit der entgegengesetzten Richtung der Achse. Dann ist der durch die Punkte  $P$  und  $L$  beschriebene Kreis, der den Kegelschnitt in  $P$  berührt, der Krümmungskreis. Aus der Gleichung der Tangente folgt die der symmetrisch geneigten Krümmungssehne als

$$(13) \quad \frac{x'x}{a^2} \mp \frac{y'y}{b^2} = \frac{x'^2}{a^2} \mp \frac{y'^2}{b^2}.$$

Die Konstruktion zeigt, daß der in einem Scheitel der Kurve oskulierende Kreis eine Berührung der dritten Ordnung mit ihr hat, da nun die Krümmungssehne mit der Tangente zusammenfällt.

B. 1) Unter welcher Bedingung liegen vier durch ihre exzentrischen Anomalien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gegebenen Punkte einer Ellipse in einem Kreis?<sup>74)</sup>

Die Sehne, die zwei der Punkte verbindet, muß mit der einen Richtung der Hauptachse denselben Winkel bilden, wie die Sehne der beiden anderen mit der entgegengesetzten Richtung der Achse; die Sehnen sind nach Nr. 169, 2 durch

$$\frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\gamma + \delta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$$

gegeben; man hat somit  $\cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cot \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 0$ , d. i.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \text{oder} \quad = 2m\pi,$$

wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

2) Bestimme die Koordinaten des Punktes  $L$ , in dem der in  $P$  oskulierende Kreis die Ellipse ferner schneidet.

Wir haben  $\alpha = \beta = \gamma$ , also  $\delta = -3\alpha$ , oder

$$X = \frac{4x'^3}{a^3} - 3x', \quad Y = \frac{4y'^3}{b^3} - 3y'.$$

Die Krümmungssehne hat daher die Gleichung

$$\frac{x}{a} \cos \alpha - \frac{y}{b} \sin \alpha = \cos 2\alpha \quad (\text{Nr. 169, 2}).^{75)}$$

3) Der Punkt  $L$  liegt auch in einer Geraden, deren Achsenabschnitte die doppelten Koordinaten des Punktes  $P$  mit umgekehrten Vorzeichen sind, nämlich

$$\frac{X}{x'} + \frac{Y}{y'} + 2 = 0.$$

4) Drei Punkte einer Ellipse, deren oskulierende Kreise durch einen gegebenen Punkt der Kurve gehen, liegen in einem Kreis, der diesen Punkt enthält, und bilden ein Dreieck, dessen Schwerpunkt im Kurvenmittelpunkt liegt.

Aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkt  $\delta$  der oskulierenden Kreise folgt nach Aufgabe 2) zur Bestimmung des Berührungspunktes  $\alpha = -\frac{1}{3}\delta$ , und da der Sinus und Kosinus von  $\delta$  unverändert bleiben, wenn  $\delta$  um  $360^\circ$  vermehrt wird, so ergibt sich ebenso  $\beta = -\frac{1}{3}\delta + 120^\circ$ ,  $\gamma = -\frac{1}{3}\delta + 240^\circ$ . Nach 1) liegen diese drei Punkte in einem durch  $\delta$  gehenden Kreis.<sup>76)</sup>

Wenn wir hier  $X|Y$  als gegeben voraussetzen, so ist, weil den  $x'|y'$  bestimmenden kubischen Gleichungen die zweiten Glieder fehlen, die Summe der drei Werte von  $x$  und  $y$  gleich Null, und daher ist nach Nr. 14, 4 der Anfangspunkt der Koordinaten der Schwerpunkt des durch die Punkte gebildeten Dreiecks. Wir erkennen auch, daß die Normalen in diesen Punkten die drei Höhen des Dreiecks sind, und daß sich daher diese Normalen in einem Punkte schneiden, wenn die Halbierungslinien der Seiten des Dreiecks durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen (Nr. 169, 5).

5) Wenn drei Punkte einer Ellipse so liegen, daß

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

so gehen ihre Krümmungskreise durch den Punkt

$$\frac{4}{a^2}x_1x_2x_3 \mid \frac{4}{b^2}y_1y_2y_3 \text{ der Ellipse.}$$

6) Zwischen den Parametern der Fußpunkte der vier aus einem Punkt nach einer Ellipse gezogenen Normalen (Nr. 178) findet nach den vier Gleichungen aus Nr. 194, 15) die Beziehung statt:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (2m + 1)\pi.$$

Daher geht der durch die Fußpunkte 1, 2, 3 von dreien der Normalen gelegte Kreis durch den diametral entgegengesetzten Punkt 4' zu dem Fußpunkt 4 der letzten Normale. Bei der Parabel geht er durch den Scheitel. (Vgl. 213, 8.) Der Kreis schneidet die Tangente von 4' im Fußpunkt des Lotes, das auf sie vom Mittelpunkt der Ellipse gefällt wird.<sup>77)</sup>

Bezeichnet  $r_{ik}$  den zur Sehne  $ik$  zwischen zweien der vier Normalenfußpunkte parallelen Halbmesser des Kegelschnitts, so ist (vgl. Nr. 169, 3)

$$r_{12}^2 + r_{34}^2 = a^2 + b^2.$$

7) In allen Kegelschnitten ist der Krümmungsradius gleich dem Quotienten aus der dritten Potenz der Normale  $n$  und dem Quadrat des Parameters  $p$ .

8) Man drücke den Krümmungsradius einer Ellipse in Funktion des Neigungswinkels der Normale gegen die Achse aus.

9) Die Längen der Sehnen des Krümmungskreises, die durch den Mittelpunkt bez. den Brennpunkt eines Mittelpunktskegelschnittes gehen, sind  $\frac{2b'^2}{a'}$  bez.  $\frac{2b'^2}{a}$ .

10) Die Fokalsehne des Krümmungskreises für einen Punkt im Kegelschnitt ist der Fokalsehne des Kegelschnittes gleich, die der Tangente in dem Punkt parallel ist. (Vgl. Nr. 184, 3 und 243.)

221. **Krümmungskreis der Parabel.** Die Koordinaten  $x_0 | y_0$  des Mittelpunktes des zum Punkte  $x_1 | y_1$  der Parabel

$y^2 = 2px$  gehörigen Krümmungskreises erhält man aus den Formeln in Nr. 213,7, wenn man daselbst  $y_2 = y_1$  und  $m = 2p$  setzt. So ergibt sich

$$(14) \quad x_0 = p + \frac{3y_1^2}{2p} = p + 3x_1, \quad y_0 = -\frac{y_1^3}{p^2} = -\frac{2x_1y_1}{p}.$$

Das Quadrat des Radius  $\varrho$  folgt aus  $\varrho^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$ , nämlich

$$(15) \quad \varrho^2 = \frac{(p + 2x_1)^2}{p}.$$

Die Formel (15) liefert sofort folgende Konstruktion des zu  $P_1$  gehörigen Krümmungsmittelpunktes: Vom Fußpunkt  $M$  der Ordinate von  $P_1$  (Fig. 113) trägt man in Richtung der positiven  $x$ -Achse die Strecke  $p + 2x_1$  auf die  $x$ -Achse ab; das im Endpunkt  $Q$  dieser Strecke errichtete Lot trifft die Normale von  $P_1$  im Krümmungsmittelpunkt  $C$ .\*) Da die Subnormale eines Parabelpunktes gleich  $p$  ist, kann man natürlich auch, um  $Q$  zu erhalten, vom Schnittpunkt  $N$  der Normale und der Achse der Parabel die Strecke  $2x_1$  abtragen. Die Richtigkeit der angegebenen Konstruktion von  $C$  folgt aus  $MP_1:MN = QC:NQ$  oder  $y_1:p = -y_0:2x_1$ , die  $y_0 = -\frac{2x_1y_1}{p}$  ergibt. Auch das Stück der Normale vom Punkte  $N$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $S$  mit dem im Endpunkt  $T$  der Tangente auf der Parabelachse errichteten Lot ist so groß wie der Krümmungsradius  $\varrho$ .

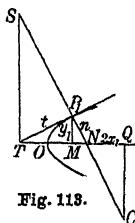


Fig. 113.

Aus der auf einen Durchmesser und die unter dem Winkel  $\vartheta$  konjugierte Tangente bezogenen Gleichung  $y^2 = 2p'x$  der Parabel finden wir nach dem Kriterium von Nr. 217 für  $\varrho$ :

$$(16) \quad \varrho \sin \vartheta = p' \quad \text{oder} \quad \varrho \sin^3 \vartheta = p \quad (\text{Nr. 203}).$$

Aus Nr. 205 folgt aber  $p' \sin \vartheta = n$  oder  $p = n \sin \vartheta$  und  $\vartheta$  ist nach Nr. 209 das Komplement des Winkels  $\psi$  zwischen Brennstrahl und Normale. Daher ist auch für die Parabel  $\varrho \cos^2 \psi = n$ ; somit sind auch dieselben Konstruktionen anwendbar.

\*) Ich verdanke diese Konstruktion einer freundlichen Mitteilung von Herrn K. Rohn in Leipzig.



Besonders einfach wird die zweite von Nr. 219, da der Hauptkreis der Parabel ihre Leitlinie ist (Nr. 211), also der Orthogonalkreis desselben den Mittelpunkt auf dieser hat. *Das Stück der Normale von der Parabel bis zur Leitlinie ist gleich dem halben Krümmungsradius.* Die Krümmung der Parabel ist im Scheitel am größten und nimmt von da unbegrenzt ab; *der Krümmungsradius des Scheitels ist gleich dem Hauptparameter  $p$ .*

**B.** 1) In der Parabel ist die Fokalsehne des Krümmungskreises eines Punktes  $P_1$  gleich dem doppelten Parameter  $2p'$  des durch  $P_1$  gehenden Durchmessers.

2) Der Flächeninhalt des von den Krümmungsmittelpunkten dreier Parabelpunkte mit den Ordinaten  $y_1, y_2, y_3$  gebildeten Dreiecks ist

$$\pm \frac{3}{4p^3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix} = \pm \frac{3}{4p^3} (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

Die drei Krümmungsmittelpunkte liegen in einer Geraden, wenn die Summe der aus je zwei Ordinaten gebildeten Produkte Null ist.

**222. Die Evolute einer Kurve ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte ihrer Punkte.**

Um die Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes zu finden, wird man die Koordinaten eines Punktes  $x_1 | y_1$  des Kegelschnittes durch die  $x | y$  seines Krümmungsmittelpunktes ausdrücken und diese Werte in die Gleichung der Kurve einführen. Man erhält als *Gleichung der Evolute einer Ellipse bez. Hyperbel*

$$(17) \quad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \quad c^2 = a^2 \mp b^2, \text{ oder auch}$$

$$(18) \quad (c^4 - a^2 x^2 \mp b^2 y^2)^3 \mp 27 a^2 b^2 c^4 x^2 y^2 = 0.$$

Ebenso wird die Gleichung der Evolute der Parabel gefunden:

$$(19) \quad 27 p y^2 = 8 (x - p)^3;$$

diese Kurve dritter Ordnung ist die *semikubische* oder *Neilsche Parabel*.

Da jeder Punkt der Evolute Schnittpunkt von zwei benachbarten Normalen des Kegelschnittes ist, berühren diese

offenbar die Evolute. Daher kann man sich ihre Gestalt leicht veranschaulichen, indem man eine Anzahl Normalen konstruiert. Man bemerkt insbesondere, daß die Krümmungsmittelpunkte der Scheitel *Spitzen der Evolute* sind, in denen sich die Evolute von beiden Seiten an die Achsen anschmiegt.

**223. Gemeinsame Asymptotenrichtungen.** Zwei Kegelschnitte haben ferner (Nr. 214) eine besondere Lagenbeziehung, wenn eine ihrer Schnittsehnen mit der unendlich fernen Geraden identisch wird. Die Kurven haben dann ihre Asymptotenrichtungen gemeinsam, können sich also nur noch in zwei im Endlichen gelegenen Punkten schneiden. Dies ist auch geometrisch klar, wenn die beiden Kurven Hyperbeln mit parallelen Asymptoten sind; Figur 114 zeigt einen endlichen Schnittpunkt zweier Äste derselben. Ein Beispiel von Ellipsen mit gemeinsamen Asymptotenrichtungen bieten uns die Kreise (Nr. 115), die deshalb nur zwei Schnittpunkte im Endlichen haben.

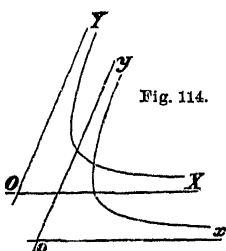


Fig. 114.

Nun hängen die Richtungen der Asymptoten nur von den höchsten Gliedern der Gleichung ab (Nr. 130), indem diese Richtungen mit denen des Geradenpaares  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$  übereinstimmen. Daher ist *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Kegelschnitte ihre unendlich fernen Punkte gemeinsam haben, die, daß die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades ihrer Gleichungen entsprechend proportional sind:*

$$(20) \quad a_{11} : b_{11} = a_{12} : b_{12} = a_{22} : b_{22}.$$

In Mittelpunktskegelschnitten dieser Art sind die Achsen parallel, weil sie die Asymptotenwinkel halbieren. Zieht man überhaupt zwei parallele Durchmesser, so sind die zu ihnen konjugierten in beiden Kurven wiederum parallel, denn diese Paare sind in bezug auf die Asymptoten harmonisch (Nr. 168). Endlich hängt die numerische Exzentrizität nur vom Asymptotenwinkel ab (Nr. 163). Kegelschnitte von gleicher Exzentrizität haben gleiche Asymptotenrichtungen, sobald ihre Achsen parallel sind.

Sind die beiden Kegelschnitte Parabeln, so haben sie dieselbe Exzentrizität, nämlich Eins (Nr. 201), und sie werden durch die unendlich ferne Gerade in je einem Punkt berührt, der in der Richtung ihrer Durchmesser liegt. *Daher berühren sich alle Parabeln von parallelen Achsen im Unendlichen.*

224. **Ähnliche Kegelschnitte in ähnlicher Lage.** Wenn zwei Mittelpunktskegelschnitte gemeinsame Asymptotenrichtungen haben, so erhalten wir durch Paralleltransformationen (Nr. 140) ihre je auf den Mittelpunkt bezogenen Gleichungen in den Formen

$$(21) \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \\ a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + b_{33} = 0. \end{cases}$$

Führen wir dann statt  $x|y$  Polarkoordinaten  $r|\vartheta$ , statt  $x'|y'$   $r'|\vartheta'$  ein, so folgt aus Nr. 130

$$(22) \quad r^2:r'^2 = a_{33}:b_{33} \text{ für } \vartheta = \vartheta',$$

d. h. *parallele Halbmesser sind proportional.*

Nun heißen irgend zwei Figuren *ähnlich und in ähnlicher Lage* oder *homothetisch*, wenn die Vektoren  $OP$  der ersten von einem gewissen Punkt  $O$  aus in einem konstanten Verhältnis zu den parallelen Vektoren  $op$  der zweiten von einem anderen Punkt  $o$  stehen (Fig. 115).

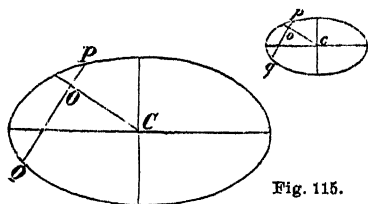


Fig. 115.

Wenn es möglich ist, zwei solche Punkte  $O$  und  $o$  zu finden, so kann man daher unendlich viele andere bestimmen. Denn, wenn man einen Punkt  $C$  wählt und  $oc$  parallel zu  $OC$  und im konstanten Verhältnis  $op:OP$  zieht, so ist in den ähnlichen Dreiecken  $OCP$  und  $ocp$  die Gerade  $cp$  zu  $CP$  parallel und in dem gegebenen Verhältnis. Ebenso kann man von jedem anderen durch  $c$  gezogenen Vektor zeigen, daß er zu dem durch  $C$  gelegten parallelen Vektor in demselben Verhältnis steht. *In zwei homothetischen Mittelpunktskegelschnitten sind alle Durchmesser des einen proportional den parallelen Durchmessern des anderen.* Die Produkte  $OP \cdot OQ$ ,  $op \cdot oq$  sind den Quadraten paralleler Durchmesser proportional. (Vgl. Nr. 151.)

Man pflegt in der Regel nur den *Fall eines reellen Proportionalitätsfaktors*  $r:r'$  in Betracht zu ziehen. Mit dieser Beschränkung, daß parallele Durchmesser zugleich reell sein sollen, sind zu einer reellen Ellipse nur wieder reelle Ellipsen homothetisch, zu einer Hyperbel innerhalb des Asymptotenwinkels  $2\vartheta_0$  nur Hyperbeln in gleichen Asymptotenwinkeln. In diesem Sinne können ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte als solche definiert werden, die parallele gleichnamige Achsen und dieselbe Exzentrizität haben (Nr. 223).

Wenn jedoch  $a_{33}$  und  $b_{33}$  in den Gleichungen verschiedene Vorzeichen haben, so ist der Proportionalitätsfaktor imaginär. Die beiden Gleichungen (21) stellen dann eine reelle und eine imaginäre Ellipse oder zwei Hyperbeln in supplementären Asymptotenwinkeln dar. Insbesondere für  $a_{33} + b_{33} = 0$  sind die Hyperbeln konjugiert und die Ellipsen könnten ebenso bezeichnet werden (Nr. 162).

*Endlich sind alle Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, deren Achsen dieselbe Richtung haben.* Denn die Scheitelfgleichungen  $y^2 = 2px$ ,  $y'^2 = 2p'x'$  liefern die Vektorenwerte  $r = 2p \cos \vartheta : \sin^2 \vartheta$ ,  $r' = 2p' \cos \vartheta' : \sin^2 \vartheta'$ , mit  $\vartheta = \vartheta'$ , also parallele Vektoren in dem konstanten Verhältnis  $p:p'$ .

\* 225. *Ähnlichkeitszentra.* Verbinden wir die Endpunkte  $P$  und  $p$  paralleler und proportionaler Sehnen aus  $O$  und  $o$ , so gehen die Geraden nach Nr. 118 durch einen festen Punkt  $A$  in  $Oo$ , der als *Zentrum der Ähnlichkeit* oder als *Ähnlichkeitspunkt* bezeichnet wird. Die *Ähnlichkeitsstrahlen*  $AP$ ,  $Ap$  sowie  $AO$ ,  $Ao$  und  $AC$ ,  $Ac$  haben dasselbe konstante Verhältnis  $k$ , wie die parallelen Sehnen  $OP$ ,  $op$ . Wenn wir daher in den Vektoren  $AP$  eines Kegelschnittes  $Ap$  in konstantem Verhältnis zu  $AP$  nehmen, so ist der Ort von  $p$  ein ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt. *Zu einem gegebenen Kegelschnitt*  $a_{11}x^2 + \dots + a_{33} = 0$  *und dem Nullpunkt als Ähnlichkeitspunkt erhalten wir jeden ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt durch die Substitution von*  $kx|ky$  *statt*  $x|y$  *als*

$$k^2(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + 2k(a_{13}x + a_{23}y) + a_{33} = 0.$$

Da durch dieselbe Substitution die Gleichung des vom Nullpunkt ausgehenden Tangentenpaares (Nr. 147) nicht ge-

ändert wird, so berühren alle ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte dasselbe Tangentenpaar aus dem Ähnlichkeitspunkt.

Wir denken nun die vorhin angestellte Betrachtung für zwei homothetische Mittelpunktskurven wiederholt, indem wir  $O, o$  mit den Mittelpunkten  $C, c$  dieser Kurven zusammenfallen lassen. Dann gehen die Verbindungsgeraden der Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Halbmesser durch einen Punkt  $J$  der Zentrale  $Cc$ , der diese in demselben Verhältnis innerlich teilt wie  $A$  äußerlich. Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Mittelpunktskegelschnitte haben daher zwei Ähnlichkeitspunkte, einen äußeren  $A$  und einen inneren  $J$ , die die Zentrale harmonisch im Ähnlichkeitsverhältnis  $k$  teilen; sie sind reell, solange  $k$  reell ist (Nr. 224). Und: Zwei homothetische Mittelpunktskegelschnitte haben zwei Paare gemeinsamer Tangenten, die sich in den Ähnlichkeitspunkten schneiden.

Die weitere Analogie zu den Beziehungen zweier Kreise ist in den Beispielen erläutert und wird für homothetische Ellipsen durch Nr. 173 begründet. In der Tat erhalten wir aus zwei Kreisen zwei homothetische Ellipsen, indem wir die zur Zentrale rechtwinkligen Kreisordinaten um ihre Fußpunkte um einen konstanten Winkel drehen.

Parabeln mit parallelen Achsen haben nur einen Ähnlichkeitspunkt und nur ein Paar gemeinsamer Tangenten, nämlich im Endlichen, da das zweite in die unendlich ferne Gerade fällt (Nr. 223). Der Ähnlichkeitspunkt teilt die Verbindungsgerade der Scheitel im Verhältnis der Hauptparameter, denn die Entfernungen zwischen Scheiteln und Brennpunkten sind parallel und proportional. Der Teilpunkt ist ein äußerer oder innerer, je nachdem die Parabeln in demselben oder in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind.

B. 1) Wenn durch einen Ähnlichkeitspunkt von zwei ähnlichen Kegelschnitten in ähnlicher Lage ein Paar Vektoren gezogen werden, so sind die Verbindungssehnens ihrer Endpunkte entweder parallel, oder sie schneiden sich in der Sehne der endlichen Schnittpunkte der Kegelschnitte.

2) Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier homothetischen Kegelschnitte liegen zu dreien in vier Geraden (den Ähnlichkeitsachsen, Nr. 122).

3) Das Ähnlichkeitsverhältnis  $k$  zweier durch ihre allgemeinen Gleichungen gegebenen homothetischen Kegelschnitte

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad \text{und}$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{2a_{13}}{k}x + \frac{2a_{23}}{k}y + \frac{a_{33}}{k^2} = 0$$

ist durch  $A = k^2 A'$  bestimmt, wenn  $A, A'$  ihre Diskriminanten sind.

Die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte ergeben sich daraus, daß diese die Zentrale  $x_0 | y_0, x'_0 | y'_0$  im Verhältnis  $\pm k$  teilen.

**226. Konzentrische homothetische Kegelschnitte.** Die Besonderheit der Beziehung von *Kegelschnitten mit gemeinsamen Asymptoten* ist dadurch zu charakterisieren, daß sie *homothetisch und konzentrisch* sind. Da dann ihre Achsen zusammenfallen, heißen sie auch *koachsial*. Solche Kegelschnitte haben dieselben unendlich fernen Punkte und in ihnen überdies dieselben Tangenten. *Ähnliche, ähnlich gelegene konzentrische Kegelschnitte berühren einander in ihren unendlich fernen Punkten*, haben also im Endlichen keine Schnittpunkte, wie dies uns von den konzentrischen Kreisen bekannt ist (Nr. 115).

*Die Gleichungen konzentrisch-homothetischer Kegelschnitte sind nur in den konstanten Gliedern verschieden.* Denn nicht nur die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades müssen proportional sein (Nr. 223), sondern auch diejenigen der Glieder ersten Grades, weil die Koordinaten des Mittelpunktes auch von diesen, nicht aber von  $a_{33}$  abhängen (Nr. 139).

Zwei Parabeln, deren Gleichungen nur im konstanten Glied voneinander verschieden sind, haben dieselbe Achse und gleiche Hauptparameter, da weder jene noch dieser (Nr. 198) von  $a_{33}$  abhängt. *Koachsiale und ähnlich gelegene Parabeln  $y^2 = 2px, y^2 = 2p(x - x_0)$  sind kongruent und haben miteinander eine Berührung dritter Ordnung im Unendlichen*; sie haben keine Schnittpunkte im Endlichen.

**B. 1)** Die Fußpunkte der Normalen konzentrisch-homothetischer Kegelschnitte aus einem Punkt einer Achse liegen auf einem Lote zu dieser Achse (Nr. 178 und 205).

2) Wenn eine Gerade zwei ähnliche, ähnlich gelegene und konzentrische Kegelschnitte schneidet, so sind die zwischen den Kegelschnitten enthaltenen Abschnitte der Geraden gleich. Jede Sehne des äußeren Kegelschnittes, die den inneren berührt, wird im Berührungspunkt halbiert.

Dies wird in derselben Art bewiesen, wie die Sätze von Nr. 174, die nur besondere Fälle des gegenwärtigen Satzes sind, denn die Asymptoten einer Hyperbel können als ein zu ihr ähnlicher Kegelschnitt in ähnlicher Lage betrachtet werden, weil die höchsten Glieder in der Gleichung der Asymptoten dieselben sind, wie die in der Gleichung der Kurve.

3) Wenn eine Tangente in  $V$ , einem beliebigen Punkte der inneren von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen, die äußere in den Punkten  $T$  und  $T'$  schneidet, so ist jede durch  $V$  gezogene Sehne der inneren die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äußeren durch  $T$  und  $T'$ .

**227. Ähnliche Kegelschnitte.** Zwei Figuren sind *ähnlich*, aber nicht in ähnlicher Lage, wenn die proportionalen Vektoren einen konstanten Winkel miteinander bilden, anstatt parallel zu sein. Wenn wir also die eine der Figuren um diesen Winkel gedreht denken, so wird auch die ähnliche Lage hergestellt.

*Unter welcher Bedingung sind zwei durch ihre allgemeinen Gleichungen gegebene Kegelschnitte ähnlich?*

Wir haben nur die erste Gleichung zu Achsen zu transformieren, die mit den gegebenen irgend einen Winkel  $\vartheta$  bilden, und zu untersuchen, ob dem  $\vartheta$  ein Wert beigelegt werden kann, der die neuen Koeffizienten  $a'_{11}$ ,  $a'_{12}$ ,  $a'_{22}$  den alten  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  proportional macht. Sei  $a_{11} = k a'_{11}$ ,  $a_{12} = k a'_{12}$ ,  $a_{22} = k a'_{22}$ , so sahen wir in Nr. 154, daß bei rechtwinkligen Koordinatenachsen die Größen  $a_{11} + a_{22}$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  durch Transformation der Koordinaten unverändert bleiben und daß also  $a_{11} + a_{22} = k(a'_{11} + a'_{22})$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = k^2(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12})$  ist. Durch Elimination von  $k$  folgt die geforderte Bedingung

$$(23) \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) : (a_{11} + a_{22})^2 = (a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) : (a'_{11} + a'_{22})^2$$

In schiefwinkligen Koordinaten findet man in derselben Art nach Nr. 154 die Bedingung der Ähnlichkeit

$$(24) \quad \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2} = \frac{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}{(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\cos\omega)^2}.$$

Aus Nr. 58 geht als die geometrische Bedeutung der gefundenen Bedingung hervor, daß die Winkel der reellen oder imaginären Asymptotenpaare der beiden Kurven gleich sind. Insbesondere sind zwei Parabeln stets ähnlich, da dann die gefundene Bedingung identisch erfüllt ist.

Man sieht auch, daß die Ausdrücke konzentrisch-homothetisch und koachsal ähnlich gleichbedeutend sind.

**228. Konfokale Kegelschnitte.** Unter den koachsialen Kegelschnitten haben außer den ähnlichen diejenigen eine große Zahl merkwürdiger Beziehungen zueinander, die *dieselben Brennpunkte* haben und daher *konfokale (homofokale) Kegelschnitte* heißen. Denn eine große Zahl der im X. Kapitel entwickelten Eigenschaften der Kegelschnitte hängen nur von den Brennpunkten und nicht von den Achsenlängen ab.

Zwei Mittelpunktskegelschnitte, deren gleichnamige Achsen je in dieselbe Gerade fallen, sind konfokal, wenn sie die gleiche Fokaldistanz  $c$  haben, d. h. wenn die Differenz ihrer Halbachsenquadrate konstant ist. Bezeichnet  $k$  eine willkürliche Größe, so sind die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{a^2 - b^2}$  in der Form enthalten

$$(25) \quad \frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1.$$

Diese Gleichungen stellen reelle Ellipsen dar für alle negativen und diejenigen positiven Werte von  $k$ , die kleiner als  $b^2 < a^2$  sind; bei wachsendem  $k$  rücken die Scheitel der großen Achse den Brennpunkten immer näher. Für Werte von  $k$  zwischen  $b^2$  und  $a^2$  sind die Kurven Hyperbeln, deren Hauptachsen mit wachsendem  $k$  kleiner werden. Endlich liefern alle  $a^2$  übersteigenden positiven Werte von  $k$  imaginäre Ellipsen. *Die konfokalen Kegelschnitte sind Ellipsen, Hyperbeln oder imaginäre Kurven, je nachdem  $k < b^2$ ,  $b^2 < k < a^2$  oder  $a^2 < k$  ist.*

Den Werten  $k = b^2$  bez.  $k = a^2$  entspricht die Reduktion der Gleichung auf  $y^2 = 0$  bez.  $x^2 = 0$ , so daß die Achsen selbst als die Grenzen erscheinen, die konfokale Kegelschnitte verschiedener Gattungen trennen. Indessen werden wir erkennen (Nr. 230 Anm., Nr. 232), daß die Brennpunktpaare selbst in ganz besonderem Sinne diese Grenzen bilden.

**229. Schnitt konfokaler Ellipsen und Hyperbeln.** *Zwei konfokale Ellipsen bez. Hyperbeln haben keine reellen Schnittpunkte.* Denn, sind ihre Gleichungen

$$(26) \quad \frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2 - k'} + \frac{y^2}{b'^2 - k'} = 1,$$



so genügen die Koordinaten des Schnittpunktes auch ihrer Differenz, die nach Division durch  $k - k'$  die Gleichung liefert

$$(27) \quad \frac{x^2}{(a^2 - k)(a^2 - k')} + \frac{y^2}{(b^2 - k)(b^2 - k')} = 0.$$

Diese stellt aber stets ein *imaginäres* Geradenpaar (Durchmesserpaar) dar, sobald  $k$  und  $k'$  einer und derselben der Ungleichheiten von Nr. 228 genügen, also die beiden Faktoren der Glieder je gleiche Zeichen haben.

Dagegen haben, falls  $k < b^2$ ,  $b^2 < k' < a^2$  ist, die beiden

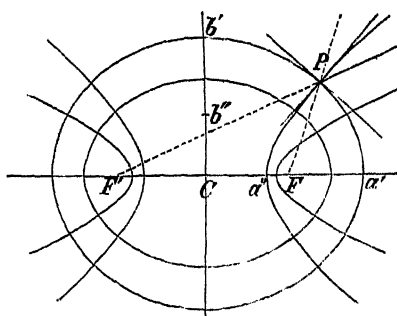


Fig. 116.

Glieder entgegengesetzte Zeichen. Eine Ellipse und eine Hyperbel des konfokalen Systems schneiden sich in vier reellen Punkten (Fig. 116). Diese bilden ein bezüglich der Achsen symmetrisches Rechteck.

Zwei konfokale Kegelschnitte schneiden sich stets rechtwinklig, denn in jedem

Schnittpunkt  $x' | y'$  zweier konfokalen Kegelschnitte sind deren Tangenten ausgedrückt durch

$$(28) \quad \frac{x'x}{a^2 - k} + \frac{y'y}{b^2 - k} = 1, \quad \frac{x'x}{a^2 - k'} + \frac{y'y}{b^2 - k'} = 1,$$

und die Bedingung ihrer Orthogonalität (Gl. (20) auf S. 67) ist identisch mit dem Ergebnis der Substitution von  $x' | y'$  in die Gleichung des Geradenpaares (27). Daß sich eine reelle Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten rechtwinklig schneiden, folgt auch schon daraus, daß ihre Tangenten in jedem Schnittpunkt  $P$  die äußere und die innere Halbierungslinie des Winkels der Brennstrahlen von  $P$  sind (Nr. 187). Die Hauptachse der Ellipse bez. Hyperbel ist dann gleich der Summe bez. Differenz dieser Brennstrahlen.\*)

\*) Man erkennt, daß die Methode von Nr. 195 ebenfalls Paare konfokaler Kurven liefert. Man zeigt leicht, daß die Ellipse und die Hyperbel jener Konstruktion die Winkel der Grundkreise halbieren.

Hieran schließen sich weitere Übertragungen der Brennpunkteigenschaften auf Beziehungen zwischen konfokalen Kegelschnitten. *Die Tangente und die Normale in einem Punkte  $P$  eines Kegelschnittes sind für alle Tangentenpaare aus  $P$  an konfokale Kegelschnitte die Winkelhalbierenden*, oder diese bilden eine symmetrische Involution (Nr. 95). Denn nach Fig. 98 von Nr. 188 haben die Tangenten  $PB, PB'$  und die Brennpunktstrahlen  $PF, PF'$  dieselben Winkelhalbierenden, und zwar sind dies, wenn wir uns einen Kegelschnitt durch  $P$  denken, der  $F, F'$  zu Brennpunkten hat, nach Nr. 187 dessen Tangente und Normale.

B. 1) Der Ort des Poles einer festen Geraden in bezug auf konfokale Kegelschnitte ist eine zu ihr senkrechte Gerade.

Der Pol einer Geraden  $ux + vy + 1 = 0$  in bezug auf  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  wird aus den Gleichungen  $-x = a^2 u, -y = b^2 v$  (Nr. 167) gefunden; sind die Brennpunkte des Kegelschnittes gegeben, so ist  $a^2 - b^2 = c^2$  bestimmt und der Ort des Poles hat daher die Gleichung  $-vx + uy = c^2 uv$ .

2) Die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten, in denen ihn die Tangente  $t$  eines konfokalen Kegelschnittes schneidet, treffen sich in der zu dieser Tangente gehörigen Normale.

Denn diese ist der Ort der Pole in 1), weil der Schnittpunkt der gegebenen Geraden  $t$  mit diesem Ort der Berührungspunkt derselben mit einem Kegelschnitte ist.

3) Der Ort der Berührungspunkte der aus einem festen Punkt der Haupt- oder Nebenachse an konfokale Ellipsen gezogenen Tangenten ist je ein Kreis.

4) Der Satz Nr. 194, 14 gilt auch noch, wenn statt  $OF, OF'$  die Tangenten  $OB, OB'$  an einen konfokalen Kegelschnitt genommen werden. Hieraus folgt:

Die einen konfokalen Kegelschnitt berührenden Sehnen eines Kegelschnittes sind den Quadraten der parallelen Durchmesser des letztgenannten proportional.

5) Die Länge einer Ellipsensehne, die eine konfokale Ellipse von den Halbachsenquadraten  $a^2 - k^2, b^2 - k^2$  berührt, ist  $\frac{2kb'^2}{ab}$ .<sup>76)</sup>

Die Bedingung, unter der die Sehne zwischen den Punkten von den exzentrischen Anomalien  $\alpha, \beta$  den konfokalen Kegelschnitt berührt, ist

$$b^2 (a^2 - k^2) \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + a^2 (b^2 - k^2) \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ = a^2 b^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

und man hat (Nr. 169, 3)

$$a^2 b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = k^2 \{ b^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \} = k^2 b'^2.$$

Die Länge der Sehne ist  $2b' \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2kb'^2 : ab$ .

Mit Hilfe dieses Satzes können verschiedene auf Fokalsehnen bezügliche Sätze auf Schnen ausgedehnt werden, die konfokale Kegelschnitte berühren.

Er führt auch zu einem unmittelbaren Beweis des Satzes im B. 14 von Nr. 194, da sich  $OR. OR'$  und  $OS. OS'$  wie die Quadrate der parallelen Durchmesser verhalten (Nr. 151) und hier bewiesen ist, daß auch  $OR - OR'$  und  $OS - OS'$  in diesem Verhältnis stehen.

**230. Elliptische Koordinaten.** Durch jeden reellen oder imaginären Punkt  $P(x'|y')$  der Ebene gehen zwei Kegelschnitte von gegebenen Brennpunkten, die sich rechtwinklig schneiden. Denn die Gleichung

$$(29) \quad \frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$$

liefert bei Einsetzung von  $x'|y'$  zur Bestimmung von  $k$  eine quadratische Gleichung

$$(30) \quad k^2 - k(a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2) + a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = 0.$$

Durch jeden reellen Punkt  $P$  gehen also (Nr. 229) eine Ellipse und eine Hyperbel von gegebenen Brennpunkten  $F, F'$ . Man bestätigt dies direkt durch den Nachweis, daß im Falle  $b^2 < a^2$  zwischen  $-\infty$  und  $b^2$ , zwischen  $b^2$  und  $a^2$  stets je eine reelle Wurzel jener Gleichung liegt.\*) Diesen beiden Wurzeln  $k'$  und  $k''$  entsprechend seien

$$(31) \quad a^2 - k' = a'^2, \quad b^2 - k' = b'^2; \quad a^2 - k'' = a''^2, \quad b^2 - k'' = -b''^2$$

die Halbachsenquadrate der Ellipse bez. der Hyperbel.

Diese Theorie kann eine neue Art von Koordinaten eines Punktes  $P$  definieren, die manchmal brauchbar ist. Man nennt die Wurzeln  $k', k''$  der Gleichung (30) die elliptischen Koordinaten des Punktes  $x'|y'$ . In der Tat ist auch  $P$  eindeutig

\*) Für Punkte  $x'|0$  zerfällt die Gleichung in  $(k - b^2)(k - a^2 + x'^2) = 0$ , die Wurzel  $k = b^2$  liefert  $y^2 = 0$ ,  $k = a^2 - x'^2$  den Kegelschnitt, der  $x'|0$  zum Scheitel hat. Ist dagegen insbesondere  $x'^2 = a^2 - b^2$ , so daß auch die zweite Wurzel  $k = b^2$  wird, so ist klar, daß die Brennpunkte  $\pm c|0$  in einem gewissen Sinn dem Wert  $k = b^2$  entsprechen, ebenso  $0|\pm ci$  in  $x^2 = 0$  dem Wert  $k = a^2$ .

durch zwei konfokale Kegelschnitte bestimmt, wenn man sich auf Punkte eines bestimmten Quadranten beschränkt. Man ersetzt dann  $k', k''$  zweckmäßig durch die Angabe der halben Hauptachsen  $a', a''$  dieser Kurven und drückt durch sie  $x' | y'$  und die Längen aller von  $P$  abhängigen Linien aus. Nach Nr. 185 sind z. B. die Brennstrahlen des Punktes  $k', k''$   $FP = a' - a''$ ,  $F'P = a' + a''$ .

Da nämlich nach Gleichung (30):

$$(32) \quad k' + k'' = a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2, \quad k'k'' = a^2b^2 - b^2x'^2 - a^2y'^2$$

ist, so können wir die Summen und Produkte bilden

$$\begin{aligned} a'^2 + a''^2 &= c^2 + x'^2 + y'^2, & b'^2 + (-b''^2) &= -c^2 + x'^2 + y'^2, \\ a'^2 a''^2 &= c^2 x'^2, & b'^2 b''^2 &= c^2 y'^2, \end{aligned}$$

also quadratische Gleichungen mit den Wurzelpaaren  $a'^2, a''^2$  und  $b'^2, -b''^2$  aufstellen. Die Betrachtung der Vorzeichen lehrt, daß  $a'^2, a''^2; b'^2, b''^2$  positive Zahlen und also die Kurven von verschiedener Gattung sind. Aus den elliptischen Koordinaten  $k', k''$  eines Punktes folgen seine rechtwinkligen durch

$$(33) \quad x'^2 = \frac{a'^2 a''^2}{a^2 - b^2}, \quad y'^2 = \frac{b'^2 b''^2}{a^2 - b^2}.$$

Aus den obigen Summen oder durch Addition dieser Ausdrücke folgen aber

$$(34) \quad x'^2 + y'^2 = a'^2 + a''^2 - c^2 = a''^2 + b'^2 = a'^2 - b''^2$$

als das Quadrat des der Ellipse und der Hyperbel gemeinsamen Halbmessers  $CP$ . Dagegen ist das Quadrat des zu  $CP$  konjugierten Halbmessers  $\beta$  der Ellipse (vgl. Nr. 170):

$$(35) \quad \beta^2 = a'^2 + b'^2 - (a'^2 - b''^2) = b'^2 + b''^2 \text{ oder } a'^2 - a''^2,$$

während für die Hyperbel der Wert mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen ist.

**B. 1)** Neigungswinkel  $\psi$  zwischen den Tangenten  $PT, Pt$  aus einem Punkt  $P$  an eine Ellipse und der Tangente in  $P$  an die konfokale Ellipse.

Nach Nr. 229 ist  $\angle \psi = 90^\circ - \frac{1}{2} \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} TPt$ , also ist der Winkel des Tangentenpaares zu bestimmen (Nr. 167, 3). Sind  $a', a''$  die halben Hauptachsen der konfokalen Kurven durch  $P$ , so ist

$$k'k'' = (a'^2 - a^2)(a''^2 - a^2) = a^2b^2 - b^2x'^2 - a^2y'^2$$

und  $a'' < a < a'$  für ein reelles Tangentenpaar. Also nach Nr. 167, 3

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{2 \sqrt{(a'^2 - a^2)(a^2 - a''^2)}}{(a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2)}.$$

Zur Bestimmung von  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$  beachte man, daß wenn  $\operatorname{tg} \varphi$  von der Form  $\frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2}$  ist, sich für  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$  sofort  $\mu : \lambda$  ergibt. Im vorliegenden Falle ist  $\lambda^2 = a'^2 - a^2$ ,  $\mu^2 = a^2 - a''^2$ , daher wird

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \pm \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}},$$

$$\text{somit} \quad \sin \psi = \pm \sqrt{\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a''^2}}, \quad \cos \psi = \pm \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a''^2}}.$$

Man hat auch

$$a'^2 \cos^2 \psi + a''^2 \sin^2 \psi = a^2.$$

2) Werden die Fokalabstände  $PF$ ,  $PF'$  auf den Tangenten  $PT$ ,  $Pt$  von  $P$  aus abgetragen, so ist die Entfernung zwischen den Endpunkten gleich der großen Achse.

Denn die Fokalabstände sind  $a' + a''$ ,  $a' - a''$  und in dem Dreieck mit der dritten Seite  $2a$  erhält man trigonometrisch für  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$  genau den angegebenen Wert.

3) Werden von  $P$  aus Tangenten an zwei feste konfokale Ellipsen gezogen, so ist das Sinusverhältnis der Neigungswinkel  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  derselben gegen die Tangente der durch  $P$  gehenden konfokalen Ellipse konstant, wenn  $P$  diese Ellipse durchläuft.

Denn sind  $a_1$ ,  $a_2$  die Halbachsen der inneren Ellipsen, so ist

$$\frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} = \pm \sqrt{\frac{a'^2 - a_1^2}{a'^2 - a_2^2}}$$

von  $a''$  unabhängig, also für Punkte der Ellipse  $a'$  konstant.

4) Die Abstände  $d'$  bez.  $d''$  der Ellipsen- bez. Hyperbeltangente in  $P$  vom Mittelpunkt sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$d'^2 = \frac{a'^2 b'^2}{a'^2 - a''^2}, \quad d''^2 = \frac{a''^2 b''^2}{a'^2 - a''^2},$$

denn sie folgen aus den zu  $CP$  konjugierten Halbmessern nach Nr. 170, 2 und nach Gl. (35), S. 423.

5) Nimmt man die im Schnittpunkt  $P$  zweier konfokalen Kegelschnitte  $k'$  und  $k''$  gezogenen Tangenten als Achsen, so gibt es zwei konfokale Kegelschnitte, die diese Tangenten zu Achsen haben und die Achsen von  $k'$  und  $k''$  in  $C$  berühren. Die Halbachsenpaare dieser neuen Kegelschnitte sind  $a'$ ,  $a''$  und  $b'$ ,  $b''$ .

Dieser Satz ist nur der Ausdruck der Analogie zwischen den Werten für  $d'^2$ ,  $d''^2$  in 4) und denen des Textes für  $x'^2$ ,  $y'^2$ , während  $d'$ ,  $d''$  wirklich die auf die Tangenten als Achsen bezogenen Koordinaten von  $C$  sind.

6) In zwei Ebenen  $e$  und  $e'$ , deren Figuren durch die Kollineation  $x = bb':x', y = b'y':x'$  verbunden sind, entsprechen den konfokalen Kegelschnitten mit den Brennpunkten  $F_1, F_2$  in der Ebene  $e$  die konfokalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $F'_1, F'_2$  in der Ebene  $e'$ , nämlich den Ellipsen der einen konfokalen Schar die Hyperbeln der anderen. In der Tat geht die Gleichung des Kegelschnittes der ersten Schar mit der Halbachse  $\lambda$

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b'^2} = 1$$

durch die Substitution

$$x = \frac{bb'}{x'}, \quad y = \frac{b'y'}{x'}$$

über in

$$\frac{\lambda^2 x'^2}{b^2 b'^2} + \frac{\lambda^2 y'^2}{b^2 (b'^2 - \lambda^2)} = 1,$$

d. h. mit  $\lambda\lambda' = bb'$  in

$$\frac{x'^2}{\lambda'^2} + \frac{y'^2}{\lambda'^2 - b'^2} = 1.$$

Die elliptischen Koordinaten entsprechender Punkte der kollinearen Ebenen haben konstantes Produkt. Durch diese konfokalen Kegelschnitte werden die kollinearen Ebenen in entsprechende krummlinige Rechtecke geteilt.<sup>79)</sup>

7) Die numerischen Exzentrizitäten der entsprechenden Kegelschnitte der beiden konfokalen Systeme sind reziprok oder die Asymptoten der Hyperbel bilden miteinander denselben Winkel wie die von einem Brennpunkt nach den Endpunkten der kleinen Achse der Ellipse gezogenen Strahlen.

231. **Konfokale Parabeln.** Da Parabeln als Ellipsen oder Hyperbeln mit einem unendlich fernen Brennpunkt aufgefaßt werden können (Nr. 206), so sind *konfokale Parabeln* solche, die denselben Brennpunkt und dieselbe Achse haben (Fig. 117). Die allgemeinen Sätze über konfokale Mittelpunktskegelschnitte übertragen sich mit entsprechender Änderung auf konfokale Parabeln.

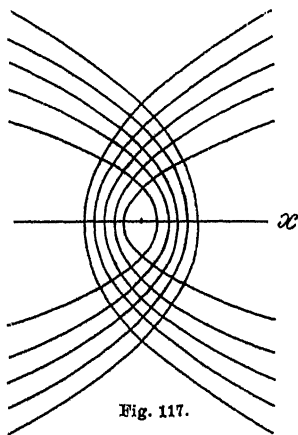


Fig. 117.

Die Gleichung für den Brennpunkt als Nullpunkt lautet

$$(36) \quad y^2 - 2px - p^2 = 0,$$

mit willkürlichem Hauptparameter  $p$ . Die Parabeln öffnen sich, je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist, in der positiven oder negativen Richtung der  $x$ -Achse. *Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Parabeln von gegebenem Brennpunkt und gegebener Achse, die sich rechtwinklig schneiden.* Denn durch Einsetzung von  $x'|y'$  in (36) entsteht eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln  $p_1, p_2$ , deren Summe und Produkt die Werte haben

$$p_1 + p_2 = -2x', p_1 p_2 = -y'^2.$$

Die zweite Bedingung zeigt, daß die Tangenten der zu  $p_1$  und  $p_2$  gehörigen Parabeln rechtwinklig sind. In konfokalen Parabeln mit reellen Schnittpunkten sind die Brennstrahlen der Scheitel  $\frac{1}{2}p_1$  und  $\frac{1}{2}p_2$  entgegengesetzt gerichtet.

**B.** Die aus  $P$  an konfokale Parabeln gezogenen Tangentenpaare haben dieselben Winkelhalbierenden wie der Brennstrahl und die Achsenparallele von  $P$ .

Man prüfe die Gültigkeit der Sätze Nr. 230, 3, 5 für Parabeln. Welche Bedeutung erhält B. 6?

**232. Konfokale Kurven zweiter Klasse.** Neben der vorstehenden ist die Behandlung in Linienkoordinaten angezeigt. Nach Nr. 167, S. 330 ist *die Tangentialgleichung konfokaler Zentralkegelschnitte*

$$(37) \quad \begin{aligned} (a^2 - k)u^2 + (b^2 - k)v^2 &= 1 \quad \text{oder} \\ a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 &= k(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

und man erhält leicht wie in Nr. 196 *die der konfokalen Parabeln* aus  $(p + x')u = 1, y'u = -pv$  in der Gestalt

$$(38) \quad p(u^2 + v^2) - 2u = 0.$$

Da die Gleichungen (37) und (38) die Größe  $k$  bez.  $p$  nur linear enthalten, so berührt unter den konfokalen Kegelschnitten nur je einer eine gegebene Gerade  $u|v$ . *Durch die Brennpunkte und eine Tangente ist daher ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt, nicht aber durch die Brennpunkte und einen Punkt.* (Vgl. Nr. 230 Anm.)

Die Diskussion der Gleichungen für die Werte der Konstanten liefert eine bemerkenswerte neue Anschauung der Grenzfälle  $k = b^2, k = a^2, p = 0$ . Dieselben liefern nämlich

$$(39) \quad c^2 u^2 - 1 = 0, \quad c^2 v^2 + 1 = 0; \quad u = 0,$$

d. h. zerfallende *Gleichungen von Punktepaaren*. Das erste bez. zweite Punktepaar wird von den reellen bez. imaginären Brennpunkten gebildet; endlich steht  $u=0$  für  $0 \cdot u^2 + u = 0$  (Nr. 16), oder sowohl für  $u=0$  als  $1:u=0$ ; dies sind die Gleichungen der Punkte  $\infty|0$  und  $0|0$ , der Brennpunkte der Parabel. Das heißt: alle Strahlen durch den einen oder den anderen Brennpunkt eines Paares sind Tangenten einer konfokalen Kurve zweiter Klasse. *Somit gelten die Paare der Brennpunkte selbst als Grenzformen*, das reelle als die zwischen konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, positiv oder negativ gerichteten konfokalen Parabeln, das imaginäre als die zwischen Hyperbeln und imaginären Kegelschnitten. Dabei werden aber die Kegelschnitte ausdrücklich nur als *Kurven zweiter Klasse* betrachtet, während in Nr. 228 die Achsen selbst als entartete Kurven zweiter Ordnung auftraten.

Den beiden zu  $k'$  und  $k''$  oder zu  $p_1$  und  $p_2$  gehörigen Kurvengleichungen genügen nur solche Wertepaare von  $u|v$  gleichzeitig, die auch die Differenz dieser Gleichungen befriedigen, nämlich  $u^2 + v^2 = 0$ . Diese Gleichung stellt aber das Paar der imaginären Kreispunkte dar (Nr. 61 und 196). *Alle konfokalen Kurven zweiter Klasse berühren daher vier feste Tangenten der absoluten Richtungen*. Wirklich ist dies nach Nr. 181 geradezu die Definition der gemeinsamen Brennpunkte.



## Dreizehntes Kapitel.

### Die Methode des Unendlichkleinen.

233. Die Differential- und Integralrechnung erlaubt auf sehr einfache Weise, die Tangenten der Kurven, die Größe ihrer Flächen und die Länge ihrer Bogen zu bestimmen. Obgleich wir von der Symbolik und den Grundbegriffen der Differentialrechnung in diesem Werke weiterhin mehrfachen Gebrauch machen werden, wollen wir doch einige der angedeuteten Fragen, insofern sie sich eben nur auf Kegelschnitte beziehen, hier ohne direkte Vermittelung der genannten Methoden der Untersuchung behandeln, um eine Idee von der Art zu geben, wie solche Fragen vor der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung behandelt wurden.

Wir geben damit zugleich ihren analytischen Begriffen die geometrische Grundlage. Und die geometrische Methode, die wir erläutern, hat in bezug auf manche Fragen vor der Analysis den Vorzug der Einfachheit und Kürze; sie führte noch in neuester Zeit zu einzelnen schönen Ergebnissen (vgl. Nr. 247), die durch Anwendung der Integralrechnung auf die Rektifikation der Kegelschnitte nicht gefunden worden waren.

Wenn ein gleichseitiges Vieleck einer Kurve eingeschrieben ist, so nähert sich augenscheinlich der Inhalt und Umfang des Vielecks um so mehr der Gleichheit mit dem Inhalt und Umfang der Kurve, je größer die Zahl der Seiten des Vielecks und je kleiner daher jede einzelne Seite desselben wird; gleichzeitig nähert sich jede Seite des Vielecks mehr und mehr dem Zusammenfallen mit der Tangente der Kurve in dem Punkte, in dem zwei benachbarte Sehnen zusammenstoßen. Ist die Zahl der Seiten unendlich groß und die Länge jeder einzelnen Seite unendlich klein geworden, so fällt das Vieleck mit der Kurve zusammen, und die Tangente derselben in jedem ihrer Punkte wird mit der Verbindungsgeraden zweier unendlich benachbarten Punkte in ihr identisch.



lichkeit der Dreiecke des einen mit denen des anderen, daß ihre Grundlinien  $ab$  und  $AB$  in dem Verhältniß der Radien beider Kreise stehen, und hieraus folgt, daß auch die Umfänge beider Vielecke als die Summen solcher Seiten, und wenn die Seitenzahl unendlich groß gedacht wird, die Kreisperipherien in demselben Verhältniß stehen.

Beisp. 3. *Der Inhalt eines Kreises ist dem Produkt aus dem Halbmesser in den halben Umfang gleich.*

Denn der Inhalt jedes der Dreiecke  $OAB$  ist das Produkt aus der Hälfte seiner Grundlinie in das vom Mittelpunkt auf dieselbe gefällte Lot; somit ist der Inhalt jedes der betrachteten regelmäßigen Vielecke gleich dem mit der senkrechten Entfernung einer Seite desselben multiplizierten halben Umfang. Mit der Vermehrung ihrer Zahl nähert sich ohne Ende der Umfang des Vielecks der Peripherie des Kreises und jene senkrechte Entfernung einer Seite dem Halbmesser des Kreises, so daß die Differenz beider kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden kann. Daher ist der ausgesprochene Satz richtig. Da der Kreisumfang gleich  $2\pi\rho$  ist, wird der Inhalt eines Kreises durch  $\rho^2\pi$  ausgedrückt.

235. Beisp. 1. *Die Richtung der Tangente in einem Punkt der Ellipse zu bestimmen.*

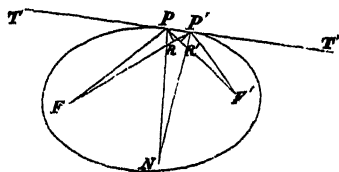


Fig. 119.

Man bezeichne durch  $P$  und  $P'$  zwei unendlich nahe Punkte der Kurve (Fig. 119), so daß man hat  $FP + PF' = FP' + P'F'$ . Nimmt man nun  $FR = FP$  und  $F'R' = F'P'$ ,

so ist  $P'R = PR'$ . Die beiden Dreiecke  $PRP'$  und  $PR'P'$  haben die gemeinschaftliche Basis  $PP'$ , die gleichen Katheten  $P'R$  und  $PR'$  und nach dem Prinzip von Nr. 234 die rechten Winkel  $PRP'$  und  $PR'P'$ ; infolgedessen ist  $\sphericalangle PP'R = \sphericalangle P'PR'$ . Unter der Voraussetzung, die wir gemacht haben, daß die Punkte  $P$  und  $P'$  unendlich nahe sind, ist  $\sphericalangle TPF' = \sphericalangle PP'F'$ , weil ihre Differenz unter jeden angebbaren Winkel herabgebracht werden kann; demnach hat man  $\sphericalangle TPF' = \sphericalangle T'PF'$ : die Brennstrahlen des Berührungspunktes bilden

gleiche Winkel mit der Tangente und bestimmen sie dadurch (Nr. 187).

Beisp. 2. *Man soll die Richtung der Tangente in einem Punkt der Hyperbel bestimmen.*

Bei der nämlichen Konstruktion wie vorher ist (Fig. 120):

$$F'P' - F'P = FP' - FP,$$

oder  $P'R = P'R'.$

Daher folgt  $\sphericalangle PP'R = \sphericalangle PP'R',$   
oder: die Tangente ist die innere  
Halbierungslinie des Winkels der  
Brennstrahlen von  $P'.$

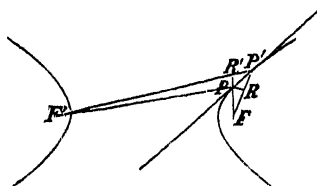


Fig. 120.

Beisp. 3. In derselben Art bestimmen wir die Richtung der Tangente in einem Punkt der Parabel; denn wir haben (Fig. 121)

$$FP = PN \text{ und } FP' = P'N';$$

also  $P'R = P'S$  oder  $\sphericalangle N'P'P = \sphericalangle FP'P.$

Die Tangente halbiert den Winkel  $FPN$ , den der Brennstrahl des Berührungspunktes mit dem durch ihn gezogenen Durchmesser der Parabel bildet.

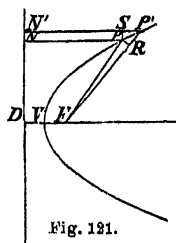


Fig. 121.

236. Beisp. 1. *Man soll den Inhalt des parabolischen Sektors  $VF'P'V$  bestimmen.*

Aus  $PS = PR$  und  $PN = FP$  folgt, daß die Fläche des Dreiecks  $P'PR$  die Hälfte des Parallelogramms  $PSN'N$  ist. Wenn wir eine Anzahl von Punkten  $P', P''$  usw. zwischen  $V$  und  $P$  nehmen, so wird die Summe aller der entsprechenden Parallelogramme  $PSN'N$  usw. der Gleichheit mit dem Inhalt der Fläche  $DVPND$  um so mehr genähert, je näher die einzelnen Punkte  $P$  einander sind; ebenso die Summe aller Dreiecke  $F'PR$  der Gleichheit mit dem Inhalt der Fläche des Sektors  $VF'PV$ . Demnach ist der Inhalt des Sektors  $VF'PV$  die Hälfte von  $DVPND$  und somit ein Drittel des Vierecks  $DFPND$ .

Beisp. 2. *Man bestimme den Inhalt des durch eine beliebige Gerade abgeschnittenen Segments einer Parabel.*



$b:a$  steht. Also wird der Inhalt der Ellipse durch den Ausdruck  $ab\pi$  bestimmt.

Man beweist ebenso, daß die Flächen zweier Figuren, deren entsprechende Ordinaten zueinander in einem bestimmten Verhältnis stehen, immer das nämliche Verhältnis haben.

Beisp. 2. *Der Durchmesser eines Kegelschnittes halbiert ihn.*

Die Richtigkeit des Satzes erhellt sofort aus der Betrachtung der Trapeze, in die die Fläche der Kurve durch die dem Durchmesser entsprechenden Ordinaten zerlegt wird. Weil der Durchmesser alle ihm entsprechenden Ordinaten halbiert, so halbiert er auch diese Trapeze und demnach die Kurve, weil die Fläche derselben der Summe dieser Trapeze gleich ist, sobald man die Ordinaten als unendlich nahe voraussetzt.

Beisp. 3. *Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen zweier homologer Sehnen derselben.* Denn je zwei Dreiecke, die in zwei homologen festen Punkten  $O, o$  je eine Ecke und homologe Sehnen  $PQ, pq$  zu Gegenseiten haben, sind ähnlich und verhalten sich wie  $\overline{OP}^2 : \overline{op}^2$ . Dies gilt unabhängig davon, wie sehr sich die Sehnen  $PQ, pq$  den Tangenten nähern. Die unbegrenzte Zerlegung in homologe Sektoren von  $O$  und  $o$  aus ergibt also stets auch für ihre Summe jenes konstante Verhältnis.

238. Beisp. 1. *Der Inhalt des Sektors einer Hyperbel, der durch die Verbindungsgerade zweier ihrer Punkte mit dem Mittelpunkt begrenzt wird, ist dem Inhalt des Segments gleich, das durch Parallelen zu den Asymptoten von denselben Punkten aus bestimmt wird.*

Denn wegen der Gleichheit der Dreiecke  $PKC$  und  $QLC$  (Nr. 164) ist auch die Fläche  $PQC$  gleich der Fläche  $PQLK$  (Fig. 124).

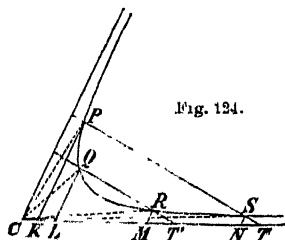


Fig. 124.

Beisp. 2. *Zwei beliebige Segmente  $PQLK$  und  $RSNM$  sind gleich, wenn  $PK:QL = RM:SN$  ist. Denn  $PK:QL = CL:CK$ , und nach Nr. 174 ist  $CL = MT', CK = NT'$ ; also  $RM:SN = MT':NT'$ , somit  $QR$  parallel zu  $PS$ . Nun sind die Sektoren  $PCQ$  und  $RCS$  einander gleich, weil der  $PS$  und*



halt abschneide, so hätte man durch den Punkt zu einem bestimmten ähnlichen, ähnlich gelegenen, konzentrischen Kegelschnitt eine Tangente zu ziehen; mit dem abzuschneidenden Inhalt müßte die Entfernung zwischen beiden Kegelschnitten wachsen. Wenn dieser zweite innere Kegelschnitt durch den gegebenen Punkt selbst geht, wird der abgeschnittene Inhalt am kleinsten. Weil dann die Gerade als Tangente der Kurve in dem gegebenen Punkt halbiert wird, hat man die Gerade, die den Minimalinhalt abschneiden soll, so durch den gegebenen Punkt zu ziehen, daß sie in ihm halbiert wird.

240. Durch analoge Betrachtungen können die beiden folgenden von *Mac Cullagh* herrührenden Sätze bewiesen werden: 1) Wenn die Tangente  $AB$  einer Kurve in einer zweiten Kurve einen Bogen  $AB$  von konstanter Länge abschneidet, so wird sie in ihrem Berührungspunkt  $P$  so geteilt, daß ihre Abschnitte  $AP$  und  $BP$  in dem umgekehrten Verhältnis der Tangenten  $AT$ ,  $BT$  der zweiten Kurve in  $A$  und  $B$  stehen. 2) Wenn die Tangente  $AB$  von konstanter Länge ist, und wenn das vom Schnittpunkt  $T$  der in  $A$  und  $B$  an die äußere Kurve gezogenen Tangenten auf die Gerade  $AB$  gefällte Lot diese Gerade in  $M$  trifft, so ist stets  $AP = MB$ .

Man kann die Beweise auch auf den Transversalensatz von Nr. 54, 1 stützen. Im ersten Satz sind die beiden zwischen aufeinander folgenden Tangenten  $AB$ ,  $A'B'$  enthaltenen Bogenteile gleich. Behandelt man  $A'B'$  als Transversale des Dreiecks  $ABT$ , die die Seite  $AB$  in  $Q$  schneidet, so ist  $AA' \cdot TB' \cdot BQ = AQ \cdot BB' \cdot TA'$  und, weil  $AA' = BB'$  ist, folgt im Grenzübergang

$$AQ : BQ = TB' : TA' \quad \text{oder} \quad AP : BP = TB : TA.$$

Beim zweiten Satz denken wir das Dreieck  $QA'A$  erstens durch  $TBB'$ , zweitens durch  $TMM'$  geschnitten. Die Multiplikation der entsprechenden Transversalenbeziehungen liefert wegen  $AB = A'B'$ :

$$AM \cdot QM' \cdot QB = A'M' \cdot QM \cdot QB'.$$

Geht man zur Grenze über, so ist  $QM = QM'$  zu setzen, weil  $MM'$  auf  $AB$  senkrecht ist, dagegen kann nicht eben-



sowohl  $QB = QB'$  und  $AM = A'M'$  angenommen werden, solange die beiden Tangenten noch irgendwelchen kleinen Winkel einschließen. Also ist aus  $AM \cdot QB = A'M' \cdot QB'$  zu schließen, daß  $AM = QB'$ ,  $A'M' = QB$ , also auch  $AM = PB$  ist.

241. Wir haben mehrmals (Nr. 189 und 210) von einem festen Punkt  $O$  aus die Lote  $OT$  auf die Tangenten  $PT$  einer Kurve  $k$  gefällt und den Ort ihrer Fußpunkte  $T$  bestimmt; derselbe heißt die *Fußpunktkurve von  $k$  in bezug auf  $O$* .

*Die Normale der Fußpunktkurve im Punkt  $T$  halbiert  $OP$ .*

In der Tangente vom Berührungspunkt  $P'$  sei  $T'$  der Fußpunkt des Lotes  $OT'$  und  $Q$  der Schnittpunkt der Tangenten in  $P$  und  $P'$ . Dann liegen  $T$  und  $T'$  auf dem über  $OQ$  als Durchmesser beschriebenen Kreis, und das Mittellot von  $TT'$  halbiert daher den Durchmesser  $OQ$ . Nähert sich nun  $P'$  unbegrenzt  $P$ , so fällt der Tangentenschnittpunkt  $Q$  mit  $P$  zusammen, ebenso  $T'$  mit  $T$ , und das Mittellot von  $TT'$  wird Normale der von  $P$  erzeugten Fußpunktkurve.

242. *Den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkt einer Ellipse zu bestimmen.*

Weil der Mittelpunkt des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Schnittpunkt der Mittellote seiner Seiten ist, so ist der Mittelpunkt des durch drei aufeinander folgende Punkte einer Kurve gehenden Kreises der Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Normalen der Kurve (Nr. 218).

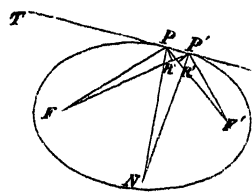


Fig. 126.

Betrachten wir also zwei Dreiecke  $FPF'$  und  $FP'F''$  (Fig. 126) und bezeichnen wir die Halbierungslinien ihrer Winkel an der Spitze durch  $PN$ ,  $P'N$ , so folgt elementar geometrisch, daß

$$(1) \quad 2 \sphericalangle PNP' = \sphericalangle PFP' + \sphericalangle P'F''P'.$$

Weil nun der Bogen eines Kreises dem Radius desselben und der Größe des Zentriwinkels proportional ist, so wird

$$\sphericalangle PNP' \text{ durch } PI' : PN$$

gemessen, wenn wir den Bogen  $PP'$  als Bogen des Kreises vom Mittelpunkt  $N$  betrachten. Ebenso wird für  $FR = FP$ ,  $\sphericalangle PFP'$  durch  $PR:FP$  gemessen, und wir erhalten

$$\frac{2PP'}{PN} = \frac{PR}{FP} + \frac{P'R'}{F'P'}.$$

Bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel  $PP'F$ , so ist

$$PR = P'R' = PP' \sin \vartheta,$$

und, indem wir  $PN = \varrho$ ,  $FP = r$  und  $F'P = r'$  setzen,

$$(2) \quad \frac{2}{\varrho \sin \vartheta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Also ist die Fokalsehne der Krümmung ( $2\varrho \sin \vartheta$ , Nr. 220, 9f.) für einen Punkt der Ellipse das Doppelte des harmonischen Mittels zwischen seinen Brennstrahlen (vgl. Nr. 15, 2).

Wenn man für  $\sin \vartheta$  den Wert  $b:b'$  (vgl. Nr. 187), für  $r + r'$  den Wert  $2a$  und für  $rr'$  den Wert  $b'^2$  (Nr. 185) einsetzt, erhält man den bekannten Ausdruck wieder  $\varrho = b'^3:ab$  (Nr. 218, 2).

Der Krümmungsradius der Hyperbel wird auf ganz ähnliche Art ermittelt. Im Fall der Parabel ist  $r'$  unendlich groß und daher

$$(3) \quad 2r = \varrho \sin \vartheta.$$

243. Ein interessantes Ergebnis in bezug auf die Fokalsehne der Krümmung eines Kegelschnittes erhalten wir durch folgende Betrachtung.<sup>80)</sup> Wir ziehen in dem betrachteten Kegelschnitt eine Sehne  $QR$  (Fig. 127) parallel zu der Tangente im Punkte  $P$ , beschreiben den durch die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  bestimmten Kreis und verlängern die Fokalsehne  $PL$  des Kegelschnittes, bis sie den Kreis zum zweitenmal in  $C$  trifft. Dann ist nach

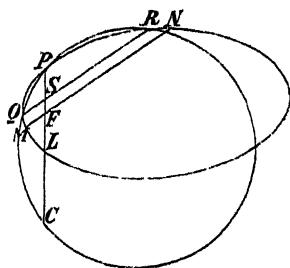


Fig. 127.

einem in Nr. 150 ausgesprochenen Satze und nach Nr. 184, 2:

$$(4) \quad \frac{PS \cdot SL}{QS \cdot SR} = \frac{PF \cdot FL}{MF \cdot FN} = \frac{PL}{MN}.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises besteht die Beziehung  $PS \cdot SC = QS \cdot SR$ , mithin ist für jeden so be-

schriebenen Kreis  $SC:SL = MN:PL$ . Da aber für den Krümmungskreis die Punkte  $S$  und  $P$  zusammenfallen, so ist für ihn  $PC = MN$ , d. i. für einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes ist die Fokalsehne des Krümmungskreises derjenigen Fokalsehne des Kegelschnittes gleich, die der Tangente jenes Punktes parallel ist (Nr. 220, 10).

244. Der Krümmungsradius eines Mittelpunktskegelschnittes kann auch wie folgt gefunden werden:

Es sei  $Q$  ein dem Punkt  $P$  unendlich naher Punkt der

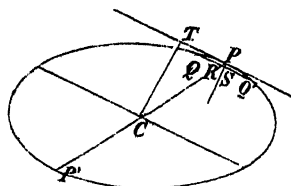


Fig. 128.

Kurve (Fig. 128) und  $QR$  eine zur Tangente der Kurve in  $P$  parallel gezogene Gerade, die die Normale von  $P$  in  $S$  schneidet. Wenn man alsdann durch die Punkte  $P$  und  $Q$  einen Kreis beschreibt, der die Tangente  $PT$  in  $P$  berührt, so ist  $QS$

eine zu dem Stück  $PS$  des Durchmessers gehörige Ordinate des Kreises, und das Rechteck aus diesem Durchmesser und dem Abschnitt  $PS$  ist gleich dem Quadrat über der Sehne  $PQ$ , oder der Krümmungsradius des Punktes  $P$  ist  $\rho = \overline{PQ}^2 : 2PS$ . Bezeichnet  $a'$  den Halbmesser  $CP$ ,  $b'$  den zu ihm konjugierten Halbmesser, so besteht nach S. 309 (Nr. 151) die Gleichung (5)  $b'^2 : a'^2 = QR \cdot RQ' : PR \cdot RP'$  oder  $b'^2 : a'^2 = QR^2 : PR \cdot RP'$ , und wenn  $Q$  dem Punkte  $P$  unendlich nahe rückt, wird  $PQ = RQ$ , ferner geht dann  $RP'$  über in  $2a'$ . man erhält daher

$b'^2 : a'^2 = \overline{PQ}^2 : 2a' \cdot PR$  oder  $a' \cdot \overline{PQ}^2 = 2b'^2 \cdot PR$ , somit

$$\rho = \frac{b'^2}{a'} \cdot \frac{PR}{PS}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $PRS$  und  $OPT$  folgt aber  $PR : PS = CP : CT = a' : d$ , wenn  $d$  den Abstand des Mittelpunktes  $C$  der Ellipse von der in  $P$  gezogenen Tangente bedeutet. Es ergibt sich daher schließlich (vgl. Nr. 218, 2):

$$(6) \quad \rho = b'^2 : d.$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß für den Schnittpunkt zweier konfokalen Kegelschnitte der Krümmungsmittel-

punkt des einen stets der Pol seiner Tangente in bezug auf den anderen ist.

Endlich: Für den umgeschriebenen Kreis eines durch zwei Tangenten eines Kegelschnittes und die Berührungssehne gebildeten Dreiecks sind offenbar der Schnittpunkt der Tangenten und der der zugehörigen Normalen Endpunkte eines Durchmessers. Bei Annäherung der Berührungspunkte und der Tangenten des Kegelschnittes bis zum Zusammenfallen wird der Durchmesser des Kreises, der dem aus Tangenten und Berührungssehne bestehenden Dreieck umgeschrieben ist, zum Krümmungsradius der Kurve.

245. Die Evolute einer Kurve wurde (Nr. 222) als Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte definiert, der Krümmungsmittelpunkt  $U$  von  $P$  ist die Grenzlage des Schnittpunktes der Normale von  $P$  mit der unendlich benachbarten (Nr. 218). Also ist  $U$  der Berührungspunkt jener Normale  $PC$  mit der Evolute.

Ziehen wir in aufeinander folgenden Punkten  $P, P_1, P_2, P_3, \dots$  die Normalen  $PC, P_1C_1, P_2C_2, P_3C_3, \dots$  und nennen  $C, C_1, C_2, C_3, \dots$  die Schnittpunkte der aufeinander folgenden Normalen, so sind beim Grenzübergang  $C, C_1, C_2, C_3, \dots$  einander folgende Punkte der Evolute, also  $P_1C = PC, P_1C_1 = P_2C_1, P_2C_2 = P_3C_2, P_3C_3 = P_4C_3, \dots$  und  $CC_1, C_1C_2, C_2C_3, \dots$  benachbarte Bogenelemente der Evolute. Alsdann ist  $CC_1 = P_1C_1 - PC, C_1C_2 = P_2C_2 - P_1C_1, C_2C_3 = P_3C_3 - P_2C_2, \dots$ , also folgt schließlich durch Addition aller dieser Bogenelemente  $CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots = CC' = P'C' - PC$ , d. h. der Bogen der Evolute ist gleich dem Unterschied der seinen Endpunkten entsprechenden Krümmungsradien.

Umgekehrt können wir zu einer gegebenen Evolute die Kurve erzeugen, wenn einer ihrer Punkte  $P$  gegeben ist. Denken wir von  $P$  aus einen Faden gespannt, so daß er von  $C$  bis  $C'$  fest an der Evolute anliegt, und wird er nun, am Ende  $C'$  festgehalten, abgewickelt, so beschreibt der Endpunkt  $P$  die Kurve  $PP_1P_2 \dots P_n$ .

Jeder von  $P$  verschiedene Punkt  $Q$  des Fadens beschreibt eine andere Kurve, die ebenfalls die gegebene Evolute als Ort

ihrer Krümmungsmittelpunkte hat. *Kurven mit gemeinsamer Evolute heißen Parallelkurven oder äquidistante Kurven*, denn offenbar haben je die Punkte auf einer gemeinsamen Normale parallele Tangenten und konstanten Abstand  $PQ$ .

246. Wenn von irgend einem Punkt  $T$  einer Ellipse an eine konfokale Ellipse zwei Tangenten gezogen sind, so ist der Überschuß ihrer Summe über den zwischen ihren Berührungspunkten enthaltenen Bogen der Ellipse konstant.<sup>81)</sup>

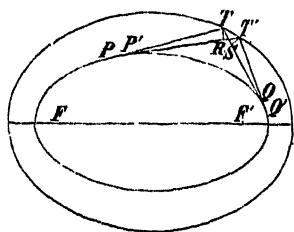


Fig. 129.

(Fig. 129), so ist  $PT = PR = PP' + P'R$ , weil  $P'R$  als die Verlängerung der Geraden  $PP'$  angesehen werden kann; ebenso  $Q'T' = Q'Q + Q'S$ . Wegen der Gleichheit der Winkel  $TT'R$  und  $T'TS$  (S. 421) ist ferner  $TS = T'R$ , daher  $PT + IQ' = PT' + T'Q'$ , also

$$(PT + TQ) - (P'T' + T'Q') = PP' - QQ' = PQ - P'Q'.$$

Der Satz gilt für jedes Paar Kurven von solcher Beschaffenheit, daß die von einem Punkt  $T$  der äußeren Kurve an die innere gelegten Tangenten  $T'P$ ,  $T'Q$  mit der Tangente  $T'T'$  der ersten in  $T$  gleiche Winkel bilden.

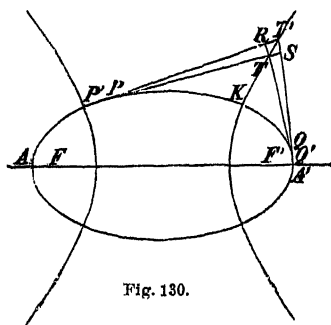


Fig. 130.

247. Werden von einem beliebigen Punkt  $T$  einer Hyperbel an eine mit ihr konfokale Ellipse Tangenten gezogen (Fig. 130), so ist die Differenz der Bogen  $PK$ ,  $QK$  immer

gleich der Differenz der Tangenten  $TP$  und  $TQ$ .<sup>82)</sup>

Man erkennt genau wie vorher, daß

$$(T'P' - P'K) - (TP - PK) = T'R,$$

$$(T'Q' - Q'K) - (TQ - QK) = T'S;$$

und aus Nr. 188 folgt, daß  $T'S = T'R$  ist.

Somit ist die Differenz zwischen den Überschüssen von  $TP$  über  $PK$  und von  $TQ$  über  $QK$  konstant; da sie Null ist, wenn  $T$  in  $K$  liegt, so muß sie in jedem Fall Null sein, d. h. es ist stets

$$TP - PK = TQ - QK.$$

Nach einem Satze von *G. C. di Fagnano* kann ein elliptischer Bogenquadrant so geteilt werden, daß die Differenz seiner Teile der Differenz der Halbachsen der Ellipse<sup>83)</sup> gleich ist. Dieser Satz folgt aus dem Vorigen. Um in jedem Quadranten diesen Teilpunkt zu erhalten, hat man nur durch den Schnittpunkt der Scheiteltangenten der Ellipse eine mit ihr konfokale Hyperbel zu legen. Die Punkte  $K$ , in denen sie die Ellipse schneidet, sind die gesuchten Teilpunkte. Ihre Koordinaten sind

$$(7) \quad x = \pm a\sqrt{a:\sqrt{a+b}}, \quad y = \pm b\sqrt{b:\sqrt{a+b}}.$$

B. Den Bogen mit rektifizierbarer Differenz im konfokalen System  $\lambda$  von Nr. 230,6 entsprechen ebensolche im System  $\lambda'$ , die rektifizierenden Tangenten entsprechen einander.

248. Ist ein Vieleck einem Kegelschnitt umgeschrieben und bewegen sich alle seine Eckpunkte bis auf einen in konfokalen Kegelschnitten, so beschreibt auch dieser letzte Eckpunkt einen konfokalen Kegelschnitt.

Wir bemerken zuerst folgendes. Die Spitze  $T$  eines einem Kegelschnitt  $k$  umgeschriebenen Winkels  $PTQ$  möge sich auf einem konfokalen Kegelschnitt bewegen; ferner seien  $a$  und  $b$  die zu  $TP$  und  $T'Q$  parallelen Halbmesser von  $k$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel  $TP'T'$  und  $T'Q'T''$ , die jeder der Schenkel jenes Winkels mit seiner nächstfolgenden Lage bildet. Alsdann besteht die Beziehung  $a\alpha = b\beta$ . Denn nun ist  $TR = T'S$ ; ferner ist (Fig. 129)  $TR = TP \cdot \alpha$ ,  $T'S = T'Q' \cdot \beta$ , aber  $TP$  und  $T'Q$  sind den Halbmessern proportional, zu denen sie parallel sind (Nr. 151).

Wenn umgekehrt die Gleichung  $a\alpha = b\beta$  erfüllt ist, so bewegt sich der Punkt  $T$  auf einem konfokalen Kegelschnitt. Denn indem wir die Aufeinanderfolge der einzelnen Schritte des Beweises umkehren, zeigen wir, daß  $TR = T'S$  ist, daß

demnach  $TT'$  mit  $TP$  und  $TQ$  gleiche Winkel bildet und daher mit der Tangente des konfokalen Kegelschnittes in  $T$  zusammenfällt, daß also  $T'$  in diesem Kegelschnitt liegt.

Wenn alsdann die den Seiten des Vielecks parallelen Durchmesser durch  $a, b, c$  usw. bezeichnet werden, und  $d$  den zur letzten Seite desselben parallelen Halbmesser ausdrückt, wenn ferner  $\alpha, \beta, \gamma$  usw.,  $\delta$  die dem Vorigen analog bezeichneten Winkel sind, so gelten die Beziehungen

$$a\alpha = b\beta, \quad b\beta = c\gamma \text{ usw.},$$

weil die sämtlichen Ecken des Vielecks bis auf eine sich in konfokalen Kegelschnitten bewegen. Aus dieser Kette ergibt sich aber  $a\alpha = d\delta$ , und dies zeigt an, daß auch die letzte Ecke des Vielecks einen konfokalen Kegelschnitt durchläuft.<sup>84)</sup>

## Literaturnachweisungen.

1) Nr. 2, S. 3. Die eindeutige Definition einer Strecke, eines Winkels usw. oder die Durchführung des Prinzips der Zeichen in der Geometrie verdankt man *A. F. Möbius* „Der baryzentrische Calcul“, Leipzig 1827. Vgl. daselbst § 1, §§ 17—19, Anmerkung zu § 165; auch in *A. F. Möbius*, Gesammelte Werke, Bd. 1, hrsgg. von *R. Baltzer*, Leipzig 1885, S. 25, 39—41, 200/1.

2) Nr. 3, S. 8. *P. de Fermat*, Ad locos planos et solidos isagoge, geschrieben etwa 1630, hrsgg. von *Samuel de Fermat*, Varia opera, Toulouse 1679 oder *P. de Fermat*, Oeuvres, hrsgg. von *P. Tannery* und *Ch. Henry*, Bd. 1, Paris 1891; *R. Descartes*, Géométrie, Leyden 1637 oder Oeuvres, hrsgg. von *Ch. Adam* und *P. Tannery*, Bd. 6, Paris 1902 oder in deutscher Übersetzung von *L. Schlesinger*, Berlin 1894. Vgl. ferner *R. Baltzer*, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. 17 (1865), S. 5—6; *S. Günther*, „Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Koordinatenprinzips“, Abhandl. der Naturf. Gesellsch. zu Nürnberg, Bd. 6 (1877), S. 1—50; *E. Müller*, „Die verschiedenen Koordinatensysteme“, in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. III, Teil 1, S. 605ff. [1910]. Über die Art, wie die antike Darstellungsform der Lehre von den Kegelschnitten eine geometrische Algebra bildet und als solche verwendet worden sei, so daß sie einer Umwandlung in analytische Geometrie fähig war, vgl. das schöne Werk von *H. G. Zeuthen* „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum“, deutsch von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1886.

3) Nr. 7, S. 13. Die Definition und Berechnung des Inhaltes eines Vielecks, dessen Peripherie sich schneidet, gab Anlaß zu interessanten Untersuchungen von *A. L. F. Meister* (Novi Commentarii soc. Gott 1 (1769/70), S. 144), *A. J. Lexell* (Acta Acad. Petrop. 5 (1781) I, hrsgg. 1784, S. 125; 6 (1782) I, hrsgg. 1786, S. 91) und besonders *A. F. Möbius* (Berichte der kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Klasse 17 (1865), S. 42 oder Gesammelte Werke, Bd. 2, hrsgg. von *F. Klein*, Leipzig 1886, S. 485; vgl. auch die Anmerkung zu § 165 des Werkes „Der baryzentrische Calcul“, Leipzig 1827, S. 219 oder Ges. Werke Bd. 1, Leipzig 1885, S. 200/1).

4) Nr. 8, S. 23. Dieser Beweis stammt von Herrn *Heinrich Töpken*, der vor ein paar Jahren Studierender der Technischen Hochschule zu Darmstadt war; ich verdanke die Kenntnis des Beweises einer Mitteilung meines verehrten Freundes und Fachgenossen Herrn *H. Wiener*.

5) Nr. 15, S. 32. Die Bezeichnung „harmonische Teilung“ stammt von *Ph. de La Hire*, Sectiones conicae, Paris 1685 S. 1; bei *Ch. J. Brianchon*, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817, S. 9, ist von vier harmonischen Punkten die Rede.

6) Nr. 15, S. 33. Vgl. *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl., Paris 1822, S. 16; 2. Aufl., Bd. 1, Paris 1865, S. 16.

7) Nr. 15, S. 84. Das harmonische Mittel von  $n$  Strecken findet sich bei *C. Maclaurin*, De linearum geometricarum proprietatibus gene-



ralibus tractatus (in Maclaurins Algebra, London 1748), ins Französische übersetzt von *E. de Jonquières* in dessen *Mélanges de géométrie pure*, Paris 1856, S. 205.

8) Nr. 17, S. 36. Der Begriff der *Involution* rührt von *G. Desargues* her, ebenso der Name (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*, Paris 1639; *Oeuvres*, hrsgg. von *N. G. Poudra*, Bd. 1, Paris 1864, S. 101 und 119).

9) Nr. 20, S. 43. Der Gedanke, einen imaginären Punkt durch eine *elliptische Involution* darzustellen, stammt von *Ch. Paulus*, *Grundlinien der neueren ebenen Geometrie*, Stuttgart 1853, S. 199; er nennt diese Involution übrigens  *einstimmig*. *K. G. Chr. v. Staudt* unterscheidet bei dieser Darstellung zwei konjugiert imaginäre Punkte dadurch, daß er der Involution einen bestimmten Sinn zuweist, der durch die Ordnung der Punkte festgelegt ist, wie im Text angegeben (Beiträge zur Geometrie der Lage, 1. Heft, Nürnberg 1856, S. 76).

10) Nr. 35, S. 65. *E. Study* (Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, 21 (1913), S. 218/20) hat auf eine gewisse Unzweckmäßigkeit der Normalform der Gleichung einer Geraden (einer Ebene in der Geometrie des Raumes) hingewiesen. Es würde nämlich zwei Normalformen geben, falls die Gerade (oder Ebene) durch den Koordinatenanfang geht; außerdem ist die Gleichung einer *imaginären Geraden* (oder Ebene) einer Normalform nicht fähig. Zur Beseitigung des ersten Mangels hat *R. v. Lilienthal* (Math. Annalen, 42 (1893), S. 497/9 [1892]) bei rechtwinkligen Koordinaten ein Verfahren angegeben, das für die Gerade in der Ebene hier mitgeteilt sei. Zunächst läßt sich eine beliebige Gerade, wenn sie nur durch einen in ihr liegenden Punkt  $P_0(x_0|y_0)$  geteilt gedacht ist, in analytisch unterscheidbare Teile zerlegen. Man sagt nach *R. v. Lilienthal*, daß ein Punkt  $P(x|y)$  „im positiven oder negativen Teil der durch  $P_0$  geteilt gedachten Geraden liegt, je nachdem die erste nicht verschwindende der zwei Differenzen  $y - y_0$ ,  $x - x_0$  positiv oder negativ ist“. Als Richtungscosinus einer Geraden  $g$  werden die Cosinus der Winkel definiert, die „der positive Teil der zu  $g$  parallelen, durch den Koordinatenanfang  $O$  gehenden und durch  $O$  geteilt gedachten Geraden mit den positiven Teilen der Koordinatenachsen bildet. Diese Winkel werden als positive Größen betrachtet, sie variieren von  $0^\circ$  (inkl.) bis  $180^\circ$  (exkl.)“. Sind  $\alpha$ ,  $\beta$  die Winkel, die von dem erwähnten positiven Teil der Geraden  $g$  mit der positiven  $x$ -, bez.  $y$ -Achse gebildet werden, so ist der erste nicht verschwindende der beiden Richtungscosinus  $\cos \beta$ ,  $\cos \alpha$  stets positiv. Die „Normalform der Gleichung einer Geraden nach *R. v. Lilienthal*“ ist alsdann diejenige Form der Gleichung, in der die Koeffizienten von  $x$ ,  $y$  die Richtungscosinus des Lotes der Geraden in bezug auf die  $x$ -, bez.  $y$ -Achse sind. Soll  $ax + by + c = 0$  die v. Lilienthalsche Normalform der Gleichung einer Geraden darstellen, so muß  $a^2 + b^2 = 1$  sein und die erste nicht verschwindende der beiden Größen  $b$ ,  $a$  muß positiv sein.

11) Nr. 46, S. 88. Die Lehre von den imaginären Elementen in der Geometrie wurde durch *K. G. Chr. v. Staudt* in seinem Werke „Beiträge zur Geometrie der Lage“, Nürnberg, 3 Hefte, 1856—1860 begründet. Er ersetzt die imaginäre Gerade durch eine *elliptische Strahleninvolution*, vgl. Anmerkung 9. Eine analytische Darstellung gab *O. Stolz* (Math. Annalen, 4 (1871), S. 416 ff.). Weitere Untersuchungen aus dem Gebiete der Imaginärtheorie verdankt man besonders *F. Klein*, *J. Lüroth*, *W. Fiedler*, *C. Segre*, *A. Ramorino*; bezüglich der Literatur verweisen wir auf den Artikel von *G. Fano* in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 1, S. 242/6.

12) Nr. 64, S. 119. Vgl. *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828; Bd. 2, Essen 1831. Man sehe insbesondere Bd. 1, S. 14/7 und 256/61.

13) Nr. 67, S. 126. Vgl. das Kapitel „Die geometrischen Netze“ bei *A. F. Möbius*, Der baryzentrische Calcul, Leipzig 1827, S. 266/82 oder Ges. Werke, Bd. 1, hrsgg. von *R. Baltzer*, Leipzig 1885, S. 237/51.

14) Nr. 67, S. 127. Vgl. *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 24 und 269; System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, S. 10 und 34.

15) Nr. 67, S. 128. Der Ausdruck *vollständiges Vierseit* (quadrilatère complet) findet sich zuerst wohl bei *L. N. M. Carnot*, De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801, S. 122.

16) Nr. 67, S. 128. Dieser wichtige Satz über die perspektiven Dreiecke ist von *G. Desargues*; vgl. Oeuvres de Desargues, réunies et analysées par *N. G. Poudra* Bd. 1, Paris 1864, S. 413 und 430.

17) Nr. 77, S. 143. Die ersten trimetrischen Koordinaten sind die baryzentrischen von *A. F. Möbius*, vgl. dessen Werk „Der baryzentrische Calcul“, Leipzig 1827, S. 26/7 und 34, oder Ges. Werke, Bd. 1, hrsgg. v. *R. Baltzer*, Leipzig 1885, S. 45/6 und 51/2. Vermutlich hat auch *K. W. Feuerbach* den gleichen Gedanken gehabt; vgl. hierzu *M. Cantor*, Sitzgsb. der Heidelberger Akad. d. Wissensch. Jahrg. 1910. Die vollständige Ausführung des Gedankens von Koordinatensystemen der geraden Linie ist das Verdienst von *J. Plücker*. Siehe dessen „Analytisch-geometrische Entwicklungen“, Bd. 2, Essen 1831 und spätere Schriften. Durch diese wurden die wahren analytischen Ausdrucksformen für die Lehren *Steiners* gefunden, die den fruchtbaren Methoden von *Poncelet* und *Gergonne* ihre wahre Grundlage und höhere Vereinigung gegeben haben.

18) Nr. 82, S. 154. Das Prinzip der Dualität ward nach *Poncelets* Vorarbeiten von *Gergonne* ausgesprochen und von *Plücker* zuerst auf eine analytische Grundlage gestellt. *Steiner* hat es dann als eine Folge der einfachsten Beziehungen der von ihm aufgestellten Grundgebilde (Punktreihen und Strahlenbüschel) geometrisch erwiesen, die in ihrer analytischen Ausdrucksform auch in unserem Text dazu geführt haben.

19) Nr. 83, S. 156. Der Ausdruck Doppelverhältnis oder Doppelschnittverhältnis ward von *Möbius* in „Der baryzentrische Calcul“ (Leipzig 1827, S. 244 oder Ges. Werke, Bd. 1, Leipzig 1885, S. 220), eingeführt; er hat die Theorie in großer Vollständigkeit entwickelt und zur Untersuchung der Kollineation und der daraus entspringenden besonderen Verwandtschaften verwendet; schließlich auch zur Untersuchung der Reziprozität. *M. Chasles* gebrauchte den Ausdruck anharmonisches Verhältnis, der, weil negativ, nicht glücklich ist. *Chasles* hatte im „Traité de géométrie supérieure“, Paris 1852, die Entwicklung einer Planimetrie auf Grundlage des anharmonischen Verhältnisses begonnen. Aber schon *Steiner* hatte die fundamentale Bedeutung dieses Begriffes für die ganze Geometrie weiter entwickelt in dem Werke: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“, Berlin 1882 oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstraß*, Bd. 1, Berlin 1881, S. 229. Vgl. in der alten Geometrie *Pappus* in Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis, hrsgg. von *F. Hultsch*, Bd. 2, Berlin 1877, S. 871 (prop. 129) und S. 895 (prop. 145).

20) Nr. 83, S. 158. *K. G. Chr. v. Staudt* hat die harmonischen Gebilde zur Grundlage der Projektivitätstheorie und der reinen Geometrie gemacht. Vgl. seine „Geometrie der Lage“, Nürnberg 1847, § 8, S. 48.

21) Nr. 84, S. 160. Vgl. *Pappus*, a. a. O., S. 871 (prop. 129).

22) Nr. 87, S. 167. Für die folgende Entwicklung der projektiven Koordinaten vgl. man *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 3. Aufl., 3. Teil, Leipzig 1888, S. 72 ff. und die Literaturnachweise daselbst.

23) Nr. 89, S. 175. Die algebraische Abkürzungssymbolik ist im engsten Zusammenhang mit *Cayleys* Methode der Operationssymbole (*J. reine angew. Math.* 34 (1847), S. 30—45 [1846] oder *Coll. math. papers* Bd. 1, Cambridge 1889, S. 337/51); sie wurde in der hier gebrauchten Bezeichnung durchgeführt von *S. Aronhold* (*J. reine angew. Math.* 55 (1858), S. 97—191 [1857]) und besonders erfolgreich entwickelt und angewandt von *A. Clebsch* (*J. reine angew. Math.* 59 (1861), S. 1—62 [1860]). Vgl. auch *G. Salmon*, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1877, S. 173/92.

24) Nr. 92, S. 186. Der Ausdruck *Kollineation* wurde von *Weiske* seinem Freunde *A. F. Möbius* zur Einführung empfohlen; vgl. *A. F. Möbius*, Der baryzentrische Calcul, Leipzig 1827, S. Xlf. und 301/88 oder *Ges. Werke*, Bd. 1, Leipzig 1885, S. 10/11 und S. 266—318. Der Name *Homographie* stammt von *M. Chasles*, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1. Aufl., Brüssel 1837; 2. Aufl., Paris 1875, S. 695; den Ausdruck *Homologie* benutzte *J. V. Poncelet*, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1. Aufl. Paris 1822, S. 159 f., 2. Aufl., Bd. 1, Paris 1865, S. 155.

25) Nr. 99, S. 199. Die hier benutzte Methode der Untersuchung stammt von *A. Cayley*, *The Cambridge math. Journal*, 2 (1841), S. 269/71 oder *Coll. math. papers*, Bd. 1, Cambridge 1889, S. 3/4.

26) Nr. 104, S. 209. Diese Form rührt von *W. S. Burnside* her.

27) Nr. 107, B. 5, S. 213. *Meier Hirsch* behandelte die entsprechende Aufgabe für Punkte des Raumes und die Kugel in seiner „Sammlung geometrischer Aufgaben“, 2. Teil, S. 339. Vgl. auch *J. Steiner*, *J. reine angew. Math.* 1 (1826), S. 52 [1825] und 2 (1827), S. 263 oder *Ges. Werke*, hrsgg. von *K. Weierstrass*, Bd. 1, Berlin 1881, S. 16 und S. 189.

28) Nr. 108, B. 5, S. 215. Vgl. *S. S. Greatheed*, *The Cambridge math. Journal* Bd. 1, 1. Ausg. (1838), S. 168/70; 2. Ausg. (1846), S. 184/6.

29) Nr. 108, B. 7, S. 216. Der in Fig. 57 abgebildete Gelenkmechanismus wird als *Inversor* von *Peaucellier* bezeichnet; zum Namen *Inversor* vgl. Nr. 125 und 126 des Textes. Der Apparat wurde von dem französischen Offizier *Peaucellier* erfunden, der seine Entdeckung in den *Nouv. Ann. de Math.* (2) 3 (1864), S. 414 anzeigte und ausführlicher ebenda (2) 12 (1873), S. 71/8 veröffentlichte. Näheres über diesen Mechanismus und Verallgemeinerungen desselben findet man noch bei *V. Liguine*, *Nouv. Ann. de Math.* (2) 14 (1875), S. 529/60. Vgl. auch *A. B. Kempe*, *How to draw a straight line*, London 1877; *P. Dingeldey*, Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen, Diss. Leipzig 1886, S. 21 ff. und S. 37 ff. (daselbst auch weitere Literaturangaben); *J. Neuberg*, *Sur quelques systèmes de tiges articulées*, Lüttich 1886 (gleichfalls Literaturangaben enthaltend). Übrigens wurde derselbe Apparat im Jahre 1870 von *L. Lipkin*, einem Studierenden der Hochschule zu St. Petersburg, entdeckt, vgl. *Bull. acad. St.-Petersbourg*, 16 (1871), S. 57—60 [1870].

30) Nr. 109, S. 217. Den Namen *Potenz* bei Kreisen gebrauchte zuerst *J. Steiner*, *J. reine angew. Math.* 1 (1826), S. 164 oder *Ges. Werke*, Bd. 1, Berlin 1881, S. 22 oder *W. Ostwald*, *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 123, hrsgg. von *R. Sturm*, Leipzig 1901, S. 7 in einer für die Einsicht von der Nützlichkeit des Begriffes durchschlagenden Ab-

handlung. Aus ihr stammt auch die Auffassung der Berührung als Sonderfall von Schneiden unter bestimmtem Winkel und die Aufstellung der bezüglichen Aufgaben.

31) Nr. 114, S. 227. Der Name Radikalachse stammt von *L. Gaultier* (Journ. de l'école polyt. 9, Heft 16 (1813), S. 139 und 147/58), der Name Chordale von *J. Plücker* (Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 49). *J. Steiner* gebrauchte den Ausdruck Linie der gleichen Potenzen (J. reine angew. Math. 1 (1826), S. 165 oder Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 23 oder *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 123, Leipzig 1901, S. 8).

32) Nr. 116, S. 231. Vgl. *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 52 und 65.

33) Nr. 120, S. 240. Vgl. *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl. Paris 1822, S. 41/2; 2. Aufl. Bd. 1, Paris 1865, S. 41; ferner *J. Casey*, Quarterly journal pure appl. math. 5 (1862), S. 43/53 und 118/26 [1860]. Ihre erste vollere Ausbildung erfuhr die Theorie der Kreisbüschel bei *Poncelet* a. a. O., auch die Lehre von den Ähnlichkeitspunkten wurde von ihm weitergeführt (ebenda 1. Aufl. S. 130 ff., 2. Aufl. S. 125 ff.).

34) Nr. 121, S. 242. Vgl. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), S. 175f. oder Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1882, S. 33 oder *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 123, Leipzig 1901, S. 22.

35) Nr. 122, B. 6, S. 247. Die Beziehung zwischen den Tangententlängen aus einem Punkte an vier Kreise eines Netzes rührt von *J. Harvey* her, wie *J. Casey* in einer Abhandlung in den Trans. Irish Acad., Bd. 24, science (1871), S. 458 bemerkt.

36) Nr. 123, S. 251. Näheres zum Apollonischen Problem findet man bei *J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 7 (1816/7), S. 289 und Mémoires de l'académie royale des sciences de Turin, 22 (1813/4), Turin 1816, S. 20—40; *J. B. Durrande*, Ann. math. pures appl. 11 (1820/1), S. 1; *J. V. Poncelet*, ebenda S. 317; *F. Neumann*, Isis von Oken, Jahrg. 1826, S. 349 und 466 [1825]; *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 102—126; J. reine angew. Math. 10 (1833), S. 293 oder Gesammelte math. Abhandlungen, hrsgg. von *A. Schoenflies*, Leipzig 1895, S. 246; *G. Darboux*, Ann. écolenorm. (2) 1 (1872), S. 323; *G. Frobenius*, J. reine angew. Math. 79 (1875), S. 185 [1874]; *E. Study*, Math. Ann. 49 (1897), S. 497; *O. Hesse*, Vorlesungen aus der analyt. Geom. der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, 4. Aufl., hrsgg. von *S. Gundelfinger*, Leipzig 1906, S. 224; *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, hrsgg. von *F. Lindemann*, 2. Aufl. 1. Teil, 1. Lieferung Leipzig 1906, S. 260/3; *H. G. Zeuthen*, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, deutsche Ausgabe von *R. v. Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1886, S. 380—383. Weitere Literatur erwähnt *M. Simon*, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert, Leipzig 1906, S. 97—105.

37) Nr. 127, S. 261. Vgl. Anmerkung 29. Zum Begriff der isogonalen Verwandtschaft vgl. *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 96; J. reine angew. Math. 11 (1834), S. 219 [1831] oder ges. math. Abhandlungen, hrsgg. von *A. Schoenflies*, Leipzig 1895, S. 277; vorbereitet durch *J. Steiners* potenzhaltende und *Poncelets* invers liegende Punkte. Als Prinzip der elektrischen Bilder entdeckte *W. Thomson* das Prinzip der reziproken Radien 1845 von neuem und *J. Lionville* behandelte es allgemein (J. math. pures appl. (1) 12 (1847), S. 265. Für das Allgemeine vgl. *C. F. Gauss*: „Allgemeine Lösung der Aufgabe: die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den

kleinsten Teilen ähnlich wird“, *Astron. Abhandlungen*, hrsgg. von *H. C. Schumacher*, 3. Heft, Altona 1825, S. 1 [1822], oder *Werke*, Bd. 4, Göttingen 1873, S. 189.

38) Nr. 128, S. 263. Diese Lösung gab *J. Casey* in der *Royal Irish Academy* im April 1866; einen allgemeinen Satz gab derselbe in *Hermathena*, Bd. 3, S. 279 (Dublin 1879).

39) Nr. 128, 1, S. 264. Vgl. *J. Casey*, *A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic sections*, 2. Aufl. Dublin 1893, S. 120f.

40) Nr. 128, 2, S. 264. Eine Untersuchung von *A. Cayley*, *The Cambridge math. Journal* 2 (1841), S. 270 oder *The collected math. papers*, Bd. 1, Cambridge 1889, S. 3.

41) Nr. 128, 4, S. 265. Vgl. die Abhandlungen von *G. Darboux*, *Ann. école norm.* (2) 1, (1872), S. 323—392 und von *G. Frobenius*, *J. reine angew. Math.* 79 (1875), S. 185 ff. [1874], sowie *R. Lachlan*, *Philosophical Transactions London Royal Society* Bd. 177 (für 1886), London 1887, S. 481—625; *The Messenger of math.* 16 (1886/7), S. 98 ff.

42) Nr. 136, S. 279. Man findet ein Polardreieck wohl zuerst bei *G. Desargues* (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*, Paris 1639; *Oeuvres*, hrsgg. von *N. G. Pondra*, Bd. 1, Paris 1864, S. 188/9, das Dreieck *NFG* von Figur 13 daselbst); jedoch erwähnt *G. Desargues* nicht ausdrücklich, daß dies ein solches Dreieck ist

43) Nr. 140, S. 289. Die Tatsache, daß sich auch jetzt  $k = A : A_{22}$  bestimmen läßt, und die Art dieser Bestimmung teilte mir *S. Gundelfinger* vor etwa 20 Jahren mit. Vgl. auch dessen Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *H. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 25/6 und 31/2.

44) Nr. 154, S. 315. Diese Methode gab *G. Boole*, *The Cambridge math. Journal* 3 (1843), S. 11 f. [1841], vgl. ferner *The Cambridge and Dublin math. Journal* 6 (1851), S. 98.

45) Nr. 159, S. 320. Vgl. *M. O'Brien*, *The Cambridge math. Journal* 4 (1845), S. 99 ff.

46) Nr. 160, S. 321. Die hier erwähnte mechanische Erzeugung einer Ellipse findet sich schon im 5. Jahrhundert bei *Proclus*; vgl. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, hrsgg. von *G. Friedlein*, Leipzig 1873, S. 106.

47) Nr. 165, S. 327. Diese Vervollständigung der Beziehungen zwischen der gleichseitigen Hyperbel und dem Kreis gab *W. Fiedler* in seiner „*Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln*“, Leipzig 1882.

48) Nr. 165, 2, S. 327. Vgl. *Ch. J. Brianchon* und *J. V. Poncelet*, *Ann. math. pures appl.* 11 (1820/1), S. 205.

49) Nr. 165, 3, S. 327. Ebenda S. 210.

50) Nr. 169, 6, S. 335. Die Formeln von B. 6 gab *J. Mac Cullagh*, *Dublin Exam. Papers* 1836, S. 22.

51) Nr. 178, S. 351. Vgl. *H. M. Taylor*, *The Messenger of Math.*, 16 (1886/7), S. 39—41, London und Cambridge 1887, sowie *G. Salmon*, *Analytische Geometrie des Raumes*, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 1. Teil, 4. Aufl., Leipzig 1898, S. XV, Note 11\*).

52) Nr. 180, S. 355. Vgl. *Ph. de La Hire*, *Sectiones conicae*, Paris 1686, S. 189 f.

53) Nr. 181, S. 356. Die allgemeine Definition der Brennpunkte einer ebenen Kurve stammt von *J. Plücker*, *J. reine angew. Math.* 10 (1833), S. 84 ff. oder *Ges. math. Abhandlungen*, hrsgg. von *A. Schoenflies*, Leip-

zig 1895, S. 290 ff. Vgl. ferner *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 37 (1848), S. 161 ff. [1847] oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass*. Bd. 2, Berlin 1882, S. 389 ff., sowie eine Abhandlung von *W. Fiedler*, Acta mathematica, 5 (1884), S. 331, besonders § 31 f. (S. 389 ff.).

54) Nr. 183 S. 358. Schon *L. Euler* hat in ähnlicher Weise die Brennpunkte eines Kegelschnittes bestimmt (Introductio in analysin infinitorum, Bd. 2, Lausanne 1748, S. 63. Vgl. auch *F. Schur*, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1898, S. 75 ff., sowie *A. Brewer*, Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. Eisenach 1888.

55) Nr. 186, S. 362. Zu dieser „Gärtnerkonstruktion der Ellipse“ vgl. *R. Descartes*, La dioptrique, Anhang zu der Schrift Discours de la méthode, Leyden 1637 oder Oeuvres hrsgg. von *Ch. Adam* und *P. Tannery*, Bd. 6, Paris 1902, S. 166. Zum ersten Mal wird die Fadenkonstruktion der Ellipse im 6. Jahrhundert nach Chr. Geb. bei *Anthemius* erwähnt (vgl. *T. L. Heath*, Bibl. math. (8) 7 (1906/7), S. 227 f.). Im 9. Jahrhundert wird die Konstruktion von *Alhasan* erwähnt, dem jüngsten der drei Brüder Mohammed, Hamed und Alhasan, Söhne von *Musa ibn Schakir*. Vgl. hierzu *F. Wöpeke*, Journal asiatique (5) 5 (1855), S. 223. Vgl. ferner *A. von Braunmühl* bei *W. von Dyck*, Katalog mathematischer Modelle, München 1892, S. 59 und 66.

56) Nr. 187, 3, S. 363 f. Vgl. *W. Fiedler*, Acta mathematica, 5 (1884), S. 390 f.

57) Nr. 188, 1, S. 364 f. Die Sätze in Aufg. 1 bis 5 sind von *W. D. Sadleir*.

58) Nr. 190, S. 367. Der hier gegebene Beweis stammt von *O' Brien*, A treatise on plane coordinate geometry, Teil 1, Cambridge und London 1844 S. 156. Der Satz findet sich schon bei *Ph. de La Hire*, Sectiones conicae, Paris 1685, S. 190 f.; vgl. ferner *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl. Paris 1822, S. 265; 2. Aufl. Bd. 1, Paris 1865, S. 257. Man kann den Satz auch so aussprechen: Die Geraden, die die Endpunkte einer Sehne  $P_1 P_2$  eines Kegelschnittes mit einem der beiden Brennpunkte verbinden, haben vom Pol der Sehne gleichen Abstand. Ebenso groß ist übrigens auch der Abstand des Poles von den Verbindungslinien des anderen Brennpunktes mit  $P_1$  und  $P_2$ , so daß also diese vier Brennstrahlen einen und denselben Kreis berühren, der den Pol der Sehne  $P_1 P_2$  zum Mittelpunkt hat. Dieser Satz stammt von *M. Chasles*, Nouv. Mém. Acad. Brüssel 6 (1830), S. 30 (gedruckt 1831); eine englische Übersetzung dieser Abhandlung gibt *Ch. Graves*, Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics, Dublin 1841, S. 60. In dem schätzbaren Buche von *J. Casey*, A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle, and conic sections, 2. Aufl. Dublin und London 1893, S. 225 ist der genannte Satz von *Chasles* als Beispiel zur Parameterdarstellung der Ellipse behandelt. Sind  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  die exzentrischen Anomalien der beiden Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ , so hat der Pol der Sehne  $P_1 P_2$  die Koordinaten  $\begin{matrix} a \cos \alpha & b \sin \alpha \\ \cos \beta & \cos \beta \end{matrix}$ , der Berührungskreis der vier Brennstrahlen hat den Radius  $b \operatorname{tg} \beta$  und die Gleichung

$$(x \cos \beta - a \cos \alpha)^2 + (y \cos \beta - b \sin \alpha)^2 = b^2 \sin^2 \beta.$$

*M. Chasles* hat später (Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris 17 (1843), S. 841) den Satz dahin verallgemeinert, daß die von zwei Punkten  $P_1$ ,  $P_2$  eines Kegelschnittes  $k$  an einen konfokalen Kegelschnitt gezogenen Tangenten einen Kreis berühren, der den in bezug auf  $k$  genommenen Pol von  $P_1 P_2$  zum Mittelpunkt hat. Eine andere,

für Flächen zweiter Ordnung gültige Verallgemeinerung hat *J. Plücker* (System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, S 266) gegeben.

59) Nr. 192, S. 370. Die Namen Ellipse Hyperbel. Parabel sind abgeleitet aus den griechischen Zeitwörtern *ἐλλείπειν* mangeln, *ὑπερβάλλειν* übertreffen, *παράβλλειν* gleichkommen. Vgl. das Werk von *Apollonius πωνικά* (3. Jahrh. v. Chr.), *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis*, hrsgg. von *J. L. Heiberg* Bd. 1, Leipzig 1891, S. 38, 42 und 48; ferner *Pappus Συναγωγή* (etwa 295 n. Chr. Geb.), *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis*, hrsgg. von *F. Hultsch* Bd. 2, Berlin 1877, S 674.

60) Nr. 194, 4, S. 372. Vgl. *P. Frost*, The Cambridge and Dublin math. Journal, 1 (1846) S. 68; ferner *W. Hittorf*, J. reine angew. Math., 38 (1849), S. 89f. [1847].

61) Nr. 194, 5, S. 372. Zu dieser Gleichung siehe *P. Frost* a. a. O. und *T. S. Davies*, The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine, 21 (1842), S. 192.

62) Nr. 194, 7, S. 372. Der Beweis in Aufg. 7 rührt von *J. Mac Cullagh* her.

63) Nr. 194, 9, S. 373. Der Beweis findet sich bei *J. Larrose*, Nouv. Ann. de Math. (1) 19 (1860), S. 85f.

64) Nr. 194, 14, S. 374. Die Gleichung der Aufgabe gab *Roberts*.

65) Nr. 194, 15, S. 375. Das Beispiel rührt von *W. S. Burnside* her.

66) Nr. 194, 17, S. 375. Vgl. *F. E. Eckardt*, Zeitschr. für Mathematik und Physik, 18 (1873), S. 106ff. [1872].

67) Nr. 196, 2, S. 379. Vgl. *J. Wolstenholme*, Mathematical problems, 2. Aufl. 1879, S. 189.

68) Nr. 204 3, S. 390. Diesen Satz gab *D. F. Gregory*, The Cambridge math. Journal, 2 (1841), S. 16f., Lösung einer in den Senate-House Papers von 1833 gestellten Aufgabe.

69) Nr. 212, S. 396. Vgl. die Bemerkung 58).

70) Nr. 212, S. 396. Zuerst bei *J. H. Lambert*, Insigniores orbitae cometarum proprietates, Augsburg 1761, S 5f. oder *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 133, Leipzig 1902, S. 8f. Vgl. auch die Darstellung bei *C. Taylor*, The Messenger of mathematics, 9 (1879/80), S. 65.

71) Nr. 213, 1, S. 397. Vgl. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 2 (1827), S. 97 und Ann math pures appl. 19 (1828/9), S. 59 oder Ges. Werke, Bd. 1 Berlin 1881, S 128 und 207; ferner *F. Heinen*, J. reine angew. Math. 3 (1828), S 290.

72) Nr. 219, S. 408. Diesen Satz und die Konstruktion gab *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 30 (1846), S. 271f. [1845] oder Ges. Werke, Bd. 2, Berlin 1882, S. 341f.

73) Nr. 220, S. 408. Man findet diesen Satz schon bei *J. V. L'oncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl. Paris 1822, S 224/5, 2. Aufl. Bd 1, Paris 1865, S 216/8; vgl. auch *J. Plücker*, Ann math. pures appl. 17 (1826/7), S. 71/2 oder Ges. math. Abh., hrsgg. von A. Schoenflies, Leipzig 1895, S. 61/2, sowie *K. Rohn*, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), S. 362. Die einem Kreis und einem Kegelschnitt gemeinsamen Paare von Sehnen behandelt auch *O. Terquem* (lignes conjointes), J. math. pures appl. 3 (1838), S. 17/9 und *M. Chasles* ebenda S. 385ff. Der Satz, daß die Tangente eines Punktes *P* eines Kegelschnitts *k* und die zu *P* gehörige „Krümmungssehne“ mit der Achse von *k* gleiche Winkel bildet, findet sich übrigens schon bei *R. Simson*, Sectionum conicarum libri quinque, 2. Aufl. Edinburg 1750, S. 202.

74) Nr. 220, 1, S. 409. Vgl. *F. Joachimsthal*, J. reine angew. Math. 36 (1848), S. 96 [1847].

75) Nr. 220 2, S. 409. Mehrere diese Sehne betreffende Aufgaben wurden gestellt und behandelt von *E. Lemoine*, Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), S. 192, von *L. Desmons* ebenda S. 336, sowie (2) 12 (1873), S. 29—34, von *Moret-Blanc* ebenda S. 34—38, von *A. Pellissier* ebenda S. 38—41. Vgl. ferner *R. de Paulis*, Giorn. mat. (1) 10 (1872) S. 320/4, *A. del Re* ebenda (1) 22 (1884), S. 107/9, *J. Zimmermann*, Archiv. Math. Phys. (1) 70 (1884), S. 38/57, *Adolf Schwarz*, Monatsh. Math. Phys. 13 (1902), S. 205/40. Die Hüllkurve der Krümmungssehne ist ein besonderer Fall einer anderen Hüllkurve, die von *G. Salmon*, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl. Leipzig 1882, S. 89, bestimmt wird; vgl. daselbst auch S. 90.

Für ein eingehenderes Studium der Konstruktionen des Krümmungskreises bei Kegelschnitten sei verwiesen auf *C. Cranz*, Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung, Stuttgart 1886, S. 8—20 und *C. Pelz*, Sitzungsab. böhm. Ges., Jahrg. 1879, S. 205—246. Vgl. auch *K. Rohn*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), S. 402/5.

76) Nr. 220, 4 S. 409. Vgl. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 32 (1846), S. 300 [1845] oder Ges. Werke, Bd 2 Berlin 1882, S. 377, sowie *F. Joachimsthal*, J. reine angew. Math. 36 (1848), S. 95 [1847].

77) Nr. 220, 6, S. 410. Wenn die Ellipse gezeichnet vorliegt, können die Fußpunkte der vier Normalen mit Zirkel und Lineal gefunden werden; vgl. *K. Stübitz*, Sitzungsab. d. Kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. 115, Abt. IIa, Jahrg. 1906, S. 13—20.

78) Nr. 229, 5, S. 421. Der Satz ist von *W. S. Burnside*.

79) Nr. 230, 6, S. 425. Ein schönes Ergebnis der Untersuchungen von *J. H. St. Smith*, Proceedings of the London math. Soc. 2 (1866/9), S. 211f. [1869] oder Coll. math. papers, hrsgg. von *J. W. L. Glaisher*, Bd. 1, Oxford 1894, S. 561f.

80) Nr. 243, S. 437. Diese Untersuchung rührt von *R. Townsend* her.

81) Nr. 246, S. 440. Dieser Satz ist von *Ch. Graves*. Er findet sich in dessen Bemerkungen zu einer Übersetzung zweier Abhandlungen von *M. Chasles* die unter dem Titel Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics, Dublin 1841 von *Ch. Graves* herausgegeben wurden; vgl. daselbst S. 77. Ein weit allgemeinerer Satz ist in einem am 3. Januar 1704 geschriebenen Briefe von *G. W. Leibniz* an *Johannes Bernoulli* enthalten; vgl. Leibnizens Ges. Werke, hrsgg. von *G. H. Pertz*, math. Schriften hrsgg. von *C. J. Gerhardt*, Bd. 3, Halle 1866, S. 733 und 734/6.

82) Nr. 247, S. 440. Dieser allgemeinere Satz wurde von *J. Mac Cullagh* gegeben, Examination papers Dublin 1841, S. 41 und 83; vgl. auch Proc. Irish acad. (Dublin), (1) 2 (1840/4), hrsgg. 1844, S. 508 [1843] oder Works, Dublin und London 1880, S. 319f. Ein elementarer Beweis der Sätze von *Graves* und *Mac Cullagh* findet sich bei *J. Griffiths*, Proc. London math. Soc. (1) 13 (1881/2), S. 177/9. Geschichtliche Bemerkungen gibt *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), S. 123. Vgl. ferner *M. Chasles*, Comptes rendus de l'acad. de Paris 17 (1843), S. 843, sowie *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie (autogr.) Bd. 1, Göttingen 1892/3, S. 67—73, wo besonders auf die entsprechende, von *O. Staudé* herrührende Fadenkonstruktion der Flächen 2. Ordnung eingegangen wird.

83) Nr. 247, S. 441. Der Satz von *G. C. di Fagnano* findet sich im Giorn. de' letterati d'Italia (Venedig) 26 (1716), S. 266 oder Produzioni



matematiche Bd. 2, Pesaro 1750, S. 336/42 oder Opere matematiche del marchese *Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano*, hrsgg. von *V. Volterra*, *G. Loria*, *D. Gambioli*, Bd. 2, Mailand-Rom-Neapel 1911, S. 237/92. Vgl. ferner *M. Chasles*, Comptes rendus de l'acad. de Paris, 17 (1843), S. 838—844; *E. de Jonquières*, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856, S. 55 ff.; *Th. Reye*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 41 (1896), S. 70/5 und „Die Geometrie der Lage“, 5. Aufl. Bd. 1, Leipzig 1909, S. 241 f. Zur Ausdehnung des Satzes von *Fagnano* auf Hyperbe und Parabel vgl. *M. Azzarelli*, Atti accad. pontif. Nuovi Lincei 24 (1870/1), S. 339—347. 84) Nr. 248, S. 442. Diesen Beweis gab *A. S. Hart*, The Cambridge and Dublin math. Journal 4 (1849), S. 193 f.

### Berichtigung.

In Figur 113, S. 411 muß der Punkt  $Q$  auf der Abszissenachse etwas weiter rechts liegen; die zur Abszisse  $OQ$  gehörige Ordinate  $QC$  wird alsdann größer.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Wissenschaft und Hypothese

Sammlung von Einzeldarstellungen

aus dem Gesamtgebiete der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen

**Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré-Paris.

Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. 3. Aufl. 1914.

Geb. *M* 4.80. [Band I.]

Dies Buch behandelt in den Hauptstücken: Zahl und Größe, Raum, Kraft, Natur, Mathematik, Geometrie, Mechanik und einige Kapitel der Physik. Zahlreiche Anmerkungen des Herausgebers kommen dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegen und geben dem Leser wertvolle literarische Angaben zu weiterem Studium. Die dritte Auflage ist durch einige Bemerkungen des Verfassers über die nichtarchimedische Geometrie und über die neueren elektrodynamischen Theorien erweitert.

**Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré-Paris.

Deutsch von E. und H. Weber-Straßburg. Mit einem Bildnis des Verfassers. 2. Aufl. 1910. Geb. *M* 3.60. [Band II.]

Dies Buch gewährt einen Überblick über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft und über ihre allseitige Entwicklung, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt. Das Werk ist für den Gelehrten wertlos von größtem Interesse; durch seine zahlreichen Beispiele und Erläuterungen wird es aber auch jedem modernen Gebildeten zugänglich gemacht.

**Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von

F. und L. Lindemann-München. 1914. Geb. *M* 5.—. [Band XVII.]

Eine summarische und getreue Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaften, ihrer Methoden und Tendenzen, der einige historische Bemerkungen vorausgehen. Ist vielleicht besser als abstrakte Abhandlungen verstehen, was die Gelehrten suchen, welche Vorstellung man sich von der Wissenschaft machen soll, und was man füglich von ihr erwarten darf.

**Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissen-**

**schaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-

München. 1913. Geb. *M* 6.—. [Band XVI.]

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über das gegenwärtige Wissen in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften zu geben. Er hat dabei die wichtigsten Theorien der Mathematik, der Physik und der Naturwissenschaften in einer einfachen und verständlichen Weise dargestellt, die auch für den Laien zugänglich ist.

**Die Logik der Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna.

Von K. Grelling-München. 2 Teile. 1910. [Band XI.]

I. Teil: Wirklichkeit und Logik. Geb. *M* 4.—

II. Teil: Die Grundbegriffe der Wissenschaft. Geb. *M* 4.—

Der Verfasser entwickelt zuerst eine Analyse der Fragen der Logik, die dem Thema der Erkenntnis, dabei die verschiedenen Methoden der Wissenschaft als zur Biologie, Wirtschaftswissenschaften und Geschichte, bezieht.

**Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.**

Von P. Natani-Marburg. 1910. Geb. *M* 6.60. [Band X.]

Das Buch hat gleichzeitig eine nach modernen Methoden bearbeitete Darstellung der logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften zum Zweck, welche der Logik der Wissenschaften gewidmet ist.

**Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften.**

Von P. Natani-Marburg. 1910. Geb. *M* 6.60. [Band X.]

Das Buch hat gleichzeitig eine nach modernen Methoden bearbeitete Darstellung der mathematischen Grundlagen der Naturwissenschaften zum Zweck, welche der Logik der Wissenschaften gewidmet ist.